Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 20 (1947)

Artikel: Das Verhalten der laplace-Transformierten in ihrer Beschränktheitshalbebene.

Autor: Doetsch, Gustav

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18048

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Das Verhalten der Laplace-Transformierten in ihrer Beschränktheitshalbebene

Von Gustav Doetsch, Freiburg i. B.

1. Die Beschränktheitsordnung der Laplace-Transformierten

Die durch die Laplace-Transformation aus einer Funktion $F(t)$ erzeugte Funktion

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}\{F\}$$

ist in der Konvergenzhalbebene $\Re s > \beta$ analytisch, kann aber diese Eigenschaft in einer darüber hinausreichenden Halbebene $\Re s > \eta$ $(\eta < \beta)$ haben[1]). Wir betrachten $f(s)$ grundsätzlich in dieser „Holomorphiehalbebene" und interessieren uns in der gegenwärtigen Note für den Fall, daß $f(s)$ in einer Teilhalbebene $\Re s \geqq \sigma (\sigma > \eta)$ beschränkt ist[2]). Als „Beschränktheitsabszisse" μ von $f(s)$ definieren wir die untere Grenze aller σ, für die

$$|f(s)| \leqq M = M(\sigma) \qquad \text{für } \Re s \geqq \sigma$$

ist. $\Re s > \mu$ heißt die „Beschränktheitshalbebene" von $f(s)$. Natürlich braucht $f(s)$ in dieser Halbebene selbst nicht beschränkt zu sein.

---

[1]) In meinem Buch „Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation", Berlin 1937, das in der Folge immer kurz als „L. Tr." zitiert wird, war darauf hingewiesen worden (S. 405, Historische Anmerkung 19), daß bis dahin in der Literatur kein Beispiel für dieses Vorkommnis vorliege. Inzwischen sind mehrere Laplace-Transformierte angegeben worden, die ein solches Verhalten zeigen. Ein besonders einfaches Beispiel wird durch

$$F(t) \equiv -\pi e^t \sin \pi e^t = \frac{d \cos \pi e^t}{dt}$$

geliefert. Hier ist $\beta = 0$, während zweimalige partielle Integration auf die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-st} (-\pi e^t \sin \pi e^t)\, dt = 1 - \frac{s(s+1)}{\pi^2} \int_0^\infty e^{-(s+2)t} (-\pi e^t \sin \pi e^t)\, dt \ ,$$

$$\text{d. h.} \quad f(s) = 1 - \frac{s(s+1)}{\pi^2} f(s+2)$$

führt, die zeigt, daß $f(s)$ in die ganze Ebene fortgesetzt werden kann. Dieses Beispiel wurde mir am 29. September 1943 von D. Grohne brieflich mitgeteilt.

[2]) Ob es Laplace-Transformierte gibt, die in keiner Halbebene beschränkt sind, scheint nicht bekannt zu sein.

Grundlegend für die Frage nach der Existenz einer Beschränktheitshalbebene ist der

Satz A [3]. *Ist σ ein reeller Punkt im Innern der Holomorphiehalbebene und ist*

a) $|f(s)| \leqq M$ auf $x = \sigma$, b) $f(s) = O(e^{|y|^k})$ für $|y| \to \infty$

gleichmäßig für $x > \sigma$, wo $s = x + iy$ und k eine feste, aber beliebig große Zahl ist, so gilt in der ganzen Halbebene $x \geqq \sigma$: $|f(s)| \leqq M$.

Da für $x \geqq \beta + \varepsilon > \beta$ gleichmäßig $f(s) = o(|y|)$ ist [4], so ergibt sich: Liegt σ in der Konvergenzhalbebene, so genügt es, daß $|f(s)| \leqq M$ auf der Geraden $x = \sigma$ ist, damit $|f(s)| \leqq M$ auch für $x \geqq \sigma$ gilt.

Ob die Beschränktheitshalbebene über die Konvergenzhalbebene hinausreichen kann, ist nicht bekannt [5].

Für $x > \mu$ ist die Funktion

$$M(x) = \text{obere Grenze von } |f(s)| \text{ auf } \Re s = x$$

definiert. Diese hat die beiden Eigenschaften:

I. *$M(x)$ nimmt monoton ab: $M(x_1) \geqq M(x_2)$ für $x_1 < x_2$* [6].

II. $\log M(x)$ — und infolgedessen auch $M(x)$ — *ist eine konvexe* [7] *Funktion* [8].

I folgt aus Satz A, II aus dem „Dreigeradensatz".

