Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 20 (1947)

Artikel: Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art.

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18065

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art

Von H. HADWIGER, Bern

Es sei

$$F(t) = \sum_{1}^{\infty} a_\nu t^\nu \tag{1}$$

eine im Einheitskreis $|t| < 1$ konvergente Potenzreihe, und

$$\sum_{1}^{\infty} a_\nu \tag{2}$$

die ihr formal zugeordnete, d. h. nicht notwendig konvergente Reihe ihrer Koeffizienten. Es sind durchaus geläufige Tatsachen der Reihenlehre, daß aus der Konvergenz der Reihe (2) mit der Summe s auf das Bestehen der Limesrelation

$$\lim_{t \to 1-0} F(t) = s \tag{3}$$

geschlossen werden kann (Abelscher Stetigkeitssatz) und unter passenden Voraussetzungen umgekehrt aus der Gültigkeit von (3) die Konvergenz der Reihe (2) hervorgeht (Tauberscher Umkehrsatz). — Aber auch dann, wenn wir keine von den oben erwähnten Konvergenzvoraussetzungen machen, lassen sich zwischen dem Verhalten der Funktion (1) einerseits und demjenigen der unendlichen Reihe (2) andererseits gewisse Wechselwirkungen feststellen. Eine solche Relation läßt sich in ungefährer Weise wie folgt beschreiben: Zu jeder Teilsumme

$$s_n = \sum_{1}^{n} a_\nu \tag{4}$$

der Reihe (2) gibt es einen korrespondierenden t-Wert, beispielsweise

$$t_n = 1 - \frac{1}{n}\,, \tag{5}$$

so daß sich der Funktionspunkt $F(t_n)$ innerhalb einer nicht von n abhängigen Entfernung vom Teilsummenpunkt s_n befindet. Unter passen-

den normierenden Voraussetzungen kann diese Distanz auch von der Funktion unabhängig gemacht werden. Die Funktionswerte (1) verfolgen die Teilsummenwerte der Reihe (2) bei geeigneter Korrespondenz von n und t ($n \to \infty$, $t \to 1 - 0$) mit einer gewissen Retardierung, eine Erscheinung, die vor allem bei unbestimmten (etwa spiralförmigen) Divergenzverhalten ihre Augenfälligkeit hervortreten läßt. Die Wirkungsweise der Abelschen Limitierung kann gerade durch die oben erklärte Retardierung treffend veranschaulicht werden: Die Funktionswerte sind gegenüber den Teilsummen der Reihe so verspätet, daß sie die für die Divergenz der Reihe charakteristischen Teilsummen nie einholen; der Funktionsverlauf wird während des Bestrebens, die soeben erwähnten Teilsummen einzuholen, durch die anziehende Wirkung der noch späteren Reihenglieder wieder abgelenkt, so daß er schließlich zur Ruhe kommt.

Verfasser hat in einer kleinen Note[1]) vor einigen Jahren darauf hingewiesen, daß sich inbezug auf diese Retardierungserscheinungen Aussagen machen lassen, die für beliebiges konvergentes oder divergentes Verhalten gültig sind, und die bekannte Sätze für den speziellen Fall der Konvergenz als Korollarien enthalten.

In einer soeben veröffentlichten Abhandlung hat *A. Wintner*[2]) diese Fragen wieder aufgegriffen und in etwas veränderter, vor allem aber erweiterten und vertieften Form gestaltet. Die beiden Hauptergebnisse seiner Untersuchungen sind die folgenden:

Es bezeichne

$$\alpha^* = \limsup_{n \to \infty} n \, |a_n| \tag{6}$$

und

$$\alpha = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_1^n \nu \, a_\nu \right. \tag{7}$$

wobei für α^* bzw. α eventuell die Symbole ∞ zu setzen sind, wenn die Limeswerte im üblichen Sinne nicht existieren; die beiden folgenden Aussagen sind dann im trivialen Sinn richtig.

Es gibt zwei beste (d. h. kleinste) Konstanten τ^* und τ so, daß

$$\limsup_{t \to 1-0} \left| F(t) - \sum_{n \leqq -1/\log t} a_n \right| \leqq \tau^* \alpha^* \tag{8}$$

und

$$\limsup_{t \to 1-0} \left| F(t) - \sum_{n \leqq -1/\log t} a_n \right| \leqq \tau \alpha \tag{9}$$

---

[1]) *H. Hadwiger*, Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung. Commentarii Math. Helv. **16**, 1943/44, 209—213.

