Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 19 (1946-1947)

Artikel: Sur les équations différentielles linéaires non homogènes, à coefficients constants.

Autor: Blanc, Charles

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17333

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur les équations différentielles linéaires non homogènes, à coefficients constants

Par CHARLES BLANC, Lausanne

L'intégration d'une équation différentielle linéaire, à coefficients constants et avec second membre

$$DU \equiv \frac{d^N U}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} U}{dt^{N-1}} + \cdots + a_N U = F(t) \tag{1}$$

se ramène, grâce à la méthode de la variation des constantes, à la résolution d'une équation algébrique et à des quadratures. Mais on peut procéder d'une autre manière. Si toutes les intégrales de l'équation sans second membre

$$DU = 0 \tag{2}$$

tendent vers zéro pour $t \to +\infty$, il paraît vraisemblable qu'une intégrale de l'équation (1) ne dépendra, pour t assez grand, que de la valeur de $F(t)$ pour cette valeur et pour les valeurs prises par $F(t)$ aux instants immédiatement précédents. On peut donc espérer donner une intégrale de (1) sous la forme d'une série où figureront les valeurs de $F(t)$ et de ses dérivées. C'est ce qu'ont fait en particulier MM. *J. R. Carson* et *T. C. Fry* dans un mémoire consacré à l'étude de la modulation de fréquence[1]: toutefois, pour établir en toute rigueur la validité du développement en série, il faut faire sur $F(t)$ une première hypothèse très restrictive: $F(t)$ doit être analytique pour toute valeur réelle de t.

Le but de ce travail est de donner une expression des intégrales valable dans des cas beaucoup plus généraux, tels ceux par exemple qui se présentent dans les applications. Il ne s'agira tout d'abord plus de séries, mais de développements limités, avec un reste auquel il est facile de donner une forme analogue au reste de Lagrange.

On se bornera ici au cas d'une seule équation: il est aisé de généraliser aux systèmes différentiels.

Avant de passer au problème proprement dit, il convient d'établir une généralisation, assez élémentaire, de la formule de Taylor.

---

[1]) *J. R. Carson* et *T. C. Fry*, Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency-modulation. Bell System Technical Journal *16* (1937), p. 513—540.

1. Considérons une fonction $G(\tau)$ continue ainsi que ses $(n+1)$ premières dérivées pour $\tau \geqslant 0$, excepté pour une suite de valeurs $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots$ tendant vers l'infini; $G(\tau)$ est complexe. On suppose que $\lim G^{(r)}(\tau)$ existe à gauche et à droite de τ_k, et on pose

$$\delta_k^{(r)} = G^{(r)}(\tau_k + 0) - G^{(r)}(\tau_k - 0) . \qquad r = 0, \ldots, n .$$

Si l'on convient de poser, pour $\tau = \tau_k$,

$$G^{(r)}(\tau_k) = G^{(r)}(\tau_k - 0) ,$$

on a alors

$$G(\tau) = G(0) + \int_0^\tau G'(z)dz + \sum_{\tau_k < \tau} \delta_k^{(0)} ,$$

puis

$$\int_0^\tau G'(z)\, dz = \tau G'(0) + \int_0^\tau (\tau - z) G''(z)\, dz + \sum_{\tau_k < \tau} (\tau - \tau_k)\, \delta_k^{(1)} ;$$

en continuant ainsi les intégrations par parties, compte tenu des discontinuités,

$$G(\tau) = G(0) + \tau G'(0) + \cdots + \frac{1}{n!} \tau^n G^{(n)}(0) + \int_0^\tau \frac{(\tau - z)^n}{n!} G^{(n+1)}(z)\, dz$$

$$+ \sum_{\tau_k < \tau} \left[\delta_k^{(0)} + (\tau - \tau_k)\, \delta_k^{(1)} + \cdots + \frac{1}{n!} (\tau - \tau_k)^n\, \delta_k^{(n)}\right] .$$