Die einfachste Funktion, die monoton abnimmt und deren Logarithmus konvex ist, ist $e^{-\alpha x}$ $(\alpha > 0)$. Es liegt nahe, $M(x)$ mit dieser Funktion zu vergleichen, m. a. W. den Quotienten $\dfrac{\log M(x)}{x}$ ins Auge zu fassen. Wir behaupten:

---

[3]) L.Tr. Satz 1 [4.4], S. 57.

[4]) L.Tr. Satz 5 [4.3], S. 52.

[5]) Beweisen konnte ich folgende, bisher nicht veröffentlichte Sätze: 1) Ist $\mathfrak{L}\{F\}$ in einer Halbebene $x > \sigma_0$ konvergent und ist für ein gewisses $\sigma_1 < \sigma_0$ in jedem Streifen $\sigma_1 + \varepsilon \leqq x \leqq \sigma_0 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ $f(s)$ analytisch und von negativer Ordnung, d. h. gleichmäßig $f(s) = O(|y|^{-\alpha})$ für $|y| \to \infty$ mit $\alpha > 0$, so konvergiert $\mathfrak{L}\{F\}$ für $x > \sigma_1$. 2) In der Beschränktheitshalbebene konvergieren die (C, k)-Mittel beliebig kleiner positiver Ordnung von $\mathfrak{L}\{F\}$. Zu letzteren vgl. *G. Doetsch:* Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation, Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa (2) 4 (1935) S. 71—84.

[6]) Aus II folgt, daß entweder dauernd das Gleichheitszeichen gilt, d. h. $M(x) = \text{const.}$ ist, oder dauernd das Ungleichheitszeichen: $M(x_1) > M(x_2)$ (Monotonie im engeren Sinn). Ob der erstere Fall für eine Konstante > 0 vorkommen kann, ist fraglich.

[7]) Das bedeutet: Auf der Kurve $y = \log M(x)$ liegt für je drei Abszissen $x_1 < x_2 < x_3$ der Punkt x_2, y_2 unterhalb oder auf der Verbindungsgeraden der Punkte x_1, y_1 und x_3, y_3.

[8]) L.Tr. Satz 3 [4.4], S. 58.

Satz 1. (I. Hauptsatz). *Für jede Laplace-Transformierte* $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$, *die eine Beschränktheitshalbebene besitzt, existiert* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log M(x)}{x}$. *Diese Zahl ist stets* $\leqq 0$ [9]:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log M(x)}{x} = -v \leqq 0 \ .$$

Wir nennen v $(\geqq 0)$ die *Beschränktheitsordnung* von $f(s)$.

Beweis: Daß $v \geqq 0$ ist, ist klar, denn als positive, monoton abnehmende Funktion muß $M(x)$ gegen 0 oder eine Zahl $m > 0$ konvergieren. Im letzteren Fall[10]) ist offenbar $v = 0$. Ist aber $M(x) \to 0$, so ist von einer Stelle an $\log M(x) < 0$, also $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log M(x)}{x}$, wenn vorhanden, $\leqq 0$. — Wir setzen:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\log M(x)}{x} = -v \ , \qquad \liminf_{x\to\infty} \frac{\log M(x)}{x} = -w \ .$$

Beide Größen können endlich oder gleich $-\infty$ sein, und es ist $-v \geqq -w$.

a) w sei endlich. Dann gibt es nach der Definition von lim inf zu gegebenem $\delta > 0$ unendlich viele Zahlen $x_1 < x_2 < \cdots \to \infty$ so, daß

$$\frac{\log M(x_n)}{x_n} < -w + \delta \ , \qquad \text{also} \qquad \log M(x_n) < (-w + \delta)\, x_n \ .$$

ist. In einem xy-System liegen mithin die Punkte x_n, $\log M(x_n)$ unterhalb der Geraden $y = (-w + \delta)x$. Dann liegen aber wegen der Eigenschaft II die Punkte x, $\log M(x)$ an den Zwischenstellen erst recht darunter, d. h. für $x \geqq x_1$ ist dauernd $\frac{\log M(x)}{x} < -w + \delta$. Daher muß $-v = \limsup \frac{\log M(x)}{x} \leqq -w + \delta$ und, da δ beliebig klein ist, $-v \leqq -w$ sein. Zusammen mit $-v \geqq -w$ führt das zu $-v = -w$, d. h. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log M(x)}{x}$ existiert.

