Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme.

Autor(en): **Chow, We-Liang**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **23 (1949)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-19754

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme

Von Wei-Liang Chow, Princeton (USA.)

In einer vor kurzem erschienenen Arbeit[1]) hat Herr W. Habicht den folgenden interessanten Satz bewiesen:

K sei ein Körper; $f_1, \ldots, f_n$ seien Formen aus dem Ringe $K[x_1, \ldots, x_n]$; zwischen ihnen bestehe die Relation $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0$; es seien nicht gleichzeitig n gerade und die Grade sämtlicher f_i gleich 1. Dann besitzen die Formen f_i eine gemeinsame (nichttriviale) Nullstelle (in der algebraisch-abgeschlossenen Hülle $\overline{K}$ von K).

Wie Herr Habicht bemerkt hat, können wir im obigen Satz ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die sämtlichen Formen f_i von demselben Grade sind. Wir werden in dieser Note zeigen, daß dieser Satz von Habicht einen Spezialfall eines allgemeineren Satzes bildet, der wie folgt lautet:

Satz. *K sei ein Körper; V sei eine $(n-1)$-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit im m-dimensionalen projektiven Raume S_m; $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ bzw. $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ seien Formen h-ten bzw. k-ten Grades aus dem Ringe $K[x_1, \ldots, x_{m+1}]$; zwischen ihnen bestehe die Relation $\sum_{i=1}^{n} f_i(\xi)\, g_i(\xi) = 0$ für jeden Punkt (ξ) in V; es seien nicht gleichzeitig n gerade und $h = k$. Dann besitzen entweder die Hyperflächen $f_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ oder die Hyperflächen $g_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ einen gemeinsamen Schnittpunkt in $\overline{K}$ mit der Mannigfaltigkeit V.*

Der Satz von Habicht folgt daraus, indem man $m = n - 1$, $V = S_{n-1}$ und $g_i(x) = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ setzt. Unsere Beweismethode, die wesentlich anders ist als die von Habicht, ist auch etwas einfacher und weniger rechnerisch; dabei haben wir allerdings etwas stärkere Hilfsmittel aus der algebraischen Geometrie herangezogen.

---

[1]) *W. Habicht*, Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme. Comm. Math. Helv., vol. 18, S. 154—175.

Beweis des Satzes: Die Voraussetzung über V bedeutet, daß V die Gesamtheit der gemeinsamen Nullstellen von einem System endlichvieler Formen aus $K[x_1, \ldots, x_{m+1}]$ bildet, und daß $n-1$ unabhängige allgemeine Hyperebenen in S_m mit V endlichviele gemeinsame Schnittpunkte haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir auch annehmen, daß die Mannigfaltigkeit V irreduzibel (in bezug auf K) ist; denn sonst können wir die V durch irgendeinen ihren irreduziblen $(n-1)$-dimensionalen Bestandteil ersetzen. Es sei $k \leqslant h$; und wir nehmen an, daß die Hyperflächen $g_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ keinen gemeinsamen Schnittpunkt mit der Mannigfaltigkeit V besitzen. Wir haben dann zu beweisen, daß die Hyperflächen $f_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ mindestens einen gemeinsamen Schnittpunkt mit V besitzen.

