Stützfunktion und Radius. I.

Autor(en): **Scherrer, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **20 (1947)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18067

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Stützfunktion und Radius. I.

Von W. Scherrer, Bern

§ 1. Einleitung

In einer Note über „*Integralsätze der Flächentheorie*“[1]) habe ich gezeigt, daß es für die Bildung von Randintegralen auf Raumflächen nötig ist, neben der Stützfunktion $P = -\mathfrak{N}\mathfrak{x}$ noch einen „*Stützvektor*“ $\mathfrak{P} = -[\mathfrak{N}, \mathfrak{x}]$ einzuführen.

Die weitere Analyse hat nun ergeben, daß es ganz allgemein vorteilhaft ist, neben dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$ und der Flächennormalen $\mathfrak{N}$ diesen Stützvektor $\mathfrak{P}$ systematisch heranzuziehen. Insbesondere empfiehlt es sich, aus den drei genannten Vektoren ein orthogonales und normiertes Dreibein zu bilden und hierauf die Raumfläche durch die infinitesimalen Variationen dieses Dreibeins zu erzeugen.

Die Durchführung dieses Ansatzes ergibt weiter, daß es notwendig ist, neben der Stützfunktion noch den „*radiusvektor*“ $r = \sqrt{\mathfrak{x}^2}$ als gleichwertigen Skalar mitzunehmen. Im Detail erweist es sich als zweckmäßig, die in der erwähnten Note gebrauchten Definitionen und Bezeichnungen leicht zu modifizieren. Ich werde daher die den vorliegenden Zwecken angepaßten Grundformeln der Raumflächentheorie in § 2 zusammenstellen.

Das Hauptergebnis der Untersuchung lautet: Die Integrabilitätsbedingungen sind in absolut invarianter Weise aus Beltramischen Operatoren der Stützfunktion und des Radius aufgebaut und lassen erkennen, daß eine Fläche durch Vorgabe *einer* Hauptform und des dazu passenden Krümmungsskalars bestimmt ist.

§ 2. Grundformeln

Die Parameterdarstellung des Ortsvektors, seine Länge — der Radiusvektor —, sowie dessen Quadrat seien gegeben durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \;;\quad r = \sqrt{\mathfrak{x}^2} \;;\quad R = r^2 \,. \tag{1}$$

---

[1]) Commentarii Mathematici Helvetici, Bd. 19, Heft 2, S. 105—114 (1946). Im folgenden zitiert mit [*J*].

Die Flächennormale, die Stützfunktion und deren Quadrat seien definiert durch

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{|[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]|} \; ; \quad p = -\mathfrak{N}\mathfrak{x} \; ; \quad P = p^2 \; . \tag{2}$$

Nun führen wir ein die „*Radialtangente*" $\mathfrak{T}$ und den normierten „*Stützvektor*" $\mathfrak{P}$ durch die Gleichungen

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{x} + p\mathfrak{N}}{\sqrt{r^2 - p^2}} \; ; \quad \mathfrak{P} = [\mathfrak{T}, \mathfrak{N}] = \frac{-[\mathfrak{N}, \mathfrak{x}]}{\sqrt{r^2 - p^2}} \; . \tag{3}$$

Wie man leicht nachprüft, bilden die Vektoren $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ ein rechtsgeschraubtes und orthogonales System von Einheitsvektoren. Dieses Dreibein soll also die Grundlage der weiteren Entwicklungen bilden. Die Abweichung gegenüber $[J]$ besteht darin, daß jetzt $\mathfrak{P}$ ein Einheitsvektor und $P = p^2$ das Quadrat der Stützfunktion ist.

Die beiden ersten Hauptformen der Flächentheorie definieren wir in der üblichen Weise, wobei wir nur in der Bezeichnung der Determinanten vom Usus abweichen.

$$\left.\begin{aligned} E = \mathfrak{x}_u^2 \; ; \quad F = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \; ; \quad G = \mathfrak{x}_v^2 \\ D = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]^2 = EG - F^2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$I = \dot{\mathfrak{x}}^2 \equiv E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 \tag{4a}$$

$$\left.\begin{aligned} L = -\mathfrak{N}_u \mathfrak{x}_u \; ; \quad M &= -\mathfrak{N}_u \mathfrak{x}_v \\ &= -\mathfrak{N}_v \mathfrak{x}_u \; ; \quad N = -\mathfrak{N}_v \mathfrak{x}_v \\ Q = [\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v]\,[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] &= LN - M^2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$II = -\dot{\mathfrak{N}}\dot{\mathfrak{x}} \equiv L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 \tag{5a}$$

Die totale (Gaußsche) und die mittlere Krümmung sind nun gegeben durch

$$K = \frac{Q}{D} \equiv \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \; ; \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2\,(EG - F^2)} \; . \tag{6}$$

Aus ihnen leitet sich die Größe

$$\frac{H}{K} \equiv \frac{EN - 2FM + GL}{2\,(LN - M^2)} \tag{7}$$

ab, die man wegen ihrer Zusammensetzung aus den Hauptkrümmungen als die (reziproke) „*harmonische Krümmung*" bezeichnen könnte.

