Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 20 (1947)

Artikel: Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe.

Autor: Weil, André

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18053

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe

Par André Weil, São Paulo (Brésil) *Extrait d'une lettre à G. de Rham *)*

Soit V une variété compacte, à structure analytique complexe, de dimension réelle $2n$ (i. e. de dimension complexe n); autrement dit, au voisinage de tout point de V, on s'est donné un système de n coordonnées locales, complexes, et les formules de passage d'un système de coordonnées locales à un autre, en un point commun aux domaines où ils sont respectivement valables, sont analytiques (complexes). Ceci implique naturellement sur V, du point de vue réel, une structure C^{ω}, c'est-à-dire une structure analytique réelle, et a fortiori une structure différentiable d'ordre N quel que soit N.

Supposons maintenant qu'on ait défini sur V une structure hermitienne, au moyen d'un ds^2, donné localement au voisinage de tout point, par une expression de la forme $ds^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu \overline{\omega}_\nu$, où les ω_ν sont n combinaisons linéaires, linéairement indépendantes, des différentielles dz_ν des coordonnées (complexes) locales $z_1, \ldots, z_n$. A ce ds^2 est associée de manière *invariante* (pour la structure analytique complexe donnée sur V) la forme différentielle extérieure de degré 2, $\Omega = \sum_\nu \omega_\nu \wedge \overline{\omega}_\nu$ (où $\wedge$ dénote la multiplication extérieure). La métrique donnée sera dite *kählerienne* si l'on a $d\Omega = 0$. Sur les notions qui précèdent, cf. le mémoire de Chern[1]), en particulier pp. 87 et 109—112.

Du point de vue réel, le ds^2 donné détermine sur V une structure de variété riemannienne, de sorte qu'on peut en déduire, comme dans le livre de Hodge[2]), p. 109, et dans votre mémoire en commun avec P. Bi-

---

*) Nous le publions à la demande de G. de Rham. (N D L R).

[1]) *S. S. Chern*, Characteristic classes of Hermitian manifolds, Ann. of Maths. vol. 47 (1946), p. 85.

[2]) *W. Hodge*, The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge 1941; ce livre sera cité „Hodge".

dal[3]), n° 2, un opérateur $*$, opérant sur les formes différentielles sur V ; il est facile d'ailleurs de définir directement cet opérateur, sans revenir à la structure réelle, en indiquant comment il transforme l'expression locale d'une forme au moyen des formes ω_ν, $\overline{\omega}_\nu$ qui interviennent dans la définition locale du ds^2. Si θ est une forme de degré p, sa transformée par $*$, que j'écrirai $*\theta$ (et non $\theta *$) est de degré $2n - p$, et on a $**\theta = (-1)^p \theta$. Au moyen de $*$, et de l'opérateur d (différentiation extérieure), on définit, comme dans votre mémoire[3]), les opérateurs $\delta = *d*$, $\Delta = \delta d + d\delta$; Δ est permutable avec $*$, d et δ. D'autre part, si, dans l'expression de θ par les ω_ν, $\overline{\omega}_\nu$, on remplace les ω_ν, $\overline{\omega}_\nu$, respectivement, par $i\,\omega_\nu$, $-i\,\overline{\omega}_\nu$, on obtient une forme, de degré p, que je vais désigner par $C\theta$; l'opérateur C, qui dépend seulement de la structure analytique complexe de V (et non du ds^2), est substantiellement identique à l'opérateur P' de Hodge (Hodge, p. 188). L'analyse de Hodge fait encore intervenir les deux opérateurs qui, à la forme θ, font respectivement correspondre les formes $\Omega \wedge \theta$ et $(-1)^p * (\Omega \wedge * \theta)$; en les désignant par L et Λ, on aura $*\Lambda = L*$; Λ est substantiellement l'opérateur $P^{(1)}$ de Hodge (p. 171). Il y a, entre tous ces opérateurs, de curieuses relations algébriques, qu'on peut, en se guidant sur Hodge, déterminer complètement, et sur lesquelles reposent en dernière analyse les résultats de son chapitre IV ; en particulier, les calculs au moyen desquels il démontre ses théorèmes I (p. 165), et II (p. 167), donnent essentiellement les résultats *purement locaux* suivants : *si la métrique donnée sur V est kählerienne, on a $\Lambda d - d\Lambda = C^{-1}\,\delta\,C$, et Δ est permutable avec Λ, L et C*. C'est de là que découlent tous les résultats de Hodge, sauf ceux de son n° 44 et leurs conséquences ; quant à ces derniers, ils tiennent au fait que, chez Hodge, V est supposée plongée dans un espace projectif, et que, pour la métrique kählerienne particulière qu'il utilise, la forme Ω est homologue (au sens de votre théorie) au cycle défini sur V par l'une quelconque de ses sections planes.

