Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1952)

Artikel: Metrisches Feld und vektorielles Materiefeld.
Autor: Scherrer, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21275

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Metrisches Feld und vektorielles Materiefeld[1]

Von W. Scherrer, Bern

§ 1. Einleitung

Der naheliegendste Versuch, Gravitation und Elektrizität formal zu vereinigen, kann auf das Wirkungsprinzip

$$\delta \int (R + \tfrac{1}{2} \varkappa F_{\rho\sigma} F^{\sigma\rho}) \sqrt{-G}\, dx = 0 \tag{1.1}$$

basiert werden, wo R den Krümmungsskalar, $\varkappa$ die Einsteinsche Gravitationskonstante, $F_{\rho\sigma}$ das elektromagnetische Feld und dx das Produkt der Koordinatendifferentiale bedeutet.

Dieser Ansatz führt aber schon deshalb nicht zum Ziel, weil er den Strom Null und somit nur die Maxwellschen Gleichungen für ein Vakuum liefert.

Gegen alle Ansätze, welche Gravitations- und Materiewirkung nur additiv vereinigen, läßt sich grundsätzlich einwenden, daß sie auch noch bei Abwesenheit von Materie ein Gravitationsfeld liefern.

Ich habe daher in zwei frühern Arbeiten[2][3]) das Wirkungsprinzip

$$\partial \int \left(R\, \psi^2 + 4\, \omega\, G^{\rho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \right) \sqrt{-G} dx = 0 \tag{1.2}$$

analysiert.

Dieser Ansatz entgeht offenbar dem eben erwähnten Einwand, seine spezielle Gestalt war von dem Bestreben diktiert, für den denkbar einfachsten Fall eine möglichst gute Anpassung an die Metrik zu erreichen.

Die Analyse zeigt, daß die exakte Lösbarkeit des zugehörigen statisch-zentralsymmetrischen Problems sowie des kosmologischen Problems wesentlich auf der Homogenität des Integranden beruht.

---

[1]) Ein Referat über die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit wird unter dem Titel „Wirkungsprinzipien zur Feldtheorie der Materie" in den Helvet. phys. Acta erscheinen.

[2]) Über den Einfluß des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld, Helvet. phys. Acta XXII S. 537—551 (1949).

[3]) Dazu zweite Mitteilung: Helvet. phys. Acta XXIII S. 547—555 (1950).

Der Integrand von (1.2) ist nämlich vollständig homogen, von der Dimension 2 in bezug auf ψ und von der Dimension 1 in bezug auf die $G_{\rho\sigma}$.

Als Positivum kann wohl die Tatsache registriert werden, daß eine endliche Totalenergie resultiert. Im übrigen aber weicht der Ansatz (1.2) so stark von (1.1) ab, daß mir ein Anschluß an die Elektrodynamik nicht gelungen ist.

Mein Bestreben war nun, den Ansatz (1.1) in analoger Weise zu homogenisieren.

Die Materiewirkung in (1.1) ist ebenfalls vollständig homogen, und zwar von der Dimension 2 in bezug auf die Potentiale Φ_ρ und von der Dimension 0 in bezug auf die $G_{\rho\sigma}$. Wenn man nun nach weiteren Invarianten Umschau hält, die dieselben Homogenitätseigenschaften besitzen und überdies nach bewährtem Vorbild höchstens die ersten Ableitungen der Φ_ρ und die zweiten Ableitungen der $G_{\rho\sigma}$, und zwar die letzteren linear enthalten, so findet man neben der elektromagnetischen Wirkungsgröße $F_{\rho\sigma} F^{\sigma\rho}$ immerhin noch vier wesentlich verschiedene Invarianten.

Man könnte nun daran denken, von diesen vier weiteren Invarianten diejenigen auszuschalten — es sind deren zwei —, welche auch im Spezialfall des ebenen Raumes Zusatzglieder zum Viererstrom liefern. Doch ist diese Überlegung deshalb nicht stichhaltig, weil in der Maxwellschen Theorie der Viererstrom nur phänomenologisch definiert ist.