Bekanntlich ist gerade im Zusammenhang mit der Stützfunktion die sogenannte dritte Hauptform von Interesse. Sie ist definiert durch die Formeln

$$\left.\begin{array}{c} e = \mathfrak{N}_u^2 \; ; \quad f = \mathfrak{N}_u \mathfrak{N}_v \; ; \quad g = \mathfrak{N}_v^2 \\ d = [\mathfrak{N}_u \, , \mathfrak{N}_v]^2 = eg - f^2 \end{array}\right\} \tag{8}$$

$$III = \dot{\mathfrak{N}}^2 \equiv e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 \, . \tag{8a}$$

In der Flächentheorie wird die Identität

$$III \equiv - K \cdot I + 2H \cdot II \, . \tag{9a}$$

bewiesen, was ausgeschrieben die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} e = - KE + 2HL \\ f = - KF + 2HM \\ g = - KG + 2HN \end{array}\right\} \tag{9}$$

ergibt.

Aus diesen Gleichungen erhält man nun in Verbindung mit (6) und (7) leicht die weiteren Beziehungen

$$\frac{Q}{d} \equiv \frac{LN - M^2}{eg - f^2} = \frac{1}{K} \; ; \quad \frac{eN - 2fM + gL}{2\,(eg - f^2)} = \frac{H}{K} \; ; \tag{10}$$

$$\frac{eN - 2fM + gL}{2\,(LN - M^2)} = H \; ; \tag{11}$$

$$\frac{d}{D} \equiv \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = K^2 \; ; \quad \frac{eG - 2fF + gE}{2\,(EG - F^2)} = 2H^2 - K \, . \tag{12}$$

Schließlich führen wir noch die zu den drei Hauptformeln gehörigen Beltramischen Operatoren ein. Ist

$$\dot{s}^2 \equiv g_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k \tag{13}$$

eine nicht ausgeartete quadratische Differentialform in den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit der Determinante g, und sind weiter

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots x_n) \; ; \quad \psi = \psi(x_1, \ldots x_n) \tag{14}$$

zwei invariante Skalare, so sind die Beltramischen Differentialoperatoren (Differentiatoren) erster und zweiter Ordnung bekanntlich definiert durch

$$\left.\begin{aligned}
\nabla(\varphi, \psi) &\equiv g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \\
\nabla(\varphi) &\equiv g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \\
\Delta(\varphi) &\equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Dabei bedeutet $\| g^{ik} \|$ die Inverse der Matrix $\| g_{ik} \|$ und über doppelt auftretende Indizes wird in der üblichen Weise summiert. Die Ausübung dieser Operationen in bezug auf die verschiedenen Grundformen wollen wir durch Beifügung der Zeiger I, II, III unterscheiden. Da wir diese Operatoren öfters gebrauchen werden, wollen wir sie explicite anschreiben:

$$\nabla_I(\varphi, \psi) \equiv \frac{(E\varphi_v - F\varphi_u)\psi_v - (F\varphi_v - G\varphi_u)\psi_u}{D}. \tag{16 a}$$

$$\Delta_I(\varphi) \equiv \frac{1}{\sqrt{D}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{\sqrt{D}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F\varphi_v - G\varphi_u}{\sqrt{D}}\right)\right\}. \tag{16 b}$$

$$\nabla_{II}(\varphi, \psi) \equiv \frac{(L\varphi_v - M\varphi_u)\psi_v - (M\varphi_v - N\varphi_u)\psi_u}{Q}. \tag{17 a}$$

$$\Delta_{II}(\varphi) \equiv \frac{1}{\sqrt{Q}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L\varphi_v - M\varphi_u}{\sqrt{Q}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M\varphi_v - N\varphi_u}{\sqrt{Q}}\right)\right\}. \tag{17 b}$$

$$\nabla_{III}(\varphi, \psi) \equiv \frac{(e\varphi_v - f\varphi_u)\psi_v - (f\varphi_v - g\varphi_u)\psi_u}{d} \tag{18 a}$$

$$\Delta_{III}(\varphi) \equiv \frac{1}{\sqrt{d}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e\varphi_v - f\varphi_u}{\sqrt{d}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f\varphi_v - g\varphi_u}{\sqrt{d}}\right)\right\}. \tag{18 b}$$

Da nach (15) gilt $\nabla(\varphi) \equiv \nabla(\varphi, \varphi)$, (19)

haben wir in (16) bis (18) den Operator $\nabla(\varphi)$ nicht notiert.