[2]) *A. Wintner*, An Tauberian theorem. Commentarii Math. Helv., dieses Heft, pag. 216.

ausfällt. *A. Wintner* gibt einen Existenzbeweis für diese beiden Konstanten und zeigt, daß

$$C \leqq \tau^* \leqq \tau \tag{10}$$

und

$$1 \leqq \tau \leqq 3 + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx \tag{11}$$

zu gelten hat, wo C die Eulersche Transzendente bezeichnet. Er hebt auch hervor, daß in diesen Aussagen (8) und (9) die bekannten Tauberschen Umkehrsätze als spezielle Fälle enthalten sind, ein Verhältnis, auf das wir schon einleitend hinwiesen. Die beiden nicht von den Funktionen abhängigen, also universellen Konstanten dürfen sinngemäß wohl als Konstanten Tauberscher Art bezeichnet werden.

Um das Hauptergebnis der vorliegenden Note vorwegzunehmen, sollen zunächst die beiden exakten Werte der beiden Konstanten τ^* und τ angegeben werden: Es ist

$$\tau^* = C + 2 \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx \qquad = 1,015983 \ldots \tag{12}$$

und

$$\tau = C + \frac{2}{e} + 2 \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx = 1,751742 \ldots \,. \tag{13}$$

Eine Funktion, die in unserm Sinne extremal ist, so daß sie in (8) das Gleichheitszeichen beansprucht, ist

$$G^*(t) = \sum_1^\infty c_\nu^* t^\nu \,, \tag{14}$$

wobei

$$c_1^* = 1, c_2^* = \tfrac{1}{2}\,;\; c_\nu^* = \begin{cases} -\dfrac{1}{\nu}, & n+1 \leqq \nu \leqq n^2\,; \\ \dfrac{1}{\nu}, & n^2+1 \leqq \nu \leqq n^4\,; \end{cases} \quad n = 2^{4^\lambda}\,(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{14a}$$

Der Reihenanfang lautet

$$G^*(t) = t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{6} + \cdots + \frac{t^{16}}{16} - \frac{t^{17}}{17} - \cdots \,.$$

Eine entsprechende Funktion, für die in (9) das Gleichheitszeichen nötig wird, ist

$$G(t) = \sum_{1}^{\infty} c_\nu t^\nu , \tag{15}$$

die durch den Ansatz

$$G(t) = (1 - t)\, t \frac{d}{dt} G^*(t) + G^*(t) \tag{15 a}$$

aus der soeben erklärten Funktion (14) hervorgeht. Ihr Reihenanfang lautet

$$G(t) = 2t + \frac{t^2}{2} - \frac{7t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{11t^5}{5} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^7}{7} + \cdots + \frac{t^{16}}{16} - \frac{35t^{17}}{17} - \cdots .$$

Der Aufbau der Note gliedert sich wie folgt: In Abschnitt I wird nachgewiesen, daß die beiden Limesaussagen

$$\limsup_{n \to \infty} \left| F\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{1}^{n} a_\nu \right| \leqq \tau^* \alpha^* \tag{16}$$

und

$$\limsup_{n \to \infty} \left| F\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{1}^{n} a_\nu \right| \leqq \tau \alpha \tag{17}$$

gelten, wobei τ^* und τ die durch (12) und (13) vorgeschriebenen Werte haben. — Dieses Resultat folgern wir aus Abschätzungen, die für jedes einzelne $n = 1, 2, 3, \ldots$ scharf sind. Genauer: Es bezeichne

$$\beta^* = \sup n \, |a_n| \tag{18}$$

und

$$\beta = \sup \frac{1}{1+n} \left| \sum_{1}^{n} \nu a_\nu \right| . \tag{19}$$

Diese beiden Oberschranken sind durch das Symbol ∞ zu ersetzen, falls sie im üblichen Sinn nicht existieren; die folgenden Aussagen sind in diesem Falle alle im trivialen Sinn richtig.