On peut encore transformer l'intégrale qui figure dans cette expression. Soit en effet

$$G(\tau) = G_1(\tau) + iG_2(\tau) ,$$

$G_1(\tau)$ et $G_2(\tau)$ étant réels; on a

$$R_n = \int_0^\tau \frac{1}{n!} (\tau - z)^n G^{(n+1)}(z)\, dz = \int_0^\tau \frac{1}{n!} (\tau - z)^n \left[G_1^{(n+1)}(z) + iG_2^{(n+1)}(z)\right] dz ,$$

d'où, par le théorème de la moyenne,

$$R_n = \left[G_1^{(n+1)}(\theta_1 \tau) + iG_2^{(n+1)}(\theta_2 \tau)\right] \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} ;$$

la parenthèse carrée est un nombre complexe dont le point représentatif est à l'intérieur de tout rectangle contenant toutes les valeurs prises par $G^{(n+1)}(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Cela étant, on a donc

$$\boxed{G(\tau) = \sum_0^n \frac{\tau^r}{r!} G^{(r)}(0) + \sum_{\tau_k < \tau} \sum_{r=0}^{n} \frac{(\tau - \tau_k)^r}{r!} \delta_k^{(r)} + \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} \left[G_1^{(n+1)}(\theta_1 \tau) + i G_2^{(n+1)}(\theta_2 \tau) \right]} \quad \text{(I)}$$

Cette formule généralise la formule de Taylor avec reste de Lagrange. On obtient une série convergente en faisant $n \to \infty$ si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} \left[G_1^{(n+1)}(\theta_1 \tau) + i G_2^{(n+1)}(\theta_2 \tau) \right] = 0 \ .$$

Si, en particulier, $|G^{(r)}(\tau)| < M$ pour $|\tau| < R$, quel que soit r, le reste tend vers zéro et la série converge.

2. Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants et réels

$$DU = F(t) \tag{1}$$

avec l'équation caractéristique

$$Z(r) \equiv r^N + a_1 r^{N-1} + \cdots + a_N = 0 \ ; \tag{3}$$

on supposera que toutes les racines de cette équation ont leur partie réelle négative; soit $-\varrho$ la plus grande de ces parties réelles.

On suppose $F(t)$ réelle ou complexe, intégrable, bornée pour t réel. Soit $X(t)$ l'intégrale de l'équation

$$DU = 1 \tag{4}$$

avec les valeurs initiales $X(0) = X'(0) = \cdots = X^{(N-1)}(0) = 0$; il est inutile de déterminer explicitement cette fonction; elle disparait de la suite des calculs. En posant[2])

$$\mathfrak{L}\{X(t)\} = x(s), \quad \mathfrak{L}\{U(t)\} = u(s), \quad \mathfrak{L}\{F(t)\} = f(s) \ ,$$

on a

$$Z(s) \cdot x(s) = \frac{1}{s}$$

d'où

$$x(s) = \frac{1}{s \cdot Z(s)} \ ,$$

---

[2]) $\mathfrak{L}\{X(t)\}$ représente la transformée de Laplace de $X(t)$, etc. Voir, par exemple, *G. Doetsch*, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin, Springer 1937.

et, en supposant $U(0) = U'(0) = \cdots = U^{(N-1)}(0) = 0$,

$$u(s) = \frac{f(s)}{Z(s)} = s \cdot f(s) \cdot x(s) \ ;$$

or $s \cdot x(s) = \mathfrak{L}\{X'(t)\}$, donc, par le théorème de composition,

$$U(t) = \int_0^t F(t-\tau)\, X'(\tau)\, d\tau \ . \tag{5}$$

D'autre part, l'intégrale

$$V(t) = \int_t^\infty F(t-\tau)\, X'(\tau)\, d\tau \tag{6}$$

converge uniformément en t, par l'hypothèse faite sur $F(t)$; par un changement de variable, elle devient

$$V(t) = \int_{-\infty}^0 F(\tau)\, X'(t-\tau)\, d\tau$$

que l'on peut dériver N fois par rapport à t ; on en déduit que $V(t)$ satisfait à la même équation différentielle que $X'(t)$, donc à l'équation homogène (2). Ainsi, en ajoutant (5) et (6), on obtient aussi une intégrale de (1), que l'on écrira encore $U(t)$:

$$U(t) = \int_0^\infty F(t-\tau)\, X'(\tau)\, d\tau \ . \tag{7}$$

Cette intégrale est l'intégrale particulière qui s'annule ainsi que ses $(N-1)$ premières dérivées pour $t \to -\infty$. On pourrait du reste l'obtenir au moyen de la méthode de la variation des constantes.

On forme ensuite l'intégrale générale de (1) en ajoutant à (7) l'intégrale générale de (2).