Beim Rechnen mit diesen Operatoren ist einmal zu beachten, daß $\nabla(\varphi, \psi)$ bilinear, $\nabla(\varphi)$ also quadratisch und $\Delta(\varphi)$ linear ist. Daneben ist es aber auch nützlich, sich die Wirkung dieser Operatoren auf Produkte, Quotienten, Quadrate und Wurzeln zu merken:

$$\left.\begin{aligned}
\nabla(\varphi, \psi\chi) &= \psi\nabla(\varphi, \chi) + \chi\nabla(\varphi, \psi)\\
\nabla(\varphi, \psi^2) &= 2\psi\nabla(\varphi, \psi)\\
\nabla\left(\varphi, \frac{1}{\psi}\right) &= -\frac{1}{\psi^2}\nabla(\varphi, \psi)\\
\nabla(\varphi, \sqrt{\psi}) &= \frac{1}{2\sqrt{\psi}}\nabla(\varphi, \psi)
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}
\nabla(\varphi\psi) &= \varphi^2\nabla(\psi) + 2\varphi\psi\nabla(\varphi, \psi) + \psi^2\nabla(\varphi)\\
\nabla(\varphi^2) &= 4\varphi^2\nabla(\varphi)\\
\nabla\left(\frac{1}{\psi}\right) &= \frac{1}{\psi^4}\nabla(\varphi)\\
\nabla(\sqrt{\varphi}) &= \frac{1}{4\varphi}\nabla(\varphi)
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta(\varphi\psi) &= \varphi\Delta(\psi) + 2\nabla(\varphi, \psi) + \psi\Delta(\varphi)\\
\Delta(\varphi^2) &= 2\varphi\Delta(\varphi) + 2\nabla(\varphi)\\
\Delta\left(\frac{1}{\psi}\right) &= -\frac{1}{\psi^2}\Delta(\psi) + \frac{2}{\psi^3}\nabla(\psi)\\
\Delta(\sqrt{\varphi}) &= \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\Delta(\varphi) - \frac{1}{4\varphi\sqrt{\varphi}}\nabla(\varphi)
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

§ 3. Hilfsformeln

Nach [J, (16)] gilt in unserer neuen Bezeichnung (4)

$$[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v] = K\sqrt{D}\,\mathfrak{N}\ ; \qquad [\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v]\,\mathfrak{N} = K\sqrt{D} \tag{23}$$

Aus [J, (42)] erhalten wir daher unter Beachtung der neuen Bezeichnung (2)

$$\mathfrak{x} = -p\mathfrak{N} + \frac{p_v[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}] - p_u[\mathfrak{N}_v, \mathfrak{N}]}{K\sqrt{D}} \tag{24}$$

Für den normierten Stützvektor (3) folgt somit

$$\mathfrak{P} = \frac{[\mathfrak{x}, \mathfrak{N}]}{\sqrt{R-P}} = \frac{[[p_v\mathfrak{N}_u - p_u\mathfrak{N}_v, \mathfrak{N}], \mathfrak{N}]}{K\sqrt{D(R-P)}}\ .$$

Die Vektorformel [J, (14)] liefert daher

$$\mathfrak{P} = \frac{-p_v \mathfrak{N}_u + p_u \mathfrak{N}_v}{\sqrt{KQ(R-P)}} = \frac{-p_v \mathfrak{N}_u + p_u \mathfrak{N}_v}{\sqrt{d(R-P)}} , \tag{25}$$

wobei also im Nenner gemäß (4), (5) oder (8) je nach Bedarf die passende Determinante eingeführt werden kann.

Eine zweite Darstellung des Stützvektors erhält man direkt auf Grund von (3), (2) und (1):

$$\mathfrak{P} = \frac{[\mathfrak{x}, \mathfrak{N}]}{\sqrt{R-P}} = \frac{[\mathfrak{x}, [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]]}{\sqrt{D(R-P)}} = -\frac{[[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v], \mathfrak{x}]}{\sqrt{D(R-P)}} ,$$

und wiederum folgt mit [J, (14)]

$$\mathfrak{P} = \frac{R_v \mathfrak{x}_u - R_u \mathfrak{x}_v}{2\sqrt{D(R-P)}} = \frac{\sqrt{K}\,(R_v \mathfrak{x}_u - R_u \mathfrak{x}_v)}{2\sqrt{Q(R-P)}} . \tag{26}$$

Nach den Formeln (25) und (26) bildet der Stützvektor gleichsam die Brücke zwischen Stützfunktion und Radius. Unter Beachtung der Definitionen (4), (5) und (8) für die Hauptformen folgt nun weiter