Es bleibt also nichts anderes übrig, als alle Invarianten zuzulassen. Ihre Bearbeitung bietet zum Teil einen verwickelten Aspekt, so daß ich längere Zeit an der Möglichkeit einer exakten Lösung zweifelte. Schließlich hat sich aber herausgestellt, daß das statisch zentralsymmetrische Problem exakt lösbar ist. Über diese Lösung will ich hier nun berichten.

Die Hauptergebnisse sind folgende. Es gibt eine einparametrige Schar von Lösungen mit endlicher Totalenergie. Wenn man nun aber die natürliche, ja wie mir scheint logisch zwingende Forderung stellt, daß nicht nur die Energiekomponente im engern Sinne, sondern alle Energiekomponenten über den ganzen Raum integriert einen endlichen Betrag liefern, so sind von den gefundenen Lösungen nur noch *zwei* respektive *eine* zulässig. Das Detail hängt von einer universellen Konstanten ε — einer reinen Zahl — ab, über die man verfügen muß.

Der interessanteste Fall liegt vor für $\varepsilon > 1$ und liefert die schon erwähnten zwei Lösungen. Die Verhältnisse im einzelnen sind recht merkwürdig. Es ergeben sich zwei verschiedene scheinbar negative Massen. Die Analyse zeigt aber, daß eine der beiden Massen ein Linienelement erzeugt, das einer positiven Masse entspricht. Die zugeordneten totalen

Raumladungen sind ebenfalls negativ und dem Betrage nach verschieden. Die traditionelle Vorzeichenwahl kann also im Rahmen des vorliegenden Ansatzes nicht maßgebend sein. Die innere Struktur der beiden Ladungsverteilungen ist wesentlich verschieden. Dagegen ergeben sich im Außenbezirk — also für große Distanzen r — angenähert zwei Potentiale

$$\frac{e^*}{r} \quad \text{und} \quad -\frac{e^*}{r} ,$$

wobei e^* ein Bruchteil der Totalladung ist.

Zusammenfassend ist also zu sagen: Eine Entscheidung über die Vorzeichen ist ohne weitere Lösungen kaum möglich. Trotzdem bedeutet dieser vektorielle Ansatz einen wesentlichen Fortschritt gegenüber dem skalaren Ansatz (1.2). Er liefert nämlich eine diskrete Auswahl von Grundlösungen. Außerdem steht er der klassischen Elektrodynamik sehr nahe. Es darf daher vielleicht angenommen werden, daß seine weitere Bearbeitung oder das Studium benachbarter Varianten grundsätzliches Interesse verdient.

§ 2. Die Invarianten

Nach dem was in der Einleitung gesagt wurde, handelt es sich jetzt darum, Invarianten anzugeben, die folgende Bedingungen erfüllen.

1. Sie sind homogen von der Dimension 2 in den Potentialen Φ_ρ.
2. Sie sind homogen von der Dimension -2 in den $G_{\rho\sigma}$.
3. Sie enthalten höchstens die ersten Ableitungen der Φ_ρ.
4. Sie enthalten höchstens die zweiten Ableitungen der $G_{\rho\sigma}$, und zwar nur linear.

Das Linienelement ist

$$ds^2 = G_{\rho\sigma}\, dx_\rho\, dx_\sigma \tag{2.1}$$

und als Zeichen für die kovariante Ableitung nach der Koordinate benutze ich das Symbol D_ρ, so daß wir also haben

$$D_\rho \Phi_\sigma \equiv \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} \Phi_\lambda , \tag{2.2}$$

$$D_\rho \Phi^\sigma \equiv \frac{\partial \Phi^\sigma}{\partial x_\rho} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Phi^\lambda . \tag{2.3}$$