Hodge a montré comment on peut tirer de là une théorie complète des formes différentielles de première espèce, *de degré* 1 ; pour les formes de degré $p > 1$, sa théorie ne donne au contraire que des résultats partiels. Je me propose, en me limitant de même aux formes de degré 1, de montrer comment sa méthode s'étend aux formes de 2e et 3e espèce. D'abord, pour qu'une forme *fermée* θ, de degré 1, soit localement de la forme $\theta = \sum_\nu F_\nu(z_1, \ldots, z_n) \cdot dz_\nu$, où les z_ν sont les coordonnées locales (complexes) et les F_ν des fonctions analytiques (au sens complexe), il faut et il

[3]) *P. Bidal* et *G. de Rham*, Les formes différentielles harmoniques, Comm. Math. Helv. vol. 19 (1946) p. 1—49.

suffit qu'on ait $C\theta = i\theta$; ce ne serait pas suffisant si on ne supposait pas θ fermée (c'est-à-dire telle que $d\theta = 0$) ; de plus, pour une forme θ de degré 1, on a $\Lambda\theta = 0$, et il résulte donc de la formule $\Lambda d - d\Lambda = C^{-1}\delta C$ que les relations $d\theta = 0$, $C\theta = i\theta$ entraînent $\delta\theta = 0$.

De ce dernier résultat local, on conclut aussitôt, en particulier, que toute forme différentielle de première espèce, au sens de la géométrie algébrique, est harmonique ; plus précisément, si $\theta_1 \ldots, \theta_q$ sont les différentielles de première espèce, linéairement indépendantes, sur V (c'est-à-dire une base pour l'ensemble des formes fermées de degré 1 sur V qui satisfont à $C\theta = i\theta$), les $2q$ formes θ_μ, $\bar{\theta}_\mu$ sont harmoniques et linéairement indépendantes ; si de plus il y avait une forme harmonique réelle de degré 1, θ', indépendante des θ_μ, $\bar{\theta}_\mu$, on aurait $\Delta C\theta' = C\Delta\theta' = 0$, et par suite, en vertu de vos résultats, $d(C\theta') = 0$; la forme $\theta' - i \cdot C\theta'$ serait alors une différentielle de première espèce, indépendante des θ_μ. Comme cela est impossible, on voit qu'il y a exactement $2q$ formes harmoniques linéairement indépendantes sur V, donc, d'après les théorèmes d'existence, que le premier nombre de Betti de V, sur le groupe additif des réels, est $2q$. Telle est la belle démonstration que Hodge a donnée de ce résultat bien connu et fondamental en géométrie algébrique ; nous le retrouvons ici, débarrassé de toute hypothèse superflue, c'est-à-dire valable pour toute variété à structure analytique complexe sur laquelle on s'est assuré de l'existence d'une métrique kählerienne. Il serait d'ailleurs très intéressant de savoir s'il existe une telle métrique sur toute variété à structure analytique complexe.