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}\mathfrak{x}_u &= \frac{E R_v - F R_u}{2\sqrt{D(R-P)}} = \frac{L p_v - M p_u}{\sqrt{KQ(R-P)}} \\ \mathfrak{P}\mathfrak{x}_v &= \frac{F R_v - G R_u}{2\sqrt{D(R-P)}} = \frac{M p_v - N p_u}{\sqrt{KQ(R-P)}} \end{aligned}\right\} \tag{27$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{P}\mathfrak{N}_u &= \frac{e p_v - f p_u}{\sqrt{d(R-P)}} = \frac{\sqrt{K}\,(L R_v - M R_u)}{2\sqrt{Q(R-P)}} \\ -\mathfrak{P}\mathfrak{N}_v &= \frac{f p_v - g p_u}{\sqrt{d(R-P)}} = \frac{\sqrt{K}\,(M R_v - N R_u)}{2\sqrt{Q(R-P)}} \end{aligned}\right\} \tag{27$_2$}$$

oder schließlich

$$\boxed{\begin{aligned} K(E R_v - F R_u) &= 2(L p_v - M p_u) \\ K(F R_v - G R_u) &= 2(M p_v - N p_u) \\ 2(e p_v - f p_u) &= K(L R_v - M R_u) \\ 2(f p_v - g p_u) &= K(M R_v - N R_u) \end{aligned}} \tag{28}$$

Die zuletzt gewonnenen Formeln gestatten ein Hinüberwechseln zwischen den verschiedenen Hauptformen. Aus ihnen ist übrigens ersichtlich, daß die zweite Hauptform eine Art Mittelstellung zwischen den beiden andern einnimmt.

Das uns jetzt zur Verfügung stehende Formelmaterial würde genügen, um die in Aussicht genommenen Integrabilitätsbedingungen in absolut invarianter Gestalt zu gewinnen. Um uns aber in allen Fällen vollkommene Freiheit in der Auswahl der Hauptform zu sichern, wollen wir die Tabelle (28) noch erweitern. Dies geschieht dadurch, daß wir (9) auf die linken Seiten von (28) anwenden. Wenn wir dabei noch überall gemäß (2) $\sqrt{P}$ an Stelle von p einführen, erhalten wir schließlich folgende *vollständige Tabelle:*

$$\boxed{\begin{aligned}
ER_v - FR_u &= \frac{1}{K\sqrt{P}}(LP_v - MP_u) \\
FR_v - GR_u &= \frac{1}{K\sqrt{P}}(MP_v - NP_u) \\
\\
EP_v - FP_u &= \frac{2H}{K}(LP_v - MP_u) - \sqrt{P}(LR_v - MR_u) \\
FP_v - GP_u &= \frac{2H}{K}(MP_v - NP_u) - \sqrt{P}(MR_v - NR_u) \\
\\
eR_v - fR_u &= -\frac{1}{\sqrt{P}}(LP_v - MP_u) + 2H(LR_v - MR_u) \\
fR_v - gR_u &= -\frac{1}{\sqrt{P}}(MP_v - NP_u) + 2H(MR_v - NR_u) \\
\\
eP_v - fP_u &= K\sqrt{P}(LR_v - MR_u) \\
fP_v - gP_u &= K\sqrt{P}(MR_v - NR_u)
\end{aligned}} \qquad (29)$$

Die Mittelstellung der zweiten Hauptform tritt wiederum in Erscheinung. Wir wollen daher auch alle weiteren Folgerungen um die zweite Hauptform als Kern gruppieren.

An erster Stelle ergeben sich nun leicht die Umrechnungsformeln für die Beltramischen Operatoren erster Ordnung über Radius und Stützfunktion:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\nabla_I(R) &= \frac{1}{\sqrt{P}}\nabla_{II}(R\,,P)\\
\nabla_I(R\,,P) &= \frac{1}{\sqrt{P}}\nabla_{II}(P)\\
&= 2H\nabla_{II}(R\,,P) - K\sqrt{P}\,\nabla_{II}(R)\\
\nabla_I(P) &= 2H\nabla_{II}(P) - K\sqrt{P}\,\nabla_{II}(R\,,P)\\
\nabla_{III}(R) &= -\frac{1}{K\sqrt{P}}\nabla_{II}(R\,,P) + \frac{2H}{K}\nabla_{II}(R)\\
\nabla_{III}(R\,,P) &= -\frac{1}{K\sqrt{P}}\nabla_{II}(P) + \frac{2H}{K}\nabla_{II}(R\,,P)\\
&= \sqrt{P}\,\nabla_{II}(R)\\
\nabla_{III}(P) &= \sqrt{P}\,\nabla_{II}(R\,,P)
\end{aligned}
}
\tag{30}
$$

Aus dieser Tabelle folgert man leicht, daß zwischen den drei Operatoren ein und derselben Hauptform eine lineare Relation besteht, und zwar handelt es sich immer um dieselbe Relation:

$$
\left.
\begin{aligned}
&KP\nabla_\alpha(R) - 2H\sqrt{P}\,\nabla_\alpha(R\,,P) + \nabla_\alpha(P) = 0\\
&(\alpha = I \text{ oder } II \text{ oder } III)
\end{aligned}
\right\}
\tag{31}
$$