Wir werden zeigen: Es gibt zu jedem n eine bestmögliche Konstante τ_n^*, sodaß die Abschätzung für jede Funktion richtig ist:

$$\left| F\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{1}^{n} a_\nu \right| \leqq \tau_n^* \beta^* , \tag{20}$$

und eine ebensolche Konstante τ_n, sodaß wieder für jede Funktion

$$\left| F \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{1}^{n} a_\nu \right| \leqq \tau_n \beta \tag{21}$$

gilt. Indem wir noch die Hilfszahlen

$$C_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\nu} - \log n \tag{22}$$

und

$$D_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \tag{23}$$

einführen, lassen sich die Werte der beiden Konstanten wie folgt schreiben:
Es ist

$$\tau_n^* = C_n + 2 D_n \tag{24}$$

und

$$\tau_n = C_n + 2 D_n + \frac{1}{n} + 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{25}$$

Die eindeutig bestimmte Funktion, für welche in (20) das Gleichheitszeichen eintritt, ist

$$G_n^*(t) = \log(1 - t) + 2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu}, \tag{26}$$

und diejenige, für welche dasselbe für (21) zutrifft, ist

$$G_n(t) = \log(1 - t) - t + 2 t^{n+1} + 2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu}. \tag{27}$$

Auf Grund der Bemerkung, daß

$$\lim_{n \to \infty} C_n = C = 0{,}577215\ldots \tag{28}$$

und

$$\lim_{n \to \infty} D_n = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = 0{,}219383\ldots \tag{29}$$

gilt, ergeben sich die Limesaussagen

$$\limsup_{n\to\infty}\left|F\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sum_{1}^{n}a_\nu\right|\leqq\tau^*\beta^* \tag{30}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty}\left|F\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sum_{1}^{n}a_\nu\right|\leqq\tau\beta\,. \tag{31}$$

Endlich werden wir zeigen, daß man in (30) und (31) rechts die Superiorwerte β^* und β durch die Limeswerte α^* und α ersetzen darf. So erhalten wir die zu beweisenden Relationen (16) und (17).

Im folgenden Abschnitt II wird dann durch die notwendige Durchrechnung gezeigt, daß die beiden Funktionen (14) und (15) in den Relationen (16) und (17) das Gleichheitszeichen beanspruchen. Damit ist erwiesen, daß die beiden Konstanten (12) und (13) für die genannten Abschätzungen (16) und (17) die bestmöglichen sind.

Im letzten Abschnitt III zeigen wir dann, daß die besten Konstanten in (8) und (9), d. h. die von *A. Wintner* untersuchten Konstanten mit den bestmöglichen in (16) und (17) übereinstimmen, also mit den Zahlwerten (12) und (13) identisch sind. Damit haben wir das für diese Abhandlung gesteckte Ziel erreicht.

I.

Wir beweisen zunächst (20). Es ist doch

$$F(t)-\sum_{1}^{n}a_\nu=-\sum_{1}^{n}a_\nu(1-t^\nu)+\sum_{n+1}^{\infty}a_\nu t^\nu\,, \tag{32}$$

und also im Hinblick auf (18)

$$\left|F(t)-\sum_{1}^{n}a_\nu\right|\leqq\left(\sum_{1}^{n}\frac{1-t^\nu}{\nu}+\sum_{n+1}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu}\right)\beta^*$$

oder auch

$$\left|F(t)-\sum_{1}^{n}a_\nu\right|\leqq\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu}+\log(1-t)+2\sum_{n+1}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu}\right)\beta^*\,,$$

und somit mit Verwendung der Hilfszahlen (22) und (23)

$$\left|F\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sum_{1}^{n}a_\nu\right|\leqq(C_n+2D_n)\,\beta^*=\tau_n^*\beta^*\,.$$

Die Verifikation, daß die Funktion (26) in der soeben nachgewiesenen Relation (20) das Gleichheitszeichen beansprucht, ist einfach, indem man zunächst feststellt, daß für die Koeffizienten dieser Funktion

$$a_\nu = -\frac{1}{\nu}\,, \quad 1 \leqq \nu \leqq n\,; \qquad a_\nu = \frac{1}{\nu}\,, \quad n+1 \leqq \nu < \infty$$

gilt. — Um nun weiter auch (21) zu beweisen, führen wir die Hilfszahlen

$$d_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_1^n \nu a_\nu \tag{33}$$

ein und verifizieren vorerst die Identitäten

$$F(t) = (1-t) \sum_1^\infty \nu d_\nu t^\nu + \sum_1^\infty d_\nu t^\nu \tag{34}$$

und

$$\sum_1^n a_\nu = n d_n + \sum_1^n d_\nu\,. \tag{35}$$

Man hat also

$$F(t) - \sum_1^n a_\nu = (1-t) \sum_1^\infty \nu d_\nu t^\nu + \sum_1^\infty d_\nu t^\nu - n d_n - \sum_1^n d_\nu\,, \tag{36}$$