3. Considérons en particulier le cas où le second membre est $F(t) \equiv e^{st}$. Alors (7) donne

$$U(t) = \int_0^\infty e^{s(t-\tau)}\, X'(\tau)\, d\tau = e^{st} \int_0^\infty e^{-s\tau} X'(\tau)\, d\tau \ ;$$

posons

$$Y(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}\, X'(\tau)\, d\tau \ ; \tag{8}$$

la fonction $Y(s)$ est la transformée de Laplace de $X'(t)$, donc

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_N} \ ;$$

si, par exemple, $F(t) \equiv e^{i\omega t}$, on a

$$U(t) = Y(i\omega)\, e^{i\omega t} \ .$$

L'intégrale (8) converge uniformément pour tout s (réel ou complexe) dont la partie réelle σ est supérieure à $-\varrho + \varepsilon$. On peut donc dériver par rapport à s, d'où, d'une façon générale,

$$Y^{(r)}(s) = (-1)^r \int_0^\infty \tau^r e^{-s\tau}\, X'(\tau)\, d\tau \ . \tag{9}$$

Si nous pouvions développer $F(t-\tau)$ dans tout l'intervalle d'intégration en une série entière en τ, l'intégrale (7) serait la somme d'une série formée des quantités $Y^{(r)}(0)$ avec des coefficients convenables. Mais cette hypothèse est très restrictive, et on peut obtenir un développement valable dans des cas beaucoup plus généraux.

4. Posons

$$W(t, \tau, s) = e^{s\tau} F(t-\tau) \ , \tag{10}$$

s étant un nombre réel ou complexe dont la partie réelle est supérieure à $-\varrho$. Pour l'instant, s est à part celà quelconque; on lui donnera plus loin une valeur déterminée pour assurer la convergence d'une série. On a, à la place de (7),

$$U(t) = \int_0^\infty e^{-s\tau}\, W(t, \tau, s) \cdot X'(\tau)\, d\tau \ ; \tag{11}$$

supposons désormais que $W(t, \tau, s)$ est continue en τ pour $\tau > 0$, possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre $(n+1)$, excepté peut-être pour un ensemble *fini* de valeurs $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots$, la dérivée $(n+1)$ème étant bornée. On suppose également que les limites à gauche et à droite existent pour ces valeurs τ_k, et on pose

$$\delta_k^{(r)} = \frac{\partial^r W(t, \tau_k + 0, s)}{\partial \tau^r} - \frac{\partial^r W(t, \tau_k - 0, s)}{\partial \tau^r} \ . \tag{12}$$

Ces τ_k dépendent de t, leur nombre également; il en est de même des $\delta_k^{(r)}$. Posons, pour simplifier l'écriture, $G(\tau) = W(t, \tau, s)$. La relation (I) est valable pour cette fonction $G(\tau)$; il n'est pas nécessaire de l'écrire à nouveau.

Comme les intégrales (9) ont toutes un sens, on peut écrire (11) sous la forme

$$U(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{G^{(r)}(0)}{r!} \int_0^\infty \tau^r e^{-s\tau} X'(\tau)\, d\tau + \int_0^\infty \sum_{\tau_k < \tau} \sum_{r=0}^{n} \frac{(\tau-\tau_k)^r}{r!} \delta_k^{(r)} e^{-s\tau} X'(\tau)\, d\tau$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty \tau^{n+1} \left[G_1^{(n+1)}(\theta_1 \tau) + i G_2^{(n+1)}(\theta_2 \tau)\right] e^{-s\tau} X'(\tau)\, d\tau \quad . \qquad (13)$$

Simplifions encore l'écriture. Posons

$$J_r = \int_0^\infty \sum_{\tau_k < \tau} \delta_k^{(r)} (\tau - \tau_k)^r e^{-s\tau} X'(\tau)\, d\tau \ ;$$

la somme ne comporte qu'un nombre fini de termes, et l'intégrale a un sens pour chaque terme pris isolément; il est donc légitime de permuter l'intégration par rapport à τ et la sommation par rapport à l'indice k; on a ainsi

$$J_r = \sum_k \delta_k^{(r)} \int_{\tau_k}^\infty (\tau - \tau_k)^r e^{-s\tau} X'(\tau)\, d\tau \ .$$

Or

$$\int_{\tau_k}^\infty (\tau - \tau_k)^r e^{-s\tau} X'(\tau)\, d\tau = e^{-s\tau_k} \int_0^\infty \tau^r e^{-s\tau} \cdot X'(\tau + \tau_k)\, d\tau \ .$$