Weiter empfiehlt es sich, die gemischten Operatoren erster Stufe über Radius und Stützfunktion einerseits und totaler und mittlerer Krümmung andererseits ineinander umzurechnen:

$$
\left.
\begin{aligned}
\nabla_I(R\,,K) &= \frac{1}{\sqrt{P}}\nabla_{II}(P\,,K)\\
\nabla_I(P\,,K) &= 2H\nabla_{II}(P\,,K) - K\sqrt{P}\,\nabla_{II}(R\,,K)\\
\nabla_I(R\,,H) &= \frac{1}{\sqrt{P}}\nabla_{II}(P\,,H)\\
\nabla_I(P\,,H) &= 2H\nabla_{II}(P\,,H) - K\sqrt{P}\,\nabla_{II}(R\,,H)\\
\nabla_{III}(R\,,K) &= -\frac{1}{K\sqrt{P}}\nabla_{II}(P\,,K) + \frac{2H}{K}\nabla_{II}(R\,,K)\\
\nabla_{III}(P\,,K) &= \sqrt{P}\,\nabla_{II}(R\,,K)\\
\nabla_{III}(R\,,H) &= -\frac{1}{K\sqrt{P}}\nabla_{II}(P\,,H) + \frac{2H}{K}\nabla_{II}(R\,,H)\\
\nabla_{III}(P\,,H) &= \sqrt{P}\,\nabla_{II}(R\,,H)
\end{aligned}
\right\}
\tag{32}
$$

Um nun auch noch die Umrechnungsformeln für die Operatoren zweiter Ordnung zu gewinnen, muß man die Relationen (29) in die Definitionen (16b) und (18b) einführen. Zur Durchführung der Rechnung benötigt man die Beziehungen (20) bis (22). Die Endergebnisse stellen wir zusammen in folgender Tabelle:

$$
\begin{aligned}
\Delta_I(R) &= \frac{1}{\sqrt{P}}\,\Delta_{II}(P) - \frac{1}{2K\sqrt{P}}\,\nabla_{II}(P, K) - \frac{1}{2P\sqrt{P}}\,\nabla_{II}(P) \\
\Delta_I(P) &= 2H\Delta_{II}(P) - \frac{H}{K}\,\nabla_{II}(P, K) + 2\nabla_{II}(P, H) \\
&\quad - K\sqrt{P}\,\Delta_{II}(R) - \frac{\sqrt{P}}{2}\,\nabla_{II}(R, K) - \frac{K}{2\sqrt{P}}\,\nabla_{II}(R, P) \\
\Delta_{III}(R) &= -\frac{1}{K\sqrt{P}}\,\Delta_{II}(P) + \frac{1}{2K^2\sqrt{P}}\,\nabla_{II}(P, K) + \frac{1}{2KP\sqrt{P}}\,\nabla_{II}(P) \\
&\quad + \frac{2H}{K}\,\Delta_{II}(R) - \frac{H}{K^2}\,\nabla_{II}(R, K) + \frac{2}{K}\,\nabla_{II}(R, H) \\
\Delta_{III}(P) &= \sqrt{P}\,\Delta_{II}(R) + \frac{\sqrt{P}}{2K}\,\nabla_{II}(R, K) + \frac{1}{2\sqrt{P}}\,\nabla_{II}(R, P)
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Schließlich fügen wir noch die Relation

$$\nabla_I(R) = 4(R - P) \tag{34}$$

hinzu. Sie ergibt sich, wenn man die aus (2) folgende Gleichung

$$\mathfrak{x}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] = -\,|\,[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\,|\,\sqrt{P}$$

quadriert und kann im Bedarfsfalle in die Relationen (30) eingeführt werden.

§ 4. Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen

Wir bilden jetzt die Ableitungsgleichungen, indem wir die ersten Ableitungen des Dreibeins $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ aus den Vektoren dieses Dreibeins kombinieren.

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{T}_u &= \qquad\qquad A_{12}\mathfrak{N} + A_{13}\mathfrak{P} \\
\mathfrak{T}_v &= \qquad\qquad B_{12}\mathfrak{N} + B_{13}\mathfrak{P} \\
\mathfrak{N}_u &= A_{21}\mathfrak{T} \qquad\quad + A_{23}\mathfrak{P} \\
\mathfrak{N}_v &= B_{21}\mathfrak{T} \qquad\quad + B_{23}\mathfrak{P} \\
\mathfrak{P}_u &= A_{31}\mathfrak{T} + A_{32}\mathfrak{N} \\
\mathfrak{P}_v &= B_{31}\mathfrak{T} + B_{32}\mathfrak{N}
\end{aligned}
\right\} \tag{35}
$$