---

[9]) Dieser Satz gilt allgemein für jede analytische Funktion, die in einer Halbebene beschränkt ist und für die $M(x)$ monoton abnimmt.

[10]) Ob dieser Fall tatsächlich eintreten kann, ist nicht bekannt. Wenn $\mathfrak{L}\{F\}$ eine Halbebene absoluter oder auch nur gleichmäßiger Konvergenz besitzt, so ist jedenfalls $M(x) \to 0$, siehe L.Tr. Satz 6 [10.1], S. 197.

b) Es sei $-w = -\infty$. Dann kann im vorigen Beweis $-w + \delta$ durch jede Zahl $-K$ mit beliebig großem K ersetzt werden, und es folgt: $-v \leqq -K$, d. h. $-v = -\infty = -w$.

Wir betrachten nun die Werte von $f(s)$ für reelle $s = x$. Es ist $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$ [11]), aber $|f(x)|$ braucht nicht monoton gegen 0 zu streben: es gibt Laplace-Transformierte, die auf der reellen Achse reell sind und unendlich viele Zeichenwechsel haben, wie das Beispiel

$$F(t) = (\pi t)^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2t} \ , \qquad f(s) = s^{-\frac{1}{2}} e^{-s^{\frac{1}{2}}} \cos s^{\frac{1}{2}}$$

zeigt. Es ist auch keineswegs notwendig $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log |f(x)|}{x}$ vorhanden, denn in diesem Beispiel ist

$$\lim_{x \to \infty} \sup \frac{\log |f(x)|}{x} = 0 \ , \qquad \lim_{x \to \infty} \inf \frac{\log |f(x)|}{x} = -\infty \ ,$$

weil $\log |f(x)| = -\infty$ in den sich gegen ∞ häufenden Nullstellen von $f(x)$ ist. Es gilt jedoch

Satz 2. *Wenn $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ eine Beschränktheitshalbebene besitzt, so hängt die Beschränktheitsordnung v mit den Werten von $f(s)$ für reelle $s = x$ folgendermaßen zusammen:*

$$-v = \lim_{x \to \infty} \sup \frac{\log |f(x)|}{x} \ .$$

Bemerkungen: 1. Man kann also die Beschränktheitsordnung, wenn die Beschränktheit von $f(s)$ bekannt ist, schon allein aus den Werten von $f(s)$ für reelle x errechnen, was eine bedeutende Erleichterung darstellt, da $M(x)$ meist schwer festzustellen ist.

2. Die Größe $-V = \lim\limits_{x \to \infty} \sup \dfrac{\log |f(x)|}{x}$ existiert auch für solche $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$, die keine Beschränktheitshalbebene besitzen, und ist $\leqq 0$.

Beweis: a) V sei endlich. Ist $\delta > 0$ gegeben, so ist nach der Definition von $-V$ für alle hinreichend großen x

$$\frac{\log |f(x)|}{x} < -V + \frac{\delta}{2} \ .$$

---

[11]) L.Tr. Satz 1 [4.3], S. 49.

Deshalb und wegen der Existenz einer Beschränktheitshalbebene für $f(s)$ kann man x_0 so wählen, daß zugleich

$$|f(x)| < e^{\left(-V+\frac{\delta}{2}\right)x} \quad \text{für} \quad x \geqq x_0 \quad \text{und} \quad |f(s)| \leqq M \quad \text{für} \quad x \geqq x_0$$

ist. In der Viertelebene $x \geqq x_0$, $y \geqq 0$ betrachten wir die Funktion

$$g(s) = e^{-\left(-V+\frac{\delta}{2}\right)s} f(s) \; .$$

Auf den Rändern ist sie beschränkt, in dem Winkelraum dazwischen von der Öffnung $\frac{\pi}{2}$ ist

$$|g(s)| \leqq M e^{-\left(-V+\frac{\delta}{2}\right)x} \leqq \left\{ \begin{array}{ll} M e^{-\left(-V+\frac{\delta}{2}\right)|s|} & \text{für } -V+\frac{\delta}{2} < 0 \\ \text{const.} & \text{für } -V+\frac{\delta}{2} \geqq 0 \end{array} \right\} = O\left(e^{\varepsilon|s|^2}\right) \text{ für } |s| \to \infty$$

für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$, also nach einem bekannten Satz von Phragmén und Lindelöf[12]) durchweg $|g(s)| \leqq$ const., d. h.