Posons

$$Y(s \mid \tau_k) = \int_0^\infty e^{-s\tau} \cdot X'(\tau + \tau_k)\, d\tau \ ;$$

on a, puisque l'intégrale converge uniformément en s,

$$Y^{(r)}(s \mid \tau_k) = (-1)^r \int_0^\infty \tau^r e^{-s\tau} \cdot X'(\tau + \tau_k)\, d\tau \qquad (14)$$

donc

$$J_r = (-1)^r \sum_k \delta_k^{(r)} e^{-s\tau_k} Y^{(r)}(s \mid \tau_k) \ .$$

On écrira d'autre part

$$R_n(t, s) = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty \tau^{n+1} \left[G_1^{(n+1)}(\theta_1 \tau) + i G_2^{(n+1)}(\theta_2 \tau)\right] e^{-s\tau} X'(\tau)\, d\tau \ ; \qquad (15)$$

on a ainsi l'expression d'une intégrale de (1) sous la forme d'un développement limité:

$$\boxed{U(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} \left[G^{(r)}(0)\, Y^{(r)}(s) + \sum_k e^{-s\tau_k} \delta_k^{(r)} Y^{(r)}(s \mid \tau_k)\right] + R_n(t, s)} \ . \qquad \text{(II)}$$

5. *Calcul des τ_k et des $\delta_k^{(r)}$.* On a posé

$$G(\tau) = W(t, \tau, s) = e^{s\tau} \cdot F(t - \tau) \ ;$$

les singularités de $G(\tau)$ proviennent de celles de $F(t - \tau)$. Supposons désormais que $F(t)$ est nulle pour $t < 0$ et qu'elle possède pour $t \geqslant 0$ une suite de singularités $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_k, \ldots$ tendant vers l'infini (on les suppose rangées par ordre de valeurs croissantes); t étant fixé, les singularités de $G(\tau)$ sont (par valeurs décroissantes):

$$\tau_0 = t, \tau_1 = t - t_1, \ldots, \qquad \tau_p = t - t_p \ ,$$

t_p étant le plus grand des t_k inférieurs à t.

Le calcul des $\delta_k^{(r)}$ se fait à partir des grandeurs analogues pour $F(t)$; on pose $\Delta_k^{(r)} = F^{(r)}(t_k + 0) - F^{(r)}(t_k - 0)$.

Par la formule de Leibniz, on a

$$G^{(r)}(\tau) = \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} (-1)^l s^{r-l} e^{s\tau} F^{(l)}(t - \tau) \ ;$$

or

$$\delta_k^{(r)} = G^{(r)}(\tau_k + 0) - G^{(r)}(\tau_k - 0)$$

$$= \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} (-1)^l s^{r-l} e^{s\tau_k} [F^{(l)}(t - \tau_k - 0) - F^{(l)}(t - \tau_k + 0)] \ ,$$

donc

$$\delta_k^{(r)} = - \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} (-1)^l s^{r-l} e^{s\tau_k} \Delta_k^{(l)} \ .$$

Evaluons encore les fonctions $Y^{(r)}(s|t)$; on a

$$Y^{(r)}(s|t) = \int_0^\infty (-1)^r \tau^r e^{-s\tau} X'(t + \tau) \, d\tau \ ,$$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} Y^{(r)}(s|t) = 0$. Or la fonction $X'(t)$ tend vers zéro, pour $t \to +\infty$, comme $e^{-\varrho\tau}$, donc $Y^{(r)}(s|t)$ tend vers zéro plus rapidement que $e^{-(\varrho-\varepsilon)t}$ ainsi

$$Y^{(r)}(s|t) = o(e^{-(\varrho-\varepsilon)t}) \ . \tag{16}$$

6. *Un choix particulier de s.* Le paramètre s a été laissé arbitraire jusqu'ici. Faisons maintenant $s = 0$ (ce qui est légitime puisqu'il suffit que $\Re s > -\varrho$, et on a supposé $\varrho > 0$). Alors

$$G(\tau) = W(t, \tau, 0) = F(t - \tau)$$

et

$$G^{(r)}(\tau) = (-1)^r F^{(r)}(t - \tau) \; ;$$

d'autre part

$$\delta_k^{(r)} = -(-1)^r \Delta_k^{(r)}$$

d'où

$$\delta_k^{(r)} Y_k^{(r)}(s \mid \tau_k) = -(-1)^r \Delta_k^{(r)} Y_k^{(r)}(0 \mid t - t_k)$$

et enfin

$$U(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \left[F^{(r)}(t)\, Y^{(r)}(0) - \sum_k \Delta_k^{(r)} Y^{(r)}(0 \mid t - t_k) \right] + R_n(t, 0) \; ; \quad (17)$$

la somme est étendue aux indices k avec $t_k < t$, car ce sont les seuls qui figurent dans le développement limité de $G(\tau)$.