Die A_{ik} und B_{ik} bilden offenbar infinitesimale Drehmatrizen. Ihre Komponenten ergeben sich, wenn man die Gleichungen (35) sukzessive mit den Dreibeinvektoren $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ skalar multipliziert. Die Rechenarbeit besteht in der Ermittlung der Skalarprodukte auf der linken Seite von (35). Ausschlaggebend sind dabei die Definitionen (1), (2), (3) in Verbindung mit den Gleichungen (27_1) und (27_2). Die Rechnung liefert folgende Werte:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
A_{23} &= -\frac{\sqrt{K}\,(LR_v - MR_u)}{2\sqrt{Q\,(R-P)}} &&= -A_{32} \\
B_{23} &= -\frac{\sqrt{K}\,(MR_v - NR_u)}{2\sqrt{Q\,(R-P)}} &&= -B_{32} \\
A_{31} &= \frac{KP\,(LR_v - MR_u) - (LP_v - MP_u)}{2\sqrt{QKP}\,(R-P)} &&= -A_{13} \\
B_{31} &= \frac{KP\,(MR_v - NR_u) - (MP_v - NP_u)}{2\sqrt{QKP}\,(R-P)} &&= -B_{13} \\
A_{12} &= \frac{P_u}{2\sqrt{P\,(R-P)}} &&= -A_{21} \\
B_{12} &= \frac{P_v}{2\sqrt{P\,(R-P)}} &&= -B_{21}
\end{aligned}
} \tag{36}
$$

Die Integrabilitätsbedingungen der totalen Systeme (35) lauten

$$\frac{\partial A_{23}}{\partial v} - \frac{\partial B_{23}}{\partial u} + A_{12}B_{31} - B_{12}A_{31} = 0 \ , \tag{37$_1$}$$

$$\frac{\partial A_{31}}{\partial v} - \frac{\partial B_{31}}{\partial u} + A_{23}B_{12} - B_{23}A_{12} = 0 \ , \tag{37$_2$}$$

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial v} - \frac{\partial B_{12}}{\partial u} + A_{31}B_{23} - B_{31}A_{23} = 0 \ . \tag{37$_3$}$$

Bei der Auswertung auf Grund der Tabelle (36) benötigt man die Formeln (17), (20), (21) und (22). Dabei zeigt sich, daß die Gleichung (37_3) identisch erfüllt ist. Die Gleichungen (37_1) und (37_2) aber liefern schließlich das System

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_{II}(R) + \frac{1}{2K}\nabla_{II}(R,K) &= \frac{1}{2(R-P)}\nabla_{II}(R) - \frac{1}{R-P}\nabla_{II}(R,P) + \frac{1}{2KP(R-P)}\nabla_{II}(P) \\ \Delta_{II}(P) - \frac{1}{2K}\nabla_{II}(P,K) &= \frac{-KP}{2(R-P)}\nabla_{II}(R) + \frac{1}{R-P}\nabla_{II}(R,P) - \frac{2P-R}{2P(R-P)}\nabla_{II}(P) \end{aligned}} \tag{38}$$

Diesen Gleichungen fügen wir noch hinzu die aus (34) und der ersten Gleichung von (30) folgende Relation

$$\nabla_{II}(R\,,P) = 4\sqrt{P}\,(R - P) \ . \tag{39}$$

Man stellt leicht fest, daß die Gleichungen (38) nur vom *Verhältnis* der Koeffizienten der zweiten Hauptform, nämlich den Größen

$$\frac{L}{\sqrt{Q}}\,,\ \frac{M}{\sqrt{Q}}\,,\ \frac{N}{\sqrt{Q}}\ ; \qquad (Q = LN - M^2)\ , \tag{40}$$

abhängen.

Von dem geschilderten Standpunkte aus vollzieht sich nun die natürliche Bestimmung einer Fläche folgendermaßen:

1. Man gibt die Verhältnisse der Koeffizienten der zweiten Hauptform — die Größen (40) — und die Gaußsche Krümmung K als Funktionen der Parameter vor.

2. Man bestimmt hierauf nach Vorgabe eines nicht-asymptotischen Streifens auf Grund von (38) die Funktionen $R(u, v)$ und $P(u, v)$. Aus (39) ergibt sich dann $\sqrt{Q}$ und somit kennt man die absoluten Koeffizienten der zweiten Hauptform.

3. Auf Grund der gewonnenen Größen kennt man jetzt die Koeffizienten (36) des totalen Systems (35). Seine Integration liefert dann das Dreibein $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ und aus (3) erhält man schließlich den Ortsvektor $\mathfrak{x}$.

