**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 19 (1946-1947)

**Artikel:** Théorème de l'hyperespace analogue au théorème de Pascal.
**Autor:** Kollros, Louis
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-17349

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 10.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Théorème de l'hyperespace analogue au théorème de Pascal

Par Louis Kollros, Zurich

Soit $E_n$ un espace linéaire de dimension $n$ ; $(n+1)$ droites de $E_n$ sont *associées* si tout espace linéaire $E_{n-2}$ qui en rencontre $n$ coupe aussi la dernière.

De même, $(n+1)$ espaces $E_{n-2}$ sont associés si toute droite qui coupe $n$ des $E_{n-2}$ est aussi incidente au dernier.

Pour $n = 2$, trois points sont associés s'ils sont alignés ; trois droites sont associées si elles sont concourantes.

Pour $n = 3$, quatre droites sont associées si elles sont des génératrices du même système d'une quadrique réglée.

Le théorème de Pascal peut s'énoncer ainsi :

Une conique coupe les trois côtés d'un triangle $ABC$ en six points : $A_1$ et $B_2$ sur le côté $AB$, $B_1$ et $C_2$ sur $BC$, $C_1$ et $A_2$ sur $CA$ ; les trois points d'intersection des paires de droites $A_1A_2$ et $BC$, $B_1B_2$ et $CA$, $C_1C_2$ et $AB$ sont alignés.

Dans l'espace $E_n$ le théorème analogue est le suivant :

*Théorème I. Une hyperquadrique rencontre les arêtes d'un simplexe de $E_n$ en $n(n+1)$ points ; ils sont $n$ à $n$ sur $(n+1)$ espaces linéaires $E_{n-1}$ dont chacun contient $n$ points situés sur les $n$ arêtes issues d'un même sommet. Ces $(n+1)$ espaces $E_{n-1}$ coupent respectivement les faces opposées du simplexe suivant $(n+1)$ espaces $E_{n-2}$ associés.*

Pour le démontrer, prenons le simplexe donné comme système de référence des coordonnées projectives ; ses faces ont alors les équations $x_i = 0$ où $i$ prend successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, (n+1)$.

On peut choisir le point unité du système de coordonnées projectives de telle sorte que la quadrique donnée ait l'équation :

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = (a_{ik} + a_{ik}^{-1})\, x_i\, x_k$$

où le second membre est la somme de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ termes en $x_i x_k$, $i$ et $k$ variant de 1 à $(n+1)$, mais $i \neq k$ et $a_{ik} = a_{ki}$.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ sont les sommets du simplexe, l'arête $A_1A_2$ coupe la quadrique aux deux points correspondant aux racines de l'équation

$$x_1^2 - (a_{12} + a_{12}^{-1})\, x_1 x_2 + x_2^2 = 0 \ ;$$

nous associerons l'une $\dfrac{x_1}{x_2} = a_{12}$ au sommet $A_1$ et l'autre $\dfrac{x_2}{x_1} = a_{12}$ au sommet $A_2$.

L'hyperplan $E_{n-1}$ contenant les $n$ points situés respectivement sur les $n$ arêtes issues du sommet $A_1$ aura l'équation :

$$x_1 = a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \cdots + a_{1,\, n+1}\, x_{n+1}$$

que nous écrivons en abrégé :

$$x_1 = a_{1k}\, x_k$$

la somme devant être faite sur l'indice $k \neq 1$ variant de 2 à $n + 1$.

On aura des équations analogues pour les hyperplans correspondant aux sommets $A_2, \ldots, A_{n+1}$ ; on peut réunir les équations de ces $(n + 1)$ espaces $E_{n-1}$ dans la formule :

$$x_i = a_{ik}\, x_k \qquad \text{où} \quad k \neq i \ ;$$

$i$ prend toutes les valeurs de 1 à $n + 1$ (sauf $k$).

En coupant chacun de ces espaces $E_{n-1}$ par la face $x_i = 0$ opposée au sommet $A_i$ on aura les $(n + 1)$ espaces $E_{n-2}$ qui, selon notre théorème I, doivent être associés.

En effet, une droite de $E_n$ est déterminée par $(n - 1)$ équations linéaires que nous écrivons en abrégé :

$$b_{rs}\, x_s = 0 \qquad \text{où} \qquad b_{rs} \neq b_{sr} \ ;$$

$r$ varie de 1 à $(n - 1)$ et $s$ varie de 1 à $(n + 1)$ ; la somme est faite sur $s$.

