Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 20 (1947)

Artikel: Kennzeichnende Eigenschaften der Kugel als Folgerung eines Brouwerschen Fixpunktsatzes.

Autor: Süss, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18050

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kennzeichnende Eigenschaften der Kugel als Folgerung eines Brouwerschen Fixpunktsatzes

Von W. Süss, Freiburg i. B.

1. Bekanntlich ist die Kugel unter den Eiflächen durch jede der beiden folgenden Eigenschaften gekennzeichnet:

I. Alle ihre ebenen Schnitte durch einen festen Punkt P sind einander kongruent [1]).

II. Alle ihre Orthogonalprojektionen sind einander kongruent [2]).

Für die Kugel ist auch, wie ich hier hinzufüge, die folgende Eigenschaft charakteristisch:

III. Alle das Volumen oder die Oberfläche, das Integral der mittleren Krümmung bzw. das Integral irgendeiner positiven Funktion des Ortes auf der Oberfläche halbierenden ebenen Schnitte durch die Fläche sind einander kongruent.

Alle diese Aussagen lassen sich sehr kurz und einheitlich, worauf mich vor Jahren Herr *H. Seifert* aufmerksam gemacht hat, mit Hilfe des folgenden Fixpunktsatzes von *L. E. J. Brouwer* beweisen:

B) Jede eindeutige stetige Selbstabbildung der Kugelfläche, die zur Klasse der Identität gehört [3]), besitzt mindestens einen Fixpunkt [4]).

Aus diesem Satz werden wir zunächst (Nr. 2) eine auch an sich interessante Folgerung ziehen über die Kreisform gewisser einander kongruenter ebener Schnitte durch Eikörper und einige Erweiterungen anfügen und sodann (Nr. 3) die Sätze I, II und III beweisen. In Nr. 4 folgt eine Verallgemeinerung von I für Ellipsoide.

---

[1]) Literatur siehe bei *T. Bonnesen-W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934, Nr. 69.

[2]) Es genügt schon die Forderung, daß die Projektionen einander ähnlich sind. A. a. O.x)

[3]) d. h.: die sich stetig in die identische Abbildung überführen läßt.

[4]) Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71 (1912), 97—115. Siehe auch bei *G. Feigl*, Fixpunktsätze für spezielle n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 98 (1927), 355—398. Oder *P. Alexandroff* und *H. Hopf*, Topologie I, Berlin 1935, S. 481.

2. Satz. Ein Eikörper E habe die folgende Eigenschaft: Zu jeder Stellung ξ im Raum gebe es eine Ebene (ξ Normalvektor) derart, daß E von diesen Ebenen in kongruenten Eibereichen $B(\xi)$ geschnitten wird, deren Lage stetig von ξ abhängt. Dann sind diese Schnittbereiche B Kreise.

Beweis: Jeder Richtung mit dem Einheitsvektor ξ ordnen wir den dazu senkrechten Schnittbereich $B(\xi)$ zu. Außerdem sei für $\xi = \xi_0$ in $B(\xi_0)$ ein Einheitsvektor η beliebig gewählt und mit $B(\xi_0)$ starr verbunden. Tragen wir ξ und η von einem festen Punkt 0 aus ab, so entspricht also bei Bewegung des Vektors ξ aus der Lage ξ_0 heraus jedem Vektor ξ ein Vektor η. Der Vektor η ist eindeutig festgelegt, sobald feststeht, durch welche kongruente Abbildung $B(\xi_0)$ in $B(\xi)$ verwandelt wird. Darüber könnten Zweifel bestehen, wenn $B(\xi_0)$ durch andere kongruente Abbildungen als die Identität in sich übergeht. Hat aber $B(\xi_0)$ die Eigenschaft $\mathfrak{a}$, nicht durch der Identität beliebig benachbarte kongruente Abbildungen in sich überzugehen, so ist die kongruente Abbildung von $B(\xi_0)$ auf $B(\xi)$ eindeutig festgelegt durch die Forderung, daß sie stetig von ξ abhängen soll. Dies gilt zunächst für eine hinreichend kleine Umgebung einer beliebigen Stellung, dann aber nach dem Monodromiesatze auch im großen. Man hat also eine eindeutige stetige Abbildung $\xi \to \eta$. Da dabei $\sphericalangle(\xi, \eta) = \frac{\pi}{2}$ ist, läßt sich die Abbildung stetig in die Identität überführen, ohne einen Fixpunkt zu besitzen. Dies steht im Widerspruch zu dem Satz B von Brouwer. Also kann $B(\xi_0)$ nicht die Eigenschaft $\mathfrak{a}$ haben, sondern muß durch kongruente Abbildungen in sich übergehen, die der Identität beliebig nahekommen. Das tun aber unter allen Eilinien nur die Kreise: $B(\xi)$ ist ein Kreis, w. z. b. w.