Wir fassen diese Ergebnisse kurz zusammen in

Satz 1. *Eine Fläche ist durch die zweite Hauptform und die Gaußsche Krümmung nach Vorgabe eines nichtasymptotischen Streifens eindeutig bestimmt.*

Durch die Wahl ausgezeichneter Parameter können die Gleichungen (38) in besonders einfache Gestalt gebracht werden. Die reellen Fallunterscheidungen richten sich in bekannter Weise nach dem Vorzeichen der Gaußschen Krümmung.

a) *Hyperbolischer Fall:* $\underline{K<0}$.

Man wählt „Asymptotenparameter":

$$L = N = 0 \;; \quad \sqrt{Q} = i M \tag{40a}$$

Die Gleichungen (38) und (39) verwandeln sich in

$$\left.\begin{aligned} 2R_{uv} + \frac{R_v K_u + R_u K_v}{2K} &= \frac{R_u R_v}{R-P} - \frac{R_u P_v + R_v P_u}{R-P} + \frac{P_u P_v}{KP(R-P)} \\ 2P_{uv} - \frac{P_v K_u + P_u K_v}{2K} &= -\frac{KPR_u R_v}{R-P} + \frac{R_u P_v + R_v P_u}{R-P} - \frac{(2P-R)P_u P_v}{P(R-P)} \end{aligned}\right\} \tag{38a}$$

$$M = \frac{R_u P_v + R_v P_u}{4(R-P)\sqrt{P}} \,. \tag{39a}$$

b) *Elliptischer Fall:* $\underline{K>0}$.

Man wählt isotherme Parameter:

$$L = N \;; \quad M = 0 \;; \quad \sqrt{Q} = L \tag{40b}$$

Die Gleichungen (38) und (39) verwandeln sich in

$$\left.\begin{aligned} R_{uu} + R_{vv} + \frac{R_u K_u + R_v K_v}{2K} &= \frac{R_u^2 + R_v^2}{2(R-P)} - \frac{R_u P_u + R_v P_v}{R-P} + \frac{P_u^2 + P_v^2}{2KP(R-P)} \\ P_{uu} + P_{vv} - \frac{P_u K_u + P_v K_v}{2K} &= -\frac{KP(R_u^2 + R_v^2)}{2(R-P)} + \frac{R_u P_u + R_v P_v}{R-P} - \frac{(2P-R)(P_u^2 + P_v^2)}{2P(R-P)} \end{aligned}\right\} \tag{38b}$$

$$L = \frac{R_u P_u + R_v P_v}{4(R-P)\sqrt{P}} \tag{39b}$$

c) *Parabolischer Fall:* $\underline{K = 0}$.

Wegen $Q \equiv LN - M^2 = 0$ liegt Entartung vor und es folgt

$$II = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 = \frac{(L\dot{u} + M\dot{v})^2}{L}$$

Man kann daher die Parameter so wählen, daß gilt

$$M = N = 0 \tag{40c}$$

Die Gleichungen (38) versagen. Man greift auf (28) zurück und erhält

$$p_v = 0 \tag{39c}$$

womit die Fläche als Torse charakterisiert ist.

Die vorliegenden Ergebnisse zeigen deutlich, daß die Stützfunktion und der Radius zusammen eine organische Einheit bilden.

Analoge Verhältnisse bestehen auch bei den andern Hauptformen. Die den Gleichungen (38) entsprechenden Relationen erhält man, wenn man in den Gleichungen (33) die Operatoren $\triangle_{II}(R)$ und $\triangle_{II}(P)$ vermittels (38) eliminiert und hernach die rechts auftretenden Operatoren erster Ordnung mit Hilfe von (30) und (32) auf die gewünschte Hauptform zurückführt.

Im Falle der ersten Hauptform erhält man so an Stelle von (38) folgendes System:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_I(R) &= \frac{1-H\sqrt{P}}{R-P}\nabla_I(R) \\ \Delta_I(P) - 2\sqrt{P}\nabla_I(P,H) &= \frac{H\sqrt{P}-2H^2P}{R-P}\nabla_I(R) + \frac{2H\sqrt{P}}{R-P}\nabla_I(R,P) - \frac{3P-R}{2P(R-P)}\nabla_I(P) \end{aligned}} \tag{41}$$

Wiederum ist es bemerkenswert, daß auch dieses System nur einen Krümmungsskalar — die mittlere Krümmung H — enthält. Ganz analog wie oben tritt nun als Ergänzung die Gleichung (34) hinzu

$$\nabla_I(R) = 4(R - P) \quad , \tag{42}$$

und man schließt entsprechend auf

Satz 2. *Eine Fläche ist durch die erste Hauptform und die mittlere Krümmung nach Vorgabe eines beliebigen Streifens eindeutig bestimmt.*