Es seien $F_1(u^1, x), \ldots, F_n(u^n, x)$ n unabhängige allgemeine Formen vom Grade h, wo die n Koeffizientenreihen $(u^1), \ldots, (u^n)$ unabhängige Unbestimmte sind. Faßt man die sämtlichen Koeffizienten $(u^1, \ldots, u^n)$ zusammen als einen Punkt eines affinen Raumes auf, so wird jedes System von n Formen h-ten Grades (wovon einige identisch verschwinden können) durch einen Punkt in diesem Raume dargestellt. Die Bedingung, daß die Relation $\sum_{i=1}^{n} g_i(\xi) F_i(u^i, \xi) = 0$ für jeden Punkt (ξ) in V bestehe, ist offenbar linear in bezug auf die Koeffizienten $(u^1, \ldots, u^n)$; daraus folgt, daß die Gesamtheit aller Systeme von n Formen h-ten Grades, die diese Bedingung erfüllen, durch eine lineare und folglich irreduzible Mannigfaltigkeit in dem affinen Raume von den $(u^1, \ldots, u^n)$ dargestellt wird. Es sei nun $(a^1, \ldots, a^n)$ ein allgemeiner Punkt dieser irreduziblen Mannigfaltigkeit. Wir können dann $f_i(x) = F_i(\alpha^i, x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ setzen, wo $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ eine (relationstreue) Spezialisierung[2]) von $(a^1, \ldots, a^n)$ ist. Unsere Behauptung wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß die n Hyperflächen $F_i(a^i, x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit V einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Denn, das Vorhandensein eines solchen gemeinsamen Schnittpunktes ist bekanntlich gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Resultanten $R_j(u^1, \ldots, u^n)$, die man aus den n Gleichungen $F_i(u^i, x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und den definierenden Gleichungen der Mannigfaltigkeit V durch Elimination der Variabeln (x) gewinnt; und aus $R_j(a^1, \ldots, a^n) = 0$ folgt offenbar $R_j(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = 0$.

---

[2]) $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ heißt eine Spezialisierung von $(a^1, \ldots, a^n)$, wenn aus $f(a^1, \ldots, a^n) = 0$ immer $f(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = 0$ folgt, wo $f(u^1, \ldots, u^n)$ ein Polynom aus dem Ringe $K[u^1, \ldots, u^n]$ ist. Dabei wird es zugelassen, daß einige von den (α^i) oder eventuell auch alle (α^i) ganz verschwinden. Dasselbe gilt im folgenden auch für die Spezialisierung von $(a^1, \ldots, a^{n-1})$. Dagegen wird unter einem Punkt in S_m oder einer Nullstelle von Formen oder einer Spezialisierung davon, immer ein nichttrivialer Punkt oder Nullstelle verstanden.

Wir betrachten nun das System von $n-1$ allgemeinen Hyperflächen $F_1(u^1, x) = 0, \ldots, F_{n-1}(u^{n-1}, x) = 0$. Bekanntlich hat dieses System von Hyperflächen mit V eine endliche Anzahl von gemeinsamen Schnittpunkten $(y^1), \ldots, (y^s)$, die zusammen ein vollständiges System von konjugierten Punkten über $K(u^1, \ldots, u^{n-1})$ bilden. Bei der Spezialisierung $(u^1, \ldots, u^{n-1}) \to (a^1, \ldots, a^{n-1})$ seien etwa die Punkte $(\eta^1), \ldots, (\eta^s)$ eine Spezialisierung der Punkte $(y^1), \ldots, (y^s)$; die Punkte $(\eta^1), \ldots, (\eta^s)$ sind natürlich auch gemeinsame Schnittpunkte von den Hyperflächen $F_1(a^1, x) = 0, \ldots, F_{n-1}(a^{n-1}, x) = 0$ mit V. Liegt einer von diesen Punkten, etwa (η^1) nicht in der Hyperfläche $g_n(x) = 0$, dann muß er auch der Bedingung

$$F_n(a^n, \eta^1) = \frac{-\sum_{i=1}^{n-1} g_i(\eta^1) F_i(a^i, \eta^1)}{g_n(\eta^1)} = 0$$

genügen. Folglich ist (η^1) auch einen gemeinsamen Schnittpunkt von den n Hyperflächen $F_1(a^1, x) = 0, \ldots, F_n(a^n, x) = 0$ mit V. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß nicht die sämtlichen Punkte $(\eta^1), \ldots, (\eta^s)$ in der Hyperfläche $g_n(x) = 0$ liegen können.