Passons aux formes avec singularités. Disons, pour abréger, qu'une forme est *régulière* si, en tout point où elle est définie, elle s'exprime localement au moyen des dz_ν, $d\bar{z}_\nu$, avec des coefficients qui soient des fonctions deux fois continument différentiables des parties réelles et imaginaires des z_ν ; disons qu'une forme de degré 1 est *méromorphe* si, en tout point où elle est définie, elle est de la forme $\sum_\nu F_\nu(z) \cdot dz_\nu$, où les $F_\nu(z)$ sont des fonctions méromorphes des z_ν ; disons qu'une forme θ a, dans un ensemble ouvert W_0, la partie singulière θ_0 si θ_0 est méromorphe et si $\theta - \theta_0$ est régulière dans W_0. Supposons V recouverte par des ensembles ouverts W_h, dans chacun desquels on se soit donné une forme méromorphe *fermée* θ_h, de telle sorte que, quels que soient h et k, la forme $\eta_{hk} = \theta_h - \theta_k$ soit régulière dans $W_h \cap W_k$. *Nous voulons savoir s'il existe une forme méromorphe fermée sur V, ayant, quel que soit h, la partie singulière θ_h dans W_h.* Il est clair qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer les W_h assez petits pour qu'il existe dans chacun un système de coor-

données locales. En remplaçant aussi, au besoin, les W_h par des ensembles plus petits, on peut supposer que η_{hk} est régulière en tout point de l'adhérence de $W_h \cap W_k$, pour toute valeur de h et de k.

On peut alors déterminer des formes ζ_h, respectivement définies et régulières dans les W_h, telles qu'on ait $\zeta_h - \zeta_k = \eta_{hk}$ dans $W_h \cap W_k$ pour toute valeur de h et k; en effet, si on suppose déjà définies les formes $\zeta_1, \ldots, \zeta_{h-1}$, la détermination de ζ_h revient à la solution d'un problème de Whitney dans W_h (prolongement d'une fonction numérique réelle, deux fois continument différentiable, donnée sur une partie fermée d'un espace euclidien, à l'espace euclidien entier, ou à une partie de celui-ci). De plus, on a, dans $W_h \cap W_k$, $d(\eta_{hk}) = 0$, $C(\eta_{hk}) = i\eta_{hk}$, donc, comme on a vu, $\delta(\eta_{hk}) = 0$, ce qui donne $d\zeta_h = d\zeta_k$, $\delta\zeta_h = \delta\zeta_k$; il y a donc des formes σ, τ, régulières sur V, telles qu'on ait dans W_h, pour tout h, $\sigma = d\zeta_h$, $\tau = \delta\zeta_h$. D'après le théorème fondamental d'existence, sous la forme que vous lui avez donnée (théorème H de votre mémoire [3]), n° 5), il y a une forme ω, régulière sur V, satisfaisant à $\Delta\omega = \delta\sigma + d\tau$, c'est-à-dire à $\Delta(\omega - \zeta_h) = 0$ dans W_h. De ce qui précède résulte qu'il y a une forme ψ sur V, définie dans chaque W_h par la relation $\psi = \omega - \zeta_h + \theta_h$, et ayant donc la partie singulière θ_h dans W_h quel que soit h; et on a $\Delta\psi = \Delta\theta_h = 0$ dans W_h quel que soit h, donc partout sur V, d'où $\Delta C\psi = C\Delta\psi = 0$, et par suite, en posant $\psi_1 = \frac{1}{2}(\psi + i \cdot C\psi)$, $\Delta\psi_1 = 0$. Mais on a, dans W_h, $\theta_h + i \cdot C\theta_h = 0$; comme $\omega - \zeta_h$ est régulière dans W_h, ψ_1 l'est donc aussi; ψ_1 est donc une forme régulière sur V, et par suite la relation $\Delta\psi_1 = 0$ entraîne, par votre théorie des formes harmoniques, $d\psi_1 = 0$. Posons maintenant $\theta = \psi - \psi_1 = \frac{1}{2}(\psi - i \cdot C\psi)$. On a $C\theta = i\theta$, et, d'après ce qui précède, θ a la partie singulière θ_h dans W_h, pour tout h; de plus, on a $d\theta = d\psi = d(\omega - \zeta_h)$ dans W_h, de sorte que $d\theta$ est régulière sur V; et, en vertu de la relation évidente $\Delta d = d\Delta = d\delta d$, on a $\Delta(d\theta) = 0$, c'est-à-dire que la forme $d\theta$ est harmonique sur V. Dans ces conditions, si $d\theta$ est homologue à zéro, on aura $d\theta = 0$, et θ sera une solution du problème posé plus haut; réciproquement, si θ' est une telle solution, c'est-à-dire une forme méromorphe fermée ayant la partie singulière θ_h dans W_h pour tout h, la forme $\lambda = \theta - \theta'$ sera régulière et on aura $d\theta = d\lambda$, ce qui montre qu'alors $d\theta$ est homologue à zéro. Donc, pour que notre problème ait une solution, il faut et il suffit qu'on ait $d\theta \sim 0$, c'est-à-dire que la forme régulière $d\theta$ ait toutes ses périodes nulles.