Zur Vereinfachung eignen sich isotherme Parameter:

$$E = G \quad ; \quad F = 0 \quad ; \quad \sqrt{D} = E \tag{43}$$

Man erhält

$$\left.\begin{aligned} R_{uu}+R_{vv} &= \frac{1-H\sqrt{P}}{R-P}(R_u^2+R_v^2) \\ P_{uu}+P_{vv}-2\sqrt{P}(R_uH_u+R_vH_v) &= \frac{H\sqrt{P}-2H^2P}{R-P}(R_u^2+R_v^2) \\ &\quad +\frac{2H\sqrt{P}}{R-P}(R_uP_u+R_vP_v)-\frac{3P-R}{2P(R-P)}(P_u^2+P_v^2) \end{aligned}\right\} \tag{41a}$$

Führt man schließlich dasselbe Verfahren für die dritte Hauptform durch, so gelangt man vorerst zu folgendem System:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{III}(R)-\frac{2}{\sqrt{P}}\left[\frac{1}{K}\nabla_{III}(P,H)-\frac{H}{K^2}\nabla_{III}(P,K)\right] &= \left[2\left(\frac{H}{K}\right)^2-\sqrt{P}\frac{H}{K}-\frac{1}{K}\right]\frac{\nabla_{III}(P)}{P(R-P)} \\ \Delta_{III}(P) &= \left[\sqrt{P}\frac{H}{K}-\frac{3P-R}{2}\right]\frac{\nabla_{III}(P)}{P(R-P)} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Hier treten also beide Krümmungsskalare in Erscheinung. Es ist jedoch möglich, das System so umzuformen, daß als einziger Krümmungsskalar $\frac{H}{K}$ auftritt. Entsprechend den Relationen (20) gilt nämlich

$$\frac{1}{K}\nabla_{III}(P\,,H) - \frac{H}{K^2}\nabla_{III}(P\,,K) = \nabla_{III}\left(P\,,\frac{H}{K}\right) \quad ,$$

und aus der dritten Zeile von (31) folgt

$$\frac{1}{K}\nabla_{III}(P) = 2\sqrt{P}\,\frac{H}{K}\nabla_{III}(R\,,P) - P\nabla_{III}(R) \quad .$$

Führt man diese Beziehungen in die erste der Gleichungen (44) ein und bezeichnet man die (reziproke) harmonische Krümmung kurz mit h,

$$h = \frac{H}{K} \tag{45}$$

so verwandelt sich (44) in

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_{III}(R) - \frac{2}{\sqrt{P}}\nabla_{III}(P,h) &= \frac{2h^2 - \sqrt{P}\,h}{P(R-P)}\nabla_{III}(P) - \frac{2h}{\sqrt{P}(R-P)}\nabla_{III}(R,P) + \frac{1}{R-P}\nabla_{III}(R) \\ \Delta_{III}(P) &= \frac{2\sqrt{P}\,h + R - 3P}{2P(R-P)}\nabla_{III}(P) \end{aligned}} \tag{46}$$

Auch dieses System ergänzen wir noch durch die Gleichung

$$\nabla_{III}(P) = 4P(R - P) \ . \tag{47}$$

Sie ergibt sich, wenn wir (39) in die letzte der Relationen (30) einsetzen. Nun argumentiert man wie im Anschluß an (38) und erhält

Satz 3. *Eine Fläche ist durch die dritte Hauptform und die harmonische Krümmung* $\frac{K}{H} = \frac{1}{h}$ *nach Vorgabe eines Streifens eindeutig bestimmt.*

Bei der dritten Hauptform eignet sich oft die Spezialisierung auf Polarkoordinaten. Doch zeigt sich im vorliegenden Falle keine besondere Symmetrie, weshalb wir auf die Wiedergabe der zugehörigen Formeln verzichten.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die zweite Gleichung von (46) äquivalent ist mit einer bekannten Formel von Weingarten. Rechnet man nämlich auf $p = \sqrt{P}$ und $r = \sqrt{R}$ um, so erhält man

$$2h = 2\frac{H}{K} = 2p + \Delta_{III}(p) \ . \tag{49}$$

Ein Seitenstück dazu ergibt sich in analoger Weise aus der ersten Gleichung von (41), nämlich

$$2H = \frac{1}{p} + \frac{p}{r^2} - \frac{r}{p}\Delta_I(r) \ . \tag{50}$$

Bei diesen Umwandlungen mußten natürlich die Gleichungen (47) und (42) herangezogen werden. Im zweiten Fall ist übrigens die direkt mit Hilfe von (42) aus der ersten Gleichung von (41) erhältliche Gleichung

$$pH = 1 - \frac{1}{4} \Delta_I (r^2) \tag{50'}$$

einfacher.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß man bei der Bezugnahme auf die erste oder dritte Hauptform natürlich auch die Ableitungsgleichungen (35), (36) im Gebrauchsfalle umzuwandeln hat. Es ist aber nicht nötig, die Umwandlungsergebnisse explicite zu notieren, da ja alle erforderlichen Formeln, insbesondere die Tabelle (29), zur Verfügung stehen.

(Eingegangen den 18. April 1947.)