Den verjüngten Krümmungstensor schreibe ich in der Gestalt

$$R_{\rho\sigma} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}}{\partial x_\lambda} - Q_{\rho\sigma} , \tag{2.4}$$

mit

$$Q_{\rho\sigma} \equiv \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\,\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\ . \tag{2.5}$$

Der Krümmungsskalar ist dann gegeben durch

$$R \equiv G^{\rho\sigma}\,R_{\rho\sigma}\ . \tag{2.6}$$

Schließlich empfiehlt sich noch das Symbol

$$D\Phi \equiv D_{\rho}\,\Phi^{\rho} = \frac{1}{\sqrt{-G}}\,\frac{\partial}{\partial x_{\rho}}\,(\sqrt{-G}\,\Phi^{\rho}) \tag{2.7}$$

einzuführen, das offenbar die linke Seite der sogenannten Lorentzkonvention darstellt.

Die antisymmetrischen elektromagnetischen Feldstärken sind gegeben durch

$$F_{\rho\sigma} \equiv D_{\rho}\,\Phi_{\sigma} - D_{\sigma}\,\Phi_{\rho} \tag{2.8}$$

und ihre symmetrischen Gegenstücke bezeichne ich mit

$$E_{\rho\sigma} \equiv D_{\rho}\,\Phi_{\sigma} + D_{\sigma}\,\Phi_{\rho}\ . \tag{2.9}$$

Jetzt sind wir in der Lage folgende fünf Invarianten anzugeben, die den oben angegebenen Bedingungen entsprechen:

$$H \equiv R\,\Phi_{\rho}\,\Phi^{\rho} \tag{2.10}$$

$$J \equiv R_{\rho\sigma}\,\Phi^{\rho}\,\Phi^{\sigma} \tag{2.11}$$

$$K \equiv \tfrac{1}{2}E_{\rho\sigma}\,E^{\sigma\rho} \tag{2.12}$$

$$M \equiv E^{\rho}_{\rho}\,E^{\sigma}_{\sigma} = (D\,\Phi)^2 \tag{2.13}$$

$$F \equiv \tfrac{1}{2}F_{\rho\sigma}\,F^{\sigma\rho} \tag{2.14}$$

Wahrscheinlich sind dies die einzigen Invarianten, welche die angegebenen Bedingungen erfüllen.

Durch direkte Rechnung findet man

$$K = D_{\rho}\,\Phi^{\sigma}\,D_{\sigma}\,\Phi^{\rho} + G^{\rho\sigma}\,D_{\rho}\,\Phi_{\tau}\,D_{\sigma}\,\Phi^{\tau} \tag{2.15}$$

$$F = D_{\rho}\,\Phi^{\sigma}\,D_{\sigma}\,\Phi^{\rho} - G^{\rho\sigma}\,D_{\rho}\,\Phi_{\tau}\,D_{\sigma}\,\Phi^{\tau}\ , \tag{2.16}$$

woraus folgt

$$K = 2\,L - F$$

mit

$$L \equiv D_{\rho}\,\Phi^{\sigma}\,D_{\sigma}\,\Phi^{\rho}\ . \tag{2.18}$$

Da es im allgemeinen bequem ist, mit L und F statt mit K und F zu rechnen, werde ich inskünftig folgende Invariantentafel benützen:

$$\boxed{\begin{aligned} H &\equiv R\,\Phi_\rho\,\Phi^\rho \\ J &\equiv R_{\rho\sigma}\,\Phi^\rho\,\Phi^\sigma \\ L &\equiv D_\rho\Phi^\sigma\,D_\sigma\Phi^\rho \\ M &\equiv (D\Phi)^2 \\ F &\equiv \tfrac{1}{2}F_{\rho\sigma}F^{\sigma\rho} \end{aligned}} \tag{2.19}$$

Die Invarianten K und M respektive L und M sind diejenigen, in der Einleitung erwähnten Invarianten, welche auch dann noch Zusatzglieder zum Viererstrom liefern, wenn der Zeitraum eben ist.