oder durch einfache Umformung

$$\begin{aligned} F(t) - \sum_1^n a_\nu &= \\ = -n d_n + \sum_{n+1}^\infty d_\nu t^\nu + (1-t) \sum_{n+1}^\infty \nu d_\nu t^\nu - (1-t) \sum_1^n d_\nu \left(\frac{1-t^\nu}{1-t} - \nu t^\nu\right)\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Mit Rücksicht auf die Abgrenzung

$$0 < \frac{1-t^\nu}{1-t} - \nu t^\nu \leqq \nu \qquad (0 \leqq t < 1\,; \quad \nu = 1, 2, \ldots) \tag{38}$$

und auf (19) und (33) kann nun

$$\left| F(t) - \sum_1^n a_\nu \right| \leqq \left(1 + \sum_{n+1}^\infty \frac{t^\nu}{\nu} + (1-t) \sum_{n+1}^\infty t^\nu + (1-t) \sum_1^n \left[\frac{1}{\nu}\frac{1-t^\nu}{1-t} - t^\nu\right]\right)\beta,$$

oder nach einiger Umrechnung des Klammerausdrucks

$$\left| F(t) - \sum_1^n a_\nu \right| \leqq \left(1 + \sum_1^n \frac{1}{\nu} + \log(1-t) + 2 \sum_{n+1}^\infty \frac{t^\nu}{\nu} + 2t^{n+1} - t\right)\beta\,,$$

und endlich mit Verwendung der Hilfszahlen (22) und (23)

$$\left| F\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_1^n a_\nu \right| \leqq \left(C_n + 2D_n + \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)\beta = \tau_n \beta$$

geschrieben werden. Damit ist auch (21) bewiesen. Die Verifikation, daß die Funktion (27) in (21) das Gleichheitszeichen benötigt, ergibt sich so, daß man zunächst die Feststellung macht, daß für die Koeffizienten dieser Funktion

$$\sum_1^\nu \mu a_\mu = -(\nu+1)\,, \quad 1 \leqq \nu \leqq n\,; \quad \sum_1^\nu \mu a_\mu = \nu + 1\,, \quad n+1 \leqq \nu < \infty$$

gilt.

Indem wir uns jetzt dem Grenzübergang $n \to \infty$ zuwenden, benötigen wir die Formeln (28) und (29). Wir können uns auf eine kurze Erläuterung zu (29) beschränken. Ausgehend von der Reihe (23) erhalten wir zuerst die naheliegende Integraldarstellung

$$D_n = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\theta^n}{1-\theta}\, d\theta\,, \tag{39}$$

welche wir nun durch die Substitution $\theta = 1 - \frac{x}{n}$ in die andere

$$D_n = \int_1^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\, dx \tag{40}$$

übergehen lassen. Von hier aus führen geläufige Behandlungen zu

$$D_n = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

und damit zur Konvergenzformel (29).

Im Hinblick auf (28) und (29) gehen aus den Relationen (20) und (21) die Limesformeln (30) und (31) hervor. Um nun einzusehen, daß man dort β^* und β ersetzen darf durch α^* und α, überlegen wir uns folgendes: Zunächst kann man sich wohl auf den nicht trivialen Fall beschränken, da β^* und α^* bzw. β und α stets gleichzeitig existieren oder nicht. Nun betrachten wir eine Änderung der ursprünglichen Reihe (1), welche sich in allen Größen äußerlich durch einen Überstrich kenntlich machen soll. — Nun gibt es einmal eine Änderung, durch welche nur endlich viele Koeffizienten a_n eine nicht verschwindende Abänderung ihres Wertes erfahren, und zwar so, das zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$

$$\sup n\,|\bar{a}_n| < \limsup_{n\to\infty} n\,|a_n| + \varepsilon$$

ausfällt. Ferner kann man eine Änderung betrachten, durch welche nur endlich viele Hilfszahlen d_n (vgl. (33)) eine nicht verschwindende Abänderung ihres Wertes erfahren, so daß zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$

$$\sup n\,|\bar{d}_n| < \limsup_{n\to\infty} n\,|d_n| + \varepsilon$$

wird. Nach (34), einer Relation, welche die Folge (33) mit der Funktion (1) verbindet, ist ersichtlich, daß eine solche Änderung ebenfalls durch eine Änderung endlich vieler Koeffizienten a_v hervorgebracht werden kann. Nach beiden oben erläuterten Änderungen wird