Or on peut déterminer comme suit les périodes de $d\theta$. Soit C un „cycle singulier" de dimension 2, formé de „simplexes" dont chacun soit image continument différentiable, dans un des W_h, d'un simplexe euclidien; à

chacun de ces simplexes, je fais correspondre d'une manière déterminée, mais arbitraire, l'un des W_h qui le contiennent ; cela permet d'écrire C comme somme, $C = \sum_h C_h$, de chaînes C_h respectivement contenues dans les W_h ; si $f(C_h)$ est la frontière de C_h, on a $\sum_h f(C_h) = 0$.

Mais, la forme σ étant celle qui a été définie plus haut, on a $d\theta = d\omega - \sigma$, donc $d\theta \sim -\sigma$; et, par définition de σ, on a :

$$\int_C \sigma = \sum_h \int_{C_h} d\zeta_h = \sum_h \int_{f(C_h)} \zeta_h \ .$$

On peut supposer de plus, par une petite déformation de C, que $f(C_h)$ ne rencontre pas l'ensemble (à $2n - 2$ dimensions réelles) où les coefficients méromorphes de θ_h deviennent infinis ; alors, en posant $\xi = \zeta_h - \theta_h$, la relation $\sum_h f(C_h) = 0$ entraîne $\sum_h \int_{f(C_h)} \xi = 0$ puisque ξ est alors une forme définie sur V, ayant $-\theta_h$ pour partie singulière dans W_h ; on en conclut :

$$\int_C \sigma = \sum_h \int_{f(C_h)} \zeta_h = \sum_h \int_{f(C_h)} \theta_h \ .$$

Mais on a $d\theta_h = 0$; l'intégrale de θ_h, sur un cycle contenu dans W_h, est ce qu'on appelle, en théorie des fonctions, une „période logarithmique" ; plus précisément, on sait que l'intégrale $\int_{f(C_h)} \theta_h$ est égale au nombre d'intersection (indice de Kronecker) de C_h et du cycle, défini dans W_h modulo la frontière de W_h, qu'on obtient en prenant dans W_h la somme algébrique des variétés polaires de θ_h affectées respectivement de coefficients égaux aux périodes logarithmiques de θ_h pour ces variétés.

Mais il résulte des hypothèses sur les θ_h que, dans $W_h \cap W_k$, θ_h et θ_k ont mêmes variétés polaires, chacune ayant même période logarithmique pour θ_h et θ_k ; on a donc le droit de parler des variétés polaires du système de formes θ_h, et, pour chacune, de la période logarithmique qui lui correspond ; chacune de ces variétés est, localement au voisinage de chacun de ses points, une sous-variété algébroïde de V (au sens analytique complexe), de dimension complexe $n - 1$; si on les affecte de coefficients respectivement égaux aux périodes logarithmiques correspondantes, on obtient sur V un cycle „analytique" à $2n - 2$ dimensions („cycle algébrique", au sens de la géométrie algébrique, si V est une variété algébrique), qu'on peut appeler le „cycle polaire" du système de formes θ_h. Si on désigne ce cycle par Z, on a donc $\int_C \sigma = (C \cdot Z)$, c'est-à-dire, au sens de

votre théorie, $\sigma \sim Z$, et $d\theta \sim -Z$. En définitive, *pour que notre problème ait une solution, il faut et il suffit que le cycle polaire du système de formes θ_h soit homologue à zéro.* Si on suppose en particulier que les θ_h soient des dérivées logarithmiques de fonctions méromorphes, on retrouve (dans le cas où V est variété algébrique) un théorème important de Lefschetz sur les formes de troisième espèce. Si on suppose que les θ_h ont toutes leurs périodes logarithmiques nulles, on obtient un théorème d'existence pour les formes de deuxième espèce, qui, en principe, était connu dans le cas des surfaces[4]) comme conséquence de quelques-uns des résultats les plus profonds de la théorie des surfaces algébriques ; peut-être permettra-t-il, réciproquement, de retrouver ceux-ci, par une voie plus sûre et plus facile ; dans le cas des variétés de dimension quelconque, je le crois nouveau.