Si, par exemple, la fonction $F(t)$ a une seule singularité, pour $t = 0$, on a, pour $t > 0$,

$$U(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \left[F^{(r)}(t)\, Y^{(r)}(0) - F^{(r)}(0)\, Y^{(r)}(0 \mid t) \right] + R_n(t, 0) \; , \quad (18)$$

où on a posé $F^{(r)}(0) = \Delta_0^{(r)}$.

7. *Passage du développement limité à une série.* Etudions, dans le cas où $s = 0$, la convergence de la série obtenue en faisant tendre n vers l'infini. On suppose que $F(t)$ est analytique pour tout t réel, excepté pour les valeurs $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots$; de plus, on suppose que les valeurs de $F^{(r)}(t)$ sont toutes dans un rectangle D_r, intérieur lui-même au cercle de rayon A^r et de centre à l'origine, avec $A < \varrho$, et cela pour toute valeur entière positive de r. *Alors la série*

$$U(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left[F^{(r)}(t)\, Y^{(r)}(0) - \sum_k \Delta_k^{(r)} Y^{(r)}(0 \mid t - t_k) \right] \quad (19)$$

converge, et sa somme est une intégrale de (1).

Considérons, pour le montrer, la série $\sum_0^{\infty} R_n(t, 0)$. On a ici[3])

$$R_n(t, 0) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^{\infty} \tau^{n+1} \left[F_1^{(n+1)}(t - \theta_1 \tau) + i F_2^{(n+1)}(t - \theta_2 \tau) \right] X'(\tau)\, d\tau$$

[3]) Les nombres θ_1 et θ_2 qui figurent au second membre dépendent évidemment de n, mais cela n'a aucune importance pour la suite.

et la somme partielle peut s'écrire

$$\sum_0^{p-1} R_n(t,0) = \int_0^\infty X'(\tau) \sum_1^p \frac{(-1)^n \tau^n [F_1^{(n)}(t-\theta_1 \tau) + i F_2^{(n)}(t-\theta_2 \tau)]}{n!} d\tau \; ;$$

or $|F^{(n)}(\tau)| < A^n$, donc

$$\left| \sum_1^p \frac{(-1)^n \tau^n [F_1^{(n)}(t-\theta_1 \tau) + i F_2^{(n)}(t-\theta_2 \tau)]}{n!} \right| < \sum_1^p \frac{\tau^n A^n}{n!} < e^{A\tau} \; ;$$

puisque l'intégrale

$$\int_0^\infty X'(\tau)\, e^{A\tau}\, d\tau$$

converge absolument si $A < \varrho$, il en est de même de la série $\sum_0^\infty R_n(t, 0)$, d'où $\lim_{n\to\infty} R_n(t, 0) = 0$. Ainsi le reste du développement limité (17) tend vers zéro si $n \to \infty$, ce qui établit notre affirmation.

On peut obtenir une série convergente dans des cas plus généraux, en donnant à s une valeur convenable autre que zéro. Supposons que $F(t)$ peut s'écrire

$$F(t) = e^{\lambda t} \cdot K(t)$$

avec $\Re\lambda > -\varrho$, $K^{(r)}(t)$ étant dans le rectangle D_r, avec maintenant $A < \Re\lambda + \varrho$; *alors la série*

$$U(t) = \sum_{r=0}^\infty \frac{(-1)^r}{r!} [G^{(r)}(0)\, Y^{(r)}(\lambda) + \sum_k e^{-\lambda\tau_k}\, \delta_k^{(r)}\, Y^{(r)}(\lambda \,|\, t - t_k)] \quad (20)$$

converge, et sa somme est une intégrale de (1).