$$\bar{\beta}^* < \alpha^* + \varepsilon\ , \quad \bar{\beta} < \alpha + \varepsilon\ ,$$

wobei noch zu beachten ist, daß (vgl. hierzu (6) und (7) mit (18) und (19)

$$\limsup_{n\to\infty} n\,|a_n| = \alpha^* \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} n\,|d_n| = \alpha$$

ist. — Nun bleibt aber in (30) und (31) die linke Seite bei einer derartigen Änderung, die sich nur auf endlich viele Glieder der Reihe (1) erstreckt, unverändert, aber die rechte Seite kann beliebig nahe an diejenige von (16) und (17) herangebracht werden. Also bestehen die Relationen (16) und (17) zu recht.

II.

Wir weisen jetzt nach, daß für die spezielle Funktion (14) in (16) das Gleichheitszeichen gilt. Wir wählen für ein beliebiges $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ die Zahl

$$n = 2^{4^\lambda}\ , \tag{41}$$

und bilden jetzt

$$G^*(t) - \sum_1^{n^2} c_\nu^* =$$

$$= -\sum_{n+1}^{n^2} c_\nu^*(1-t^\nu) + \sum_{n^2+1}^{n^4} c_\nu^* t^\nu - \sum_1^{n} c_\nu^*(1-t^\nu) + \sum_{n^4+1}^{\infty} c_\nu^* t^\nu\ .$$

Beachten wir nunmehr die für die Koeffizienten c_ν^* geltenden Festsetzungen bei (14), so läßt sich schätzen

$$\left| G^*(t) - \sum_1^{n^2} c_\nu^* \right| \geqq \sum_{n^2+1}^{n^4} \frac{t^\nu}{\nu} + \sum_{n+1}^{n^2} \frac{1-t^\nu}{\nu} - \sum_{n^4+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} - \sum_1^n \frac{1-t^\nu}{\nu} ,$$

oder auch

$$\left| G^*(t) - \sum_1^{n^2} c_\nu^* \right| \geqq \sum_{n^2+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} + \sum_1^{n^2} \frac{1-t^\nu}{\nu} - 2 \sum_{n^4+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} - 2 \sum_1^n \frac{1-t^\nu}{\nu} .$$

Da nun weiter einerseits

$$\sum_{n^4+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} < \frac{1}{n^4(1-t)} , \tag{42}$$

und andererseits

$$\sum_1^n \frac{1-t^\nu}{\nu} < n(1-t) \tag{43}$$

ist, schließt man auf

$$\left| G^*(t) - \sum_1^{n^2} c_\nu^* \right| > \sum_1^{n^2} \frac{1}{\nu} + \log(1-t) + 2 \sum_{n^2+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} - 2n(1-t) - \frac{2}{n^4(1-t)} ,$$

und somit auf

$$\left| G^*\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \sum_1^{n^2} c_\nu^* \right| > C_{n^2} + 2D_{n^2} - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} .$$

Mit Anwendung der Limesrelationen (28) und (29) gewinnen wir nunmehr

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \left| G^*\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \sum_1^{n^2} c_\nu^* \right| \geqq \tau^* ,$$

wo τ^* die Konstante (12) bezeichnet. Beachte indessen, daß die n in der obenstehenden Limesformel Funktionen von λ sind; da aber für $\lambda \to \infty$ die n^2 eine Teilfolge der natürlichen Zahlen m durchlaufen, gilt offensichtlich erst recht

$$\limsup_{m \to \infty} \left| G^*\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \sum_1^{m} c_\nu^* \right| \geqq \tau^* .$$

Da im vorliegenden Fall $\alpha^* = 1$ ist, kommt in der letzten Beziehung wegen der Gültigkeit von (16) nur das Gleichheitszeichen in Betracht. Damit ist das Gewünschte gezeigt.

Ferner haben wir nachzuweisen, daß die Funktion (15) in der Rela-

tion (17) das Gleichheitszeichen beansprucht. Ein Vergleich der Funktionalbeziehung (15a) mit der Identität (34) lehrt uns, daß offenbar

$$c_n^* = d_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_1^n \nu c_\nu \tag{44}$$

sein wird. Die Koeffizienten c_n^* der Funktion (14) sind also identisch mit den den Koeffizienten c_n der Funktion (15) gemäß (33) zugeordneten Hilfszahlen d_n.