$$|f(s)| \leqq \text{const. } e^{\left(-V+\frac{\delta}{2}\right)x} \leqq e^{(-V+\delta)x}$$

für alle hinreichend großen x. Dasselbe gilt in der Viertelebene $x \geqq x_0$, $y \leqq 0$, also in der ganzen Halbebene $x \geqq x_0$, woraus

$$M(x) \leqq e^{(-V+\delta)x} \quad \text{und} \quad -v = \lim_{x \to \infty} \frac{\log M(x)}{x} \leqq -V + \delta$$

folgt, oder, da δ beliebig klein ist, $-v \leqq -V$. Nun ist aber $|f(x)| \leqq M(x)$, also $-V \leqq -v$, so daß nur $-V = -v$ sein kann.

b) V sei gleich ∞. Dann ist in dem Beweis $-V + \frac{\delta}{2}$ durch $-K$ zu ersetzen, wo K beliebig groß sein kann, und es folgt $-v \leqq -K$, also $-v = -\infty = -V$.

---

[12]) Siehe L. Tr. S. 56, Lemma 1.

2. Der Zusammenhang zwischen der Beschränktheitsordnung von $f(s)$ und dem Verhalten von $F(t)$ in der Umgebung von $t = 0$

Bekanntlich hängen ganz allgemein die Eigenschaften von $f(s)$ in der Umgebung der Stelle $s = \infty$ von denen der Funktion $F(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ ab. Die folgenden Sätze zeigen, daß das auch für die Beschränktheitsordnung gilt.

Satz 3. *Wenn $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ eine Beschränktheitshalbebene besitzt und $F(t)$ in $0<t<a$ eine Nullfunktion ist, d. h. $\int_0^t F(\tau)d\tau \equiv 0$ für $0<t<a$, so ist $v \geqq a$.*

Beweis: Ist $x_0 > 0$ ein reeller Konvergenzpunkt von $\mathfrak{L}\{F\}$, so ist für $\Re s > x_0$ [13])

$$f(s) = s\int_0^\infty e^{-st}\,dt \int_0^t F(\tau)d\tau = s\int_a^\infty e^{-st}\,dt \int_a^t F(\tau)d\tau$$

und

$$\int_a^t F(\tau)\,d\tau = o(e^{x_0 t}) \quad \text{für } t \to \infty\,, \quad \text{also } \left|\int_a^t F(\tau)\,d\tau\right| < C e^{x_0 t} \quad \text{für } t \geqq a\,,$$

mithin für reelle $s = x > x_0$:

$$|f(x)| \leqq C x \int_a^\infty e^{-(x-x_0)t}\,dt = C\frac{x}{x-x_0}\,e^{-(x-x_0)a} = O(e^{-ax}) \text{ für } x \to \infty \text{ [14])}.$$

Folglich ist

$$-V = \limsup_{x\to\infty} \frac{\log|f(x)|}{x} \leqq -a$$

oder nach Satz 2: $-v \leqq -a$.

Wir beweisen nun die Umkehrung von Satz 3.

Satz 4. *Wenn $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ eine Beschränktheitshalbebene besitzt und die Beschränktheitsordnung $v > 0$ ist, so ist $F(t)$ eine Nullfunktion für $0 < t < v$.*

Beweis: a) v sei endlich. Zu $\delta > 0$, das so klein gewählt sei, daß noch $-v + \delta < 0$ ist, gibt es nach der Definition von v ein x_0 so, daß

$$|f(s)| < e^{(-v+\delta)x} \quad \text{für} \quad x \geqq x_0$$

---

[13]) L.Tr. Satz 1 [8.2], S. 149.

[14]) Das ist eine Teilaussage von L.Tr. Satz 10 [10.1], S. 199.

ist; wir können $x_0 > 0$ und im Innern der Konvergenzhalbebene von $\mathfrak{L}\{F\}$ gewählt denken. Dann gilt ohne jede Einschränkung hinsichtlich des Verhaltens von F und $\mathfrak{L}\{F\}$ die „integrierte" komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation[15]):

$$\int_0^t F(\tau)\, d\tau = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\omega}^{x_0 + i\omega} e^{ts} \frac{f(s)}{s}\, ds \qquad (t > 0) \ .$$