§ 3. Das Wirkungsprinzip

Entsprechend den im Vorausgehenden entwickelten Gesichtspunkten setzen wir nun das Wirkungsprinzip an in der Gestalt

$$\delta \int (H + 2\xi J + 2\eta L + 2\zeta M + 2\varepsilon F)\sqrt{-G}\,dx = 0\ . \tag{3.1}$$

Dabei bedeuten H, J, L, M, F die in der Tafel (2.19) angegebenen Invarianten und ξ, η, ζ, ϵ universelle Konstanten, die aus dimensionellen Gründen reine Zahlen sein müssen.

Die durch Variation der $G^{\rho\sigma}$ erhältlichen Gravitationsgleichungen lassen sich schreiben in der Gestalt

$$\mathfrak{R}^\sigma_\rho - \tfrac{1}{2}\delta^\sigma_\rho\,\mathfrak{R} = -\,\mathfrak{S}^\sigma_\rho \tag{3.2}$$

und für die durch Variation der Φ_ρ zu gewinnenden Materiegleichungen ergibt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{\rho\sigma}}{\partial x_\sigma} = \mathfrak{s}^\rho\ . \tag{3.3}$$

Die gotischen Buchstaben sollen wie üblich die zu den lateinisch geschriebenen Tensoren gehörigen Tensordichten bedeuten.

Die rechten Seiten von (3.2) und (3.3) sind natürlich aus den $G_{\rho\sigma}$ und den Φ_ρ und deren Ableitungen zusammengesetzt. Doch benötigen wir ihre expliziten Ausdrücke vorderhand nicht. Um zum Beispiel den Energietensor in absolutem Maß zu berechnen, haben wir einfach zu setzen

$$\mathfrak{T}_\sigma^\rho = -\frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{R}_\rho^\sigma - \tfrac{1}{2}\delta_\rho^\sigma \mathfrak{R}) \tag{3.4}$$

und den Viererstrom erhalten wir direkt aus der linken Seite von (3.3).

Hier zeigt sich der grundsätzliche Unterschied einer reinen und vollständigen Feldtheorie gegenüber der halbphänomenologischen Gravitationstheorie, welche das Feld auf Grund der phänomenologisch beschriebenen Massenverteilung bestimmt.

In einer vollständigen Feldtheorie werden dagegen alle Feldgrößen simultan bestimmt. Hat man das Feld bestimmt, so kann man zur Berechnung von Energie und Strom nachträglich je nach Bedarf die linken oder rechten Seiten von (3.2) und (3.3) verwenden.

Es mag vielleicht befremden, daß im Wirkungsprinzip gleich vier universelle Konstanten auftreten. Dazu möchte ich folgendes bemerken. Es wird sich zeigen, daß die Struktur der statisch-zentralsymmetrischen Lösung im wesentlichen durch die Hauptinvarianten H und F und die Konstante ϵ bestimmt ist. Es ist recht merkwürdig, daß diese Struktur durch das Einschieben der drei Invarianten J, L und M nicht gestört wird. Für das genannte Problem könnte man — mit einem kleinen Vorbehalt — ungestraft ξ, η und ζ als Null annehmen. Beim kosmologischen Problem aber spielt sicher J eine einschneidende Rolle. Die Invarianten L und M widerum kann man verwenden, um das Bestehen der Lorentzkonvention im Falle verschwindender Krümmung zu garantieren. Es darf daher als glücklicher Umstand bezeichnet werden, daß man die drei Invarianten J, L und M als stille Reserven mitführen kann.