Es sei nun n wieder eine Zahl der Form (41). Identifizieren wir in der Zerlegungsformel (37) $F(t)$ mit $G(t)$, n mit n^2, unterteilen aber die Summation von 1 bis n^2 bei n und ebenso diejenige von n^2+1 bis ∞ bei n^4 (daß die d_n mit den c_n^* identisch sind, wurde bereits oben erwähnt), so erhalten wir folgende Zerlegungsformel (lies dreizeilig)

$$\begin{aligned} G(t) - \sum_1^{n^2} c_\nu = &- n^2 c_{n^2}^* + (1-t) \sum_{n^2+1}^{n^4} \nu c_\nu^* t^\nu + \\ &+ (1-t) \sum_{n^4+1}^{\infty} \nu c_\nu^* t^\nu + \sum_{n^2+1}^{n^4} c_\nu^* t^\nu + \sum_{n^4+1}^{\infty} c_\nu^* t^\nu - \\ &- (1-t) \sum_1^n c_\nu^* \left(\frac{1-t^\nu}{1-t} - \nu t^\nu\right) - (1-t) \sum_{n+1}^{n^2} c_\nu^* \left(\frac{1-t^\nu}{1-t} - \nu t^\nu\right) . \end{aligned}$$

Beachten wir nun die für die Koeffizienten c_ν^* geltenden Festsetzungen bei (14a), so kann man wie folgt schätzen

$$\begin{aligned} \left| G(t) - \sum_1^{n^2} c_\nu \right| \geqq 1 &+ (1-t) \sum_{n^2+1}^{n^4} t^\nu + \sum_{n^2+1}^{n^4} \frac{t^\nu}{\nu} + (1-t) \sum_{n+1}^{n^2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1-t^\nu}{1-t} - \nu t^\nu\right) \\ &- (1-t) \sum_{n^4+1}^{\infty} t^\nu - \sum_{n^4+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} - (1-t) \sum_1^n \frac{1}{\nu} \left(\frac{1-t^\nu}{1-t} - \nu t^\nu\right) , \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} \left| G(t) - \sum_1^{n^2} c_\nu \right| \geqq 1 &+ (1-t) \sum_{n^2+1}^{\infty} t^\nu + \sum_{n^2+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} + (1-t) \sum_1^{n^2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1-t^\nu}{1-t} - \nu t^\nu\right) \\ &- 2(1-t) \sum_{n^4+1}^{\infty} t^\nu - 2 \sum_{n^4+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} - 2(1-t) \sum_1^n \frac{1}{\nu} \left(\frac{1-t^\nu}{1-t} - \nu t^\nu\right) . \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir jetzt (42) und andererseits noch (38) sowie

$$(1-t) \sum_{n^4+1}^{\infty} t^\nu < t^{n^4} , \tag{45}$$

so ergibt sich

$$\left| G(t) - \sum_{1}^{n^2} c_\nu \right| >$$

$$1 - t + 2t^{n^2+1} + \sum_{1}^{n^2} \frac{1}{\nu} + \log(1-t) + 2 \sum_{n^2+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} - 2t^{n^4} - \frac{2}{n^4(1-t)} - 2n(1-t) .$$

Schließlich folgt

$$\left| G\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \sum_{1}^{n^2} c_\nu \right| > \frac{1}{n^2} + 2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2+1} +$$

$$+ C_{n^2} + 2D_{n^2} - 2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^4} - \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} ,$$

und mit nochmaliger Verwendung der Limesbeziehungen (28) und (29)

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \left| G\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \sum_{1}^{n^2} c_\nu \right| \geqq \tau ,$$

wo τ die Konstante (13) bezeichnet. Aus demselben Grund, wie er bereits im vorstehenden Beweis erörtert wurde, gilt erst recht

$$\limsup_{m \to \infty} \left| G\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \sum_{1}^{m} c_\nu \right| \geqq \tau .$$

Da nun im vorliegenden Fall, wie ein Vergleich von (7) und (44) erhellt

$$\alpha = \limsup_{n \to \infty} (n+1) \left| c_n^* \right| = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

ist, kommt wegen der Gültigkeit von (17) nur das Gleichheitszeichen in Betracht. Damit ist auch hier das Gewünschte gezeigt.

III.