Nach dem Cauchyschen Satz kann man die Integrationsstrecke durch einen die Punkte $x_0 - i\,\omega$, $x_0 + i\,\omega$ verbindenden, in $x \geqq x_0$ verlaufenden Kreisbogen um $s = 0$ vom Radius ϱ ersetzen, und hat dann den Grenzübergang $\varrho \to \infty$ statt $\omega \to \infty$ zu machen. Auf dem Kreisbogen ist $s = \varrho\, e^{i\vartheta}$, wobei den Punkten $x_0 \pm i\,\omega$ die Werte $\vartheta = \pm \vartheta_0 \left(\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ entsprechen mögen. Dann ist

$$\left| \int e^{ts} f(s) \frac{ds}{s} \right| \leqq \int_{-\vartheta_0}^{+\vartheta_0} e^{(t - v + \delta)\, \varrho \cos \vartheta}\, d\vartheta < 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(t - v + \delta)\, \varrho \cos \vartheta}\, d\vartheta \ .$$

Die cos-Kurve verläuft im Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$ oberhalb ihrer Sehne, also ist dort $\cos \vartheta \geqq 1 - \frac{2}{\pi} \vartheta$. Für $t - v + \delta < 0$ ist demnach

$$\left| \int e^{ts} f(s) \frac{ds}{s} \right| < 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(t - v + \delta)\, \varrho \left(1 - \frac{2}{\pi} \vartheta\right)}\, d\vartheta = 2\, \frac{1 - e^{(t - v + \delta)\, \varrho}}{-\frac{2}{\pi} (t - v + \delta)\, \varrho} \to 0 \text{ für } \varrho \to \infty \ .$$

Also ist $\int_0^t F(\tau) d\tau = 0$ für $t < v - \delta$ oder, da δ beliebig klein sein kann, für $t < v$.

b) v sei gleich ∞. Dann ist in dem Beweis $-v + \delta$ durch $-K$ mit beliebig großem K zu ersetzen, und es folgt, daß F für $0 < t < K$, d. h. für alle $t > 0$ eine Nullfunktion ist.

Satz 3 und 4 zusammengenommen liefern eine erschöpfende Charakterisierung des Zusammenhangs zwischen der Beschränktheitsordnung von $f(s)$ und dem Verhalten von $F(t)$ bei $t = 0$:

---

[15]) L.Tr. Satz 5 [6.5], S. 107.

Satz 5 (II. Hauptsatz). *$f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ besitze eine Beschränktheitshalbebene und daher eine Beschränktheitsordnung $v \geqq 0$. Es sei a_0 die obere Grenze der $a > 0$, für die $F(t)$ in $0 < t < a$ eine Nullfunktion ist. (a kann $+\infty$ sein.) Existieren solche a nicht, so sei $a_0 = 0$. Dann ist $v = a_0$.*

Beweis: Ist $a_0 = 0$, so muß $v = 0$ sein. Denn wäre $v > 0$, so wäre nach Satz 4 $F(t)$ in $0 < t < v$ eine Nullfunktion und daher $a_0 \geqq v > 0$. — Ist $a_0 > 0$ und endlich, so ist für jedes $a < a_0$ nach Satz 3 $v \geqq a$, also auch $v \geqq a_0$. Wäre $v > a_0$, so wäre nach Satz 4 $F(t)$ eine Nullfunktion in $0 < t < v$, im Widerspruch zu der Definition von a_0. Also ist $v = a_0$. — Ist $a_0 = \infty$, so ist für jedes a nach Satz 3 $v \geqq a$, also $v = \infty$.

Satz 5 zeigt, daß der Fall $v = \infty$ nur für ein $F(t)$ eintreten kann, das durchweg eine Nullfunktion ist. Dann ist aber $f(s) \equiv 0$[16]. Das liefert mit Rücksicht auf Satz 2:

Satz 6. *Genügt $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ für jedes noch so große K der Abschätzung $|f(s)| < e^{-Kx}$ für $x \to \infty$, oder hat $f(s)$ eine Beschränktheitshalbebene und genügt für reelle $s = x$ der Abschätzung $|f(x)| < e^{-Kx}$ mit beliebig großem K für $x \to \infty$, so ist $f(s) \equiv 0$.*

Ist also eine beliebige, in einer Halbebene analytische Funktion $f(s) \not\equiv 0$ und ist $|f(s)| < e^{-Kx}$ für $x \to \infty$ bei jedem K, so kann sie keine Laplace-Transformierte sein.

---

[16]) L. Tr. S. 35, Bemerkung 2.

(Eingegangen den 7. August 1946.)