Bemerkungen: a) Der Beweis hat ersichtlich nicht von allen Voraussetzungen des Satzes vollen Gebrauch gemacht, z. B. nicht von der Konvexität von E und B oder davon, daß die $B(\xi)$ *Schnitte* von E sein sollten. Er gilt unverändert auch, wenn überhaupt kongruente Bereiche $B(\xi)$ stetig und eindeutig mit ξ variieren und wenn dabei zwei feste Winkel α und β so existieren, daß $0 < \alpha \leqq \sphericalangle(\xi, \eta) \leqq \beta < \pi$ ist. Die $B(\xi)$ können also auch z. B. irgendwelche Projektionen sein.

b) In den Voraussetzungen des Satzes und seiner Erweiterung a) kann die Kongruenz der Bereiche $B(\xi)$ durch eine andere geometrische Verwandtschaft, die Bewegungsgruppe etwa durch die Gruppe der ähnlichen Abbildungen, der Affinitäten, der Kreisverwandtschaften oder der Pro-

tivitäten ersetzt werden. Unter den Eibereichen $B(\xi)$ werden dann Kreise bzw. Ellipsen gekennzeichnet [5]).

3. *Beweise für die Sätze I, II, III.*

Nach 2. sind die Schnitte oder Projektionen $B(\xi)$ der Eifläche E in den Sätzen I—III stets kongruente Kreise.

I. Es sei s die Verbindungssehne der Berührungspunkte zweier paralleler Stützebenen an die Eifläche E und ε die oder eine der Ebenen durch s und den festen Punkt P des Satzes I. Da ε die Eifläche E in dem festen Kreis B schneidet, ist s Durchmesser dieses Kreises. Alle „Stützsehnen" s sind also gleich dem Kreisdurchmesser. Die Eifläche E ist demnach von der konstanten Breite s; ihre Selbstschattengrenzen sind die Kreise $B(\xi)$. Da deren Ebenen durch P gehen, ist P ihr Mittelpunkt, also E eine Kugelfläche.

II. Alle Stützsehnen haben die Länge des Durchmessers d der Projektionskreise $B(\xi)$, da E die konstante Breite d besitzt. s sei eine solche