Nehmen wir für einen Augenblick an, daß es ein System von $n-1$ Hyperflächen $F_1(\beta^1, x) = 0, \ldots, F_{n-1}(\beta^{n-1}, x) = 0$ gibt, wo $(\beta^1, \ldots, \beta^{n-1})$ eine Spezialisierung von $(a^1, \ldots, a^{n-1})$ ist, mit der Eigenschaft, daß dieses System mit V einen isolierten, nicht in der Hyperfläche $g_n(x) = 0$ liegenden gemeinsamen Schnittpunkt (ζ) besitzt. Da dann der Punkt (ζ) eine isolierte Spezialisierung irgendeines von den Punkten $(y^1), \ldots, (y^s)$ bei der Spezialisierung $(u^1, \ldots, u^{n-1}) (\to (\beta^1, \ldots, \beta^{n-1})$ ist, so muß[3]) er in jeder Spezialisierung der Punkte $y^1), \ldots, (y^s)$ bei der Spezialisierung $(u^1, \ldots, u^{n-1}) \to (\beta^1, \ldots, \beta^{n-1})$ immer vorkommen (zwar genau so oft wie seine Multiplizität, die immer positiv ist). Nun ist jeder Spezialisierung von den Punkten $(\eta^1), \ldots, (\eta^s)$ bei der Spezialisierung $(a^1, \ldots, a^{n-1}) \to (\beta^1, \ldots, \beta^{n-1})$ *a fortiori* auch eine Spezialisierung von den Punkten $(y^1), \ldots, (y^s)$ bei der Spezialisierung $(u^1, \ldots, u^{n-1}) \to (\beta^1, \ldots, \beta^{n-1})$; folglich muß mindestens einer von den Punkten (η^i), etwa der (η^1) bei der Spezialisierung $(a^1, \ldots, a^{n-1}) \to (\beta^1, \ldots, \beta^{n-1})$ in den Punkt (ζ) übergehen. Da der Punkt (ζ) nicht in der Hyperfläche $g_n(x) = 0$ liegt, so kann (η^1) auch nicht in ihr liegen.

Das erwünschte System von Hyperflächen

$$F_1(\beta^1, x) = 0, \ldots, F_{n-1}(\beta^{n-1}, x) = 0$$

---

[3]) Siehe etwa *A. Weil*, Foundation of Algebraic Geometry, S. 62, Theorem 4.

kann man wie folgt konstruieren. Im Falle von einem ungeraden $n = 2r + 1$, setzt man

$$F_{2j-1}(\beta^{2j-1}, x) = \quad g_{2j}(x)\, p(x) \ ,$$

$$F_{2j}(\beta^{2j}, x) \quad = -\, g_{2j-1}(x)\, p(x) \qquad (j = 1, \ldots, r) \ ,$$

wo $p(x)$ eine Form $(h - k)$-ten Grades ist, deren Nullstellen die endlichvielen gemeinsamen Schnittpunkte von V mit den Hyperflächen $g_1(x) = 0, \ldots, g_{2r}(x) = 0$ nicht enthalten. Man kann dann für den Punkt (ζ) irgendeinen von diesen endlichvielen gemeinsamen Schnittpunkten nehmen. Im Falle von einem geraden $n = 2r + 2$, definiert man die ersten $2r$ Formen genau so wie oben, wo $p(x)$ jetzt eine Form $(h - k)$-ten Grades bedeutet, deren Nullstellen die endlichvielen gemeinsamen Schnittpunkte von V mit den Hyperflächen $g_1(x) = 0, \ldots, g_{2r}(x) = 0$, $g_n(x) = 0$ nicht enthalten. Für die $(2r + 1)$-te Form setzt man dann

$$F_{2r+1}(\beta^{2r+1}, x) = g_n(x)\, q(x) \ ,$$

wo $q(x)$ eine Form $(h - k)$-ten Grades ist, deren Nullstellen weder die endlichvielen gemeinsamen Schnittpunkte von V mit den Hyperflächen $g_1(x) = 0, \ldots, g_{2r}(x) = 0$, $g_n(x) = 0$, noch die endlichvielen gemeinsamen Schnittpunkte von V mit den Hyperflächen $g_1(x) = 0, \ldots, g_{2r}(x) = 0$, $p(x) = 0$ enthalten. Dabei ist es zu beachten, daß, laut unserer in diesem Falle gemachten Voraussetzung $h - k > 0$, die Gleichung $q(x) = 0$ (und ebenso die Gleichung $p(x) = 0$) wirklich eine Hyperfläche darstellt. Man kann dann für den Punkt (ζ) irgendeinen von den endlichvielen gemeinsamen Schnittpunkten von V mit den Hyperflächen $g_1(x) = 0, \ldots, g_{2r}(x) = 0$, $q(x) = 0$ nehmen.

(Eingegangen den 28. Juni 1948.)