Cette droite coupe le premier espace $E_{n-2}$ si le déterminant

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \cdots\cdots\cdots & a_{1,\, n+1} \\ b_{12} & b_{13} \cdots\cdots\cdots & b_{1,\, n+1} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ b_{n-1,\,2} & b_{n-1,\,3} \cdots & b_{n-1,\, n+1} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Si nous désignons par $B_{ik} = B_{ki}$ le déterminant que l'on obtient en supprimant les deux colonnes d'indices $i$ et $k$ dans le tableau de $(n - 1)$ lignes et $(n + 1)$ colonnes des coefficients $b_{rs}$, l'équation précédente peut s'écrire :

$$D_1 = a_{12} B_{12} - a_{13} B_{13} + \cdots + (-1)^n a_{1,n+1} B_{1,n+1} = 0$$

ou, en notation abrégée :

$$D_1 = (a_{1k} B_{1k}) = 0 \ , \qquad \text{où} \quad k \neq 1 \ ,$$

la parenthèse désignant une somme dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la droite considérée coupe les $(n + 1)$ espaces $E_{n-2}$ sont comprises dans la formule : $D_i = (a_{ik} B_{ik}) = 0$ où $k \neq i$ et $i$ varie de 1 à $(n + 1)$.

On vérifie alors immédiatement que la somme alternée :

$$D_1 - D_2 + D_3 - \cdots + (-1)^n D_{n+1} \equiv 0$$

est identiquement nulle ; chacun des termes $a_{ik} B_{ik}$ y figure une fois positivement et une fois négativement.

Donc toute droite qui coupe $n$ des $(n + 1)$ espaces $E_{n-2}$ est aussi incidente au dernier.

Pour $n = 2$, c'est le théorème de Pascal relatif aux coniques.

Pour $n = 3$, c'est le théorème que Chasles a énoncé sans démonstration (Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie, p. 400) :

„Une quadrique rencontre les 6 arêtes d'un tétraèdre en 12 points ; ils sont 3 à 3 sur 4 plans dont chacun contient 3 points situés sur les arêtes d'un même sommet. Ces 4 plans coupent respectivement les faces opposées suivant 4 droites qui sont les génératrices du même système d'une quadrique réglée."

La démonstration géométrique de ce théorème est simple :

Soit $ABCD$ le tétraèdre ; ses arêtes coupent la quadrique aux 12 points $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$. Dans le plan $ABC$, les trois points $(A_1A_2 - BC)$, $(B_1B_3 - CA)$, $(C_2C_3 - AB)$ sont sur la droite de Pascal $d'$ de la conique commune à la quadrique donnée et au plan $ABC$ ; ils sont aussi respectivement sur les droites :

$$a = (A_1A_2A_3 - BCD), \quad b = (B_1B_2B_3 - CDA), \quad c = (C_1C_2C_3 - DAB) \ .$$

Comme $d'$ et $d = (D_1 D_2 D_3 - ABC)$ sont dans le même plan $ABC$, on voit que $d'$ coupe les quatre droites $a$, $b$, $c$, $d$; il en est même des trois droites de Pascal $a'$, $b'$, $c'$ situées respectivement dans les trois autres faces $BCD$, $CDA$, $DAB$ du tétraèdre.

Donc $(a, b, c, d)$ et $(a', b', c', d')$ sont deux groupes de droites associées.

*Théorème II* (dual de I). *Si l'on mène par les espaces frontières $E_{n-2}$ d'un simplexe de $E_n$ les $n(n+1)$ hyperplans $E_{n-1}$ tangents à une hyperquadrique, ils se coupent $n$ à $n$ en $(n+1)$ points dont chacun est l'intersection de $n$ hyperplans tangents menés par les $E_{n-2}$ frontières d'une même face du simplexe. Les $(n+1)$ droites joignant ces $(n+1)$ points respectivement aux sommets opposés à ces faces sont associées.*

Pour $n = 2$, c'est le théorème de Brianchon.

Pour $n = 3$, c'est le théorème énoncé par Chasles (loc. cit.) et démontré par Weddle (Demonstration of Brianchon's Theorem, and of an analogous property in space, Camb. Dubl. Journ., t. 7, p. 10—13):

„Si l'on mène par les arêtes d'un tétraèdre 12 plans tangents à une quadrique, ils se coupent 3 à 3 en 4 points dont chacun est l'intersection de 3 plans menés par les arêtes d'une même face; les 4 droites joignant ces 4 points respectivement aux sommets opposés à ces faces sont 4 génératrices du même système d'une quadrique réglée."

Si, pour $n$ quelconque, l'hyperquadrique est *inscrite* au simplexe, les $(n+1)$ droites joignant chaque sommet au point de contact de la face opposée sont associées.

Si elle est *circonscrite* au simplexe, ses hyperplans tangents aux sommets du simplexe coupent les faces opposées suivant $(n+1)$ espaces linéaires de dimension $(n-2)$ qui sont associés.

(Reçu le 26 août 1946.)