Il serait sans doute intéressant de chercher à étendre ce qui précède au cas d'une variété V ayant une frontière F (en faisant sur celle-ci des hypothèses de régularité convenables) ; cela suppose que votre méthode s'applique à ce cas plus général, c'est-à-dire en somme aux problèmes aux limites pour les formes harmoniques, ce qui ne semble pas douteux. Dans le cas particulier où les θ_h sont des dérivées logarithmiques, et où V est un domaine univalent („schlicht") de l'espace de n variables complexes, on est en présence du „problème de Cousin", bien connu dans la théorie des fonctions de n variables complexes; on peut espérer obtenir par cette voie les conditions topologiques nécessaires et suffisantes pour que le problème de Cousin ait une solution dans un domaine arbitrairement donné. Dans ce cas, d'ailleurs, on peut prendre $ds^2 = \sum_\nu dz_\nu d\bar{z}_\nu$, et je crois que la méthode de résolution du problème de Cousin à laquelle on est ainsi conduit n'est autre que celle de Poincaré, débarrassée de toute complication accessoire. Il n'est peut-être pas sans intérêt non plus, à propos des considérations ci-dessus, de rappeler que la méthode de S. Bergmann, en théorie des fonctions de n variables complexes, aboutit précisément à la définition d'une métrique *kählerienne* invariante.

J'aurais aussi souhaité pouvoir déduire de la théorie des formes harmoniques l'important théorème de Lefschetz qui donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un „cycle soit algébrique" (cf. e. g. Hodge n° 51.2, pp. 214—216) ; plus exactement, on se demande, sur une variété analytique complexe V, à n dimensions complexes, si une classe d'homologie donnée à $2n-2$ dimensions (sur le groupe des entiers) contient un cycle analytique, c'est-à-dire de la forme $\sum_\varrho a_\varrho \cdot V_\varrho$, où les V_ϱ sont des

[4]) Cf. *O. Zariski* Algebraic surfaces (Erg. d. Math. III 5 Berlin 1935), p. 124.

sous-variétés analytiques de V à $n-1$ dimensions complexes (algébroïdes au voisinage de chacun de leurs points), et les a_ϱ sont entiers ; on voit facilement qu'il faut pour cela que les périodes des formes harmoniques d'un certain type s'annulent, et le théorème de Lefschetz, sous la forme que lui a donnée Hodge, dit que c'est suffisant sur une variété algébrique plongée dans un espace projectif. Il me paraît plus intéressant de se demander si une classe d'homologie donnée contient un cycle analytique *positif*, c'est-à-dire de la forme ci-dessus avec des a_ϱ entiers $\geqslant 0$; on obtient, comme condition nécessaire, que les périodes de certaines formes doivent s'annuler, et que les périodes d'autres formes doivent former une matrice hermitienne positive définie. Lorsque V est, topologiquement, un tore à $2n$ dimensions, avec une structure analytique complexe invariante par le groupe du tore, le problème ci-dessus n'est pas autre chose que le problème d'existence des fonctions thêta, et on montre, par construction explicite de ces fonctions, que les conditions nécessaires auxquelles on est amené sont suffisantes ; mais, dans le cas général, je ne vois pas qu'on puisse faire de même. Une question très voisine de celle-là est la suivante : supposons donnée comme plus haut, sur la variété analytique complexe V, une métrique kählerienne ; supposons que la forme Ω associée à celle-ci ait toutes ses périodes entières ; s'ensuit-il que Ω soit homologue à un cycle analytique positif ?

(Reçu le 8 novembre 1946.)