Endlich wollen wir nachweisen, daß die beiden Limeswerte auf der linken Seite von (8) und (9) für die für uns in Betracht fallenden Verhältnisse mit denjenigen von (16) und (17) übereinstimmen.

Damit ist natürlich gezeigt, daß die beiden bestmöglichen Konstanten auf der rechten Seite von (8) und (9) mit denjenigen von (16) und (17) übereinstimmen.

Wir können uns nämlich auf den Fall beschränken, wo die Oberschranke (19), nämlich

$$\beta = \sup \frac{1}{n+1} \left| \sum_1^n \nu a_\nu \right| \tag{46}$$

endlich ist; andernfalls wären auch β^* (vgl. (18)) und α (vgl. (7)) sowie α^* (vgl. (6)) nicht endlich, so daß alle vier Aussagen (8), (9), (16), (17) in trivialer Weise richtig werden.

Wir beweisen die folgende Hilfsaussage: Es sei $0 \leqq \eta < \xi < 1$, dann gilt

$$|F(\xi) - F(\eta)| < \frac{2\beta}{1-\xi}(\xi - \eta) \ . \tag{47}$$

In der Tat: Es ist doch zunächst $(\eta < \varphi < \xi)$:

$$F(\xi) - F(\eta) = F'(\varphi)(\xi - \eta) \ .$$

Nun verifiziert man leicht, daß

$$F'(\varphi) = (1-\varphi) \sum_1^\infty \left(\sum_1^n \nu a_\nu \right) \varphi^{n-1}$$

gesetzt werden kann, so daß sich

$$|F'(\varphi)| \leqq \beta(1-\varphi) \sum_1^\infty (n+1)\varphi^{n-1}$$

$$|F'(\varphi)| \leqq \beta \frac{2-\varphi}{1-\varphi} \ ,$$

oder also

$$|F'(\varphi)| < \frac{2\beta}{1-\xi}$$

ergibt, womit die gewünschte Hilfsaussage (47) verifiziert ist.

Es sei nun weiter $e^{-1} \leqq t < 1$ und $\xi = t$, $\eta = 1 - \frac{1}{n(t)}$, wobei

$$n(t) = \left[-\frac{1}{\log t} \right]$$

bedeutet; hier bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist (Gaußsches Klammersymbol). Es ist demnach

$$-1 - \frac{1}{\log t} < n(t) \leqq -\frac{1}{\log t} \ ,$$

insbesondere also $n(t) \geqq 1$; da ferner $-\frac{1}{n(t)} \leqq \log t$ ist, wird $e^{-\frac{1}{n(t)}} \leqq t$, somit $1 - \frac{1}{n(t)} < t$ und also $0 \leqq \eta < \xi$ sein.

Nach der Hilfsaussage (47) hat man demnach

$$\left|F(t) - F\left(1 - \frac{1}{n(t)}\right)\right| < \frac{2\beta}{1-t}\left(t - 1 + \frac{1}{n(t)}\right) = 2\beta\left(-1 + \frac{1}{(1-t)\,n(t)}\right),$$

nun ist aber

$$-1 + t - \frac{1-t}{\log t} < (1-t)\,n(t) \leqq -\frac{1-t}{\log t},$$

und mit Rücksicht auf

$$-\frac{1-t}{\log t} = 1 + O(1-t)$$

schließt man auf die Limesrelation

$$\lim_{t \to 1-0} (1-t)\,n(t) = 1 .$$

Dies bedeutet nun, daß

$$\lim_{t \to 1-0} \left|F(t) - F\left(1 - \frac{1}{n(t)}\right)\right| = 0$$

sein wird. Daraus folgert man

$$\limsup_{t \to 1-0} \left|F(t) - \sum_{1}^{n(t)} a_\nu\right| = \limsup_{t \to 1-0} \left|F\left(1 - \frac{1}{n(t)}\right) - \sum_{1}^{n(t)} a_\nu\right| .$$

Da nun aber die ganzzahlige Funktion $n(t)$ für $e^{-1} \to t \to 1$ alle ganzen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ durchläuft, hat man offenbar

$$\limsup_{t \to 1-0} \left|F(t) - \sum_{n \leqq -1/\log t} a_n\right| = \limsup_{n \to \infty} \left|F\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{1}^{n} a_\nu\right| .$$

Damit ist die noch nachzuweisende Gleichheit aufgewiesen.

(Eingegangen den 2. April 1947).