Faisons en effet $s = \lambda$ dans $G(\tau)$, ce qui est légitime puisqu'on a supposé $\Re\lambda > -\varrho$. Il vient

$$G(\tau) = e^{\lambda\tau} F(t-\tau) = e^{\lambda t} K(t-\tau)$$

puis

$$G^{(r)}(\tau) = (-1)^r e^{\lambda t} K^{(r)}(t-\tau) \, ,$$

d'où le reste

$$R_n(t,\lambda) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\lambda t} \int_0^\infty \tau^{n+1} [K_1^{(n+1)}(t-\theta_1\tau) + i K_2^{(n+1)}(t-\theta_2\tau)]\, e^{-\lambda\tau} X'(\tau)\, d\tau \; .$$

On considère la série $\sum_0^\infty R_n(t, \lambda)$, dont on peut écrire une somme partielle

$$\sum_0^{p-1} R_n(t,\lambda) = e^{\lambda t}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} X'(\tau) \sum_1^p \frac{(-1)^n}{n!}\tau^n \left[K_1^{(n)}(t-\theta_1\tau) + iK_2^{(n)}(t-\theta_2\tau)\right] d\tau\,;$$

or, ici encore,

$$\left| \sum_1^p \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} \left[K_1^{(n)} + iK_2^{(n)}\right] \right| < e^{A\tau}\,,$$

et l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} X'(\tau)\, e^{A\tau}\, d\tau$$

converge absolument si $A < \Re\lambda + \varrho$; on en tire donc $\lim_{n\to\infty} R_n(t, \lambda) = 0$, d'où notre affirmation.

Comme on a

$$G(\tau) = e^{\lambda t}\cdot K(t-\tau)\,,$$

il vient

$$G^{(r)}(\tau) = (-1)^r e^{\lambda t}\cdot K^{(r)}(t-\tau)$$

et

$$e^{-\lambda\tau_k}\,\delta_k^{(r)} = -(-1)^r e^{\lambda t_k}\,\Delta_k^{(r)}\,,$$

où

$$\Delta_k^{(r)} = K^{(r)}(t_k+0) - K^{(r)}(t_k-0)\,.$$

On peut donc énoncer le théorème

Théorème : Si le second membre de l'équation (1) *est de la forme*

$$F(t) = e^{\lambda t}\cdot K(t)$$

avec $\Re\lambda > -\varrho$, $K(t)$ *étant analytique pour t réel, excepté pour une suite de valeurs* $t_0, \ldots, t_k \to \infty$, *avec*

$$\Delta_k^{(r)} = K^{(r)}(t_k+0) - K^{(r)}(t_k-0)\,;$$

si de plus $K^{(r)}(t)$ *est toujours intérieur à un rectangle* D_r, *intérieur lui-même au cercle* $|z| = A^r$, *avec* $A < \Re\lambda + \varrho$, *alors la série*

$$\boxed{U(t) = \sum_0^\infty \frac{1}{r!}\left[e^{\lambda t} K^{(r)}(t)\, Y^{(r)}(\lambda) - \sum_{t_k<t} e^{\lambda t_k}\Delta_k^{(r)}\, Y^{(r)}(\lambda \mid t-t_k)\right]} \qquad \text{(III)}$$

converge, et sa somme est une intégrale de (1).

Supposons un instant que la fonction $K(t)$ est constante par intervalles. On a alors $K^{(r)}(t) \equiv 0$ (si $r > 0$), et les hypothèses du théorème étant vérifiées, on a simplement

$$U(t) = e^{\lambda t} K(t)\, Y(\lambda) - \sum_{t_k < t} e^{\lambda t_k} \Delta_k^{(0)}\, Y(\lambda \mid t - t_k)\,. \tag{21}$$

Il résulte de là en particulier que les fonctions $Y^{(r)}(\lambda \mid t)$ sont des intégrales de l'équation homogène (2), ce que l'on peut aussi obtenir directement.

8. On peut établir au moyen de la transformation de Laplace, formellement, les développements en série considérés. On a en effet

$$Y(s) = \sum_0^\infty \frac{1}{r!} Y^{(r)}(0)\, s^r$$

d'où, avec les notations du début de ce travail,

$$u(s) = f(s) \cdot Y(s) = \sum_0^\infty \frac{1}{r!} s^r f(s)\, Y^{(r)}(0)\,,$$

et par conséquent

$$U(t) = \sum_0^\infty \frac{1}{r!} F^{(r)}(t)\, Y^{(r)}(0)\,, \tag{22}$$

c'est-à-dire la série (19) pour $F(t)$ continue. Ce raisonnement très incomplet est parfois donné comme justification de la formule (22).

(Reçu le 13 février 1946.)