§ 4. Das statische Zentralfeld

Wir legen das Schwarzschildsche Linienelement

$$ds^2 = f^2\, dx_0^2 - g^2\, dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\lambda^2) \tag{4.1}$$

zugrunde, worin f und g nur Funktionen von r sind und setzen entsprechend einer dieser Symmetrie angepaßten statischen Feldverteilung

$$\Phi_0 = \Phi(r)\ , \qquad \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0\ . \tag{4.2}$$

Es folgt

$$\sqrt{-G} = f\, g\, r^2 \sin\vartheta \tag{4.3}$$

und die Γ-Tafel lautet:

$$\boxed{\begin{array}{lll} & \Gamma^0_{10} = \dfrac{f'}{f} & \\ \Gamma^1_{00} = \dfrac{f f'}{g^2}, \quad \Gamma^1_{11} = \dfrac{g'}{g}, & \Gamma'_{22} = -\dfrac{r}{g^2}, & \Gamma^1_{33} = -\dfrac{r}{g^2}\sin^2\vartheta \\ & \Gamma^2_{12} = \dfrac{1}{r}, & \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \\ & \Gamma^3_{13} = \dfrac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \operatorname{cotg}\vartheta & \end{array}} \tag{4.4}$$

wobei der Strich die Ableitung nach r bedeutet. Jetzt liefert die Berechnung

$$G_{\rho\sigma}\,\Phi^\rho\,\Phi^\sigma = \frac{\Phi^2}{f^2} \tag{4.5}$$

$$R\sqrt{-G} = -\left[\frac{2r}{g}(r f' + 2f)\sin\vartheta\right]' + 2\left(\frac{2r f' + f}{g} + f g\right)\sin\vartheta \tag{4.6}$$

$$R_{00}\sqrt{-G} = \left(-\frac{r^2 f^2 f''}{g} + \frac{r^2 f^2 f' g'}{g} - 2\frac{r^2 f^2 f'}{g}\right)\sin\vartheta \tag{4.7}$$

$$D_\rho\,\Phi^\rho\,D_\sigma\,\Phi^\rho\sqrt{-G} = 2\left(\frac{r^2 f'\,\Phi\,\Phi'}{f^2 g} - \frac{r^2 f'^2\,\Phi^2}{f^3 g}\right)\sin\vartheta \tag{4.8}$$

$$D\,\Phi = 0 \tag{4.9}$$

$$F = \frac{\Phi'^2}{f^2 g^2} \tag{4.10}$$

Für die den Invarianten der Tafel (2.19) entsprechenden Dichten erhalten wir daher

$$H\sqrt{-G} = \left\{-\left[\frac{2r}{g}(r f' + 2f)\right]'\frac{\Phi^2}{f^2} + 2\left(\frac{2r f' + f}{g} + f g\right)\frac{\Phi^2}{f^2}\right\}\sin\vartheta \tag{4.11}$$

$$J\sqrt{-G} = \left(-\frac{r^2 f''\,\Phi^2}{f^2 g} + \frac{r^2 f' g'\,\Phi^2}{f^2 g^2} - 2\frac{r f'\,\Phi^2}{f^2 g}\right)\sin\vartheta \tag{4.12}$$

$$L\sqrt{-G} = 2\left(\frac{r^2 f'\,\Phi\,\Phi'}{f^2 g} - \frac{r^2 f'^2\,\Phi^2}{f^3 g}\right)\sin\vartheta \tag{4.13}$$

$$M\sqrt{-G} = 0 \tag{4.14}$$

$$F\sqrt{-G} = \frac{r^2\,\Phi'^2}{f g}\sin\vartheta \tag{4.15}$$

Das Wirkungsprinzip (3.1) lautet daher nach Unterdrückung des Faktors $2\sin\vartheta$ und der Winkeldifferentiale

$$\delta \int \left\{ \begin{array}{l} -\left[\frac{r}{g}(r f' + f)\right]' \frac{\Phi^2}{f^2} + \left(\frac{2r f' + f}{g} + f g\right) \frac{\Phi^2}{f^2} \\ + \xi \left(-\frac{r^2 f'' \Phi^2}{f^2 g} + \frac{r^2 f' g' \Phi^2}{f^2 g^2} - 2 \frac{r f' \Phi^2}{f^2 g}\right) \\ + 2\eta \left(\frac{r^2 f' \Phi \Phi'}{f^2 g} - \frac{r^2 f'^2 \Phi^2}{f^3 g}\right) + \varepsilon \frac{r^2 \Phi'^2}{f g} \end{array} \right\} dr = 0 \qquad (4.16)$$

Schafft man hier nun die zweiten Ableitungen in der üblichen Weise durch partielle Integration weg und führt hierauf als neue Unabhängige die Variable

$$s = L g r \qquad (4.17)$$

ein, so erhält man zusammenfassend schließlich die Gestalt

$$\boxed{\delta \int \left[\varepsilon \frac{\dot{\Phi}^2}{f g} + \left(2\theta \frac{\dot{f}}{f^2 g} + \frac{4}{f g}\right) \Phi \dot{\Phi} - \left(2\theta \frac{\dot{f}^2}{f^3 g} + 2 \frac{\dot{f}}{f^2 g} - \frac{1}{f g} - \frac{g}{f}\right) \Phi^2\right] e^s ds = 0} \qquad (4.18)$$

Hier bedeutet der Punkt die Ableitung nach s, und θ ist definiert durch

$$\theta = 1 + \xi + \eta \ . \qquad (4.19)$$

In den beiden letzten Gleichungen haben wir schon den Beleg, daß der Einfluß der Invarianten J und L keine Strukturänderung, sondern nur eine numerische Verschiebung bedeutet.

Variiert man jetzt in (4.18) sukzessive nach f, Φ und g und erweitert hierauf die beiden zuerst erhaltenen Gleichungen mit $f^2 g/\Phi^2$ respektive $f g/\Phi$, so ergibt sich ein System von drei Differentialgleichungen, das in bezug auf die Größen $\dot{f}/f$ und $\dot{\Phi}/\Phi$ von erster Ordnung ist. Es empfiehlt sich daher, die genannten Größen als neue Abhängige einzuführen gemäß

$$\varphi \equiv \frac{\dot{f}}{f} \ ; \qquad \psi \equiv \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} \ . \qquad (4.20)$$

Das System lautet dann:

$$\begin{array}{ll} -2\theta \dot{\varphi} + \theta \dot{\psi} & -3\theta \varphi \psi + (\varepsilon + 2\theta) \psi^2 \\ -(2\theta + 1) \varphi + (\theta + 2) \psi & + (2\theta \varphi - \theta \psi + 1) \frac{\dot{g}}{g} = 0 \end{array} \qquad (4.21)$$

$$\begin{array}{ll} \theta \dot{\varphi} + \varepsilon \dot{\psi} + 3\theta \varphi^2 - (\varepsilon + 2\theta) \varphi \psi & \\ + (\theta + 2) \varphi + (\varepsilon - 4) \psi & - (\theta \varphi + \varepsilon \psi + 2) \frac{\dot{g}}{g} = 0 \end{array} \qquad (4.22)$$

$$-2\theta\varphi^2 + 2\theta\varphi\psi + \varepsilon\psi^2 - 2\varphi + 4\psi + 1 = g^2 \,. \tag{4.23}$$

Mit Hilfe von (4.23) kann man nun g aus den beiden vorausgehenden Gleichungen eliminieren. Die Rechnung ist elementar, aber etwas umständlich. Das Resultat ist überraschend. An Stelle des zu erwartenden bösartigen Systems vierten Grades ergibt sich folgendes:

Falls die Konstanten der Bedingung

$$\theta^2 + 2(\epsilon - 2)\theta + \varepsilon \neq 0 \tag{4.24}$$

genügen, erhält man

$$\boxed{\dot{\varphi} = -g^2\varphi \,; \qquad \dot{\psi} = -g^2\psi \,.} \tag{4.25}$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar

$$\boxed{\psi = \omega\varphi \,,} \tag{4.26}$$