---

[5]) Anmerkung von *H. Kneser:* Die letzte Schlußfolgerung scheint allerdings zunächst bei den Kreisverwandtschaften und Projektivitäten ungültig zu sein, denn da gibt es neben den Kreisen bzw. Ellipsen noch andere Eibereiche, die auch durch der Identität beliebig benachbarte Abbildungen der Gruppe in sich übergehen. Eine bekannte Überlegung aus der Lehre von den endlichen Lieschen Gruppen zeigt aber, daß man nur eine stetige Untergruppe auszunehmen braucht. Genauer: Die Abbildungen aus der Gruppe $\mathfrak{g}$ der Kreisverwandtschaften oder der Projektivitäten, die einen gegebenen Eibereich in sich verwandeln, sind die einer bestimmten stetigen Untergruppe $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ und solche, die der Identität nicht beliebig nahekommen. Der oben geführte Beweis bleibt gültig, wenn man ein gerichtetes Linienelement angeben kann, das bei den Abbildungen aus $\mathfrak{h}$ fest bleibt; und dies wird sich sogleich für jeden nicht kreisförmigen bzw. nicht elliptischen Bereich als möglich erweisen. Der Rand des Eibereiches muß sich nämlich aus vollständigen Bahnkurven eingliedriger Untergruppen von $\mathfrak{h}$ zusammensetzen, und jede dieser Kurven muß mit ihrer Richtung bei der ganzen Gruppe $\mathfrak{h}$ erhalten bleiben. Nun kann man als gerichtetes Linienelement einen Endpunkt der Bahnkurve und ihre dortige Tangente nehmen, wenn beides vorhanden ist. Bahnkurven ohne Endpunkte sind aber nur die Kreise bzw. Ellipsen, wie es dem zu beweisenden Satze entspricht; Endpunkte ohne Tangente treten nur bei den Kreisverwandten der logarithmischen Spirale auf, und diese können nicht Teile einer Eilinie sein.

Der Vollständigkeit halber seien noch die Eibereiche aufgezählt, die durch eine stetige (nicht nur aus der Identität bestehende) Gruppe von Kreisverwandtschaften bzw. Projektivitäten in sich übergehen. Bei den Kreisverwandtschaften sind es nur die konvexen Kreisbogenzweiecke. Bei den Projektivitäten sind es die beschränkten projektiven Bilder der folgenden Bereiche — wobei die nötigen uneigentlichen Punkte mit hinzugerechnet werden müssen:

1) $y \geqq e^x$.

2) $x \geqq 0, \quad y \geqq x^k \quad (k \geqq 1)$.

3) $y \geqq x^k$ für $x \geqq 0, \quad y \geqq a x^k$ für $x \leqq 0 \quad (k \geqq 1, \; a \geqq 0)$.

Für $k = 1$ tritt das Dreieck auf, bei dem die Gruppe $\mathfrak{h}$ zweigliedrig ist, für $k = 2, \; a = 1$ unter 3. die Ellipse mit dreigliedriger Gruppe $\mathfrak{h}$.

Stützsehne; sie steht auf den Stützebenen in ihren Endpunkten senkrecht. Alle Hüllzylinder, deren Erzeugenden zu s senkrecht sind, gehen durch die Endpunkte von s. Der Durchschnitt ihrer Innenbereiche, eine Kugel, ist der von E berandete Eikörper, w. z. b. w.

III. Der Durchmesser AB des von E berandeten Eikörpers ist gleich dem Kreisdurchmesser d, da mindestens eine der Halbierungsebenen durch ihn hindurch gelegt werden kann. Für alle $\xi \perp AB$ geht aber dann der Kreis $B(\xi)$ durch A und B, so daß E eine Kugel sein muß.

4. Das *affingeometrische Analogon* von I lautet:

I^{a}. Sind alle ebenen Schnitte eines Eikörpers E durch einen festen Punkt P zueinander affin, so ist E ein Ellipsoid. Nach der Bemerkung b) in **2** sind alle ebenen Schnitte durch P Ellipsen. Nun seien AB, CD zwei Sehnen von E, die durch P halbiert werden. Dann hat die Schnittellipse durch A, B, C, D den Punkt P zum Mittelpunkt. T sei Berührungspunkt einer zur Ebene $ABCD$ parallelen Stützebene an E. Durch PT gelegte Schnittellipsen von E haben PT zum Durchmesser. Macht man durch Affinität die Ellipse $ABCD$ zum Kreis und $PT \perp ABCD$, so erhält man so ein Drehellipsoid, w. z. b. w.

(Eingegangen den 16. Oktober 1946.)