Über die Stirlingsche Reihe.

Autor(en): **Atkinson, F.V.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **21 (1948)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18615

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über die Stirlingsche Reihe

Von F. V. Atkinson, Oxford

1. Wegen ihrer mannigfaltigen Anwendungen ist eine einfache Herleitung der Stirlingschen Reihe sehr zu wünschen. Deshalb mag die Herleitungsweise, die ich im folgenden mitteile, nicht ganz ohne Interesse erscheinen. Ich habe mich auf den Fall der Gamma-Funktion beschränkt, doch läßt sich die Methode leicht auf allgemeinere Fälle des Summationsproblems übertragen.[1]) Es wird gezeigt, daß die Euler-Maclaurinsche Summenformel als eine Art Umkehrung der Taylorschen Reihe betrachtet werden kann.

Ich beweise den folgenden

Satz. Es sei

$$h = h(z) = \min \{|z|, |z+1|, |z+2|, \ldots\}$$

und ferner $h > 3$. Dann ist

$$\log \Gamma(z) = (z - \tfrac{1}{2}) \log z - z + C + \sum_{n=2}^{m} (-1)^n \frac{B_n}{n(n-1)} z^{1-n} + R_m(z) ,$$

wobei

$$|R_m(z)| < c_m |z| h^{-m-1} .$$

Hier bedeuten C, die c_m und später a_m, b_m gewisse positive Konstanten; B_n ist die n-te Bernoullische Zahl. In der Tat ist

$$\chi (e^{\chi} - 1)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \chi^n .$$

Der Wert von $\lg z$ werde durch die Forderung

$$|\arc z| < \pi$$

bestimmt. Es wird folgendes über die Gamma-Funktion benutzt:

---

[1]) Vgl. *E. Pascal*, Repertorium der höheren Analysis (Teubner, Leipzig 1929, Bd. I 3, S. 1221 ff.).

(I) $\Gamma(z)$ ist eindeutig regulär, außer den Punkten $0, -1, -2, \ldots$,

(II) $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$,

(III) $\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+n)^{-2}$,

(IV) $\Gamma(z)$ reell für reelle z.

Bekanntlich ist Gleichung (III) durch die schwächere Bedingung

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma(z) \to 0 \quad \text{als} \quad z \to \infty$$

ersetzbar.

Da die Gamma-Funktion durch diese vier Eigenschaften nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt wird, so muß man die Bestimmung der Konstante C auf anderen Überlegungen beruhen lassen. Zu diesem Zwecke kann z. B. jede der beiden Gleichungen

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad , \quad \Gamma(z)\,\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = 2^{1-2z}\,\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(2z)$$

dienen.

2. Der Kürze halber bezeichne ich $\log \Gamma(z)$ mit $F(z)$ und mit $F^{(n)}(z)$ deren n-te Ableitung. Dann ist

$$F(z+1) - F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(z) = \log z \ ,$$

vorausgesetzt, daß $h(z) > 1$ ist. Daraus folgt

$$F(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n-1)}(z) = z \log z - z + C$$

durch Integration längs einer Kurve, worauf stets $h(z) > 1$ ist. Durch r-malige Differentiation ergibt sich ferner

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n+r+1)}(z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^r \log z$$

und daher für beliebige $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

$$F(z) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(z) \left\{ \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{\max(m,n)} \frac{\alpha_r}{(n+1-r)!} \right\}$$

$$= z \log z - z + C + \sum_{r=1}^{m} \alpha_r \left(\frac{d}{dz}\right)^{r-1} \log z \ .$$

Nun wähle ich die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ derart, daß für $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{(n+1-r)!} = 0 \ .$$

Es ist somit

$$\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r y^r\right)\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} y^{r-1}\right) \equiv 1 \ ,$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r y^r = y(e^y - 1)^{-1} \ ,$$

und zwar

$$\alpha_r = \frac{B_r}{r!} \ , \qquad \alpha_1 = -\tfrac{1}{2} \ .$$

Es entsteht nach einiger Umformung

$$R_m(z) = \log \Gamma(z) - (z \log z - z) - C + \tfrac{1}{2} \log z - \sum_{r=2}^{m} \frac{B_r}{r!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{r-1} \log z$$

$$= - \sum_{n=m+1}^{\infty} F^{(n)}(z) \left(\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{m} \frac{B_r}{r!\,(n+1-r)!}\right) .$$

3. Der Beweis wird mit einer Abschätzung der Größen $F^{(n)}(z)$ beschlossen. Es ist, mit Berücksichtigung von Gleichung (III)

$$|F^{(n)}(z)| \leqslant (n-1)! \sum_{s=0}^{\infty} |z+s|^{-n} \ .$$

Es ist jedenfalls

$$|z+s| \geqslant |s| - |z| \ ,$$

und falls $s \geqslant 0$ ist

$$|z+s| \geqslant h(z) = h > 1 \ ,$$

woraus

$$|F^{(n)}(z)| \leqslant (n-1)! \left(\sum_{0 \leqslant s \leqslant 2|z|+1} |z+s|^{-n} + \sum_{s > 2|z|+1} |z+s|^{-n}\right)$$

$$\leqslant (n-1)! \left(4|z| h^{-n} + \sum_{s > 2|z|+1} (\tfrac{1}{2}s)^{-n}\right)$$

$$\leqslant (n-1)! \left(4|z| h^{-n} + 2^n \int_{2|z|}^{\infty} y^{-n}\, dy\right)$$

$$\leqslant A(n-1)!\,|z|\, h^{-n} \ ,$$

wobei A eine Weltkonstante ist. Folglich ist

$$|R_m(z)| \leqq A|z| \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-1)! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{m} \frac{|B_r|}{r!\,(n+1-r)!} \right) h^{-n}$$

$$\leqq A|z| \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{|B_1|}{n} + \sum_{r=2}^{m} \frac{n^r |B_r|}{r!} \right) h^{-n}$$

$$\leqq a_m |z| \sum_{n=m+1}^{\infty} h^{-n} n^m \,.$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß es ein b_m gibt, derart, daß für $n \geqq 1$

$$n^m \leqq b_m 2^n$$

gilt. Man hat hiernach mit $h > 3$

$$|R_m(z)| < a_m b_m |z| \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{h}{2} \right)^{-n}$$

$$= a_m b_m |z| \left(\frac{h}{2} \right)^{-m} \left(\frac{h}{2} - 1 \right)^{-1},$$

so daß

$$|R_m(z)| < c_m |z| h^{-m-1}$$

wie behauptet.

(Eingegangen den 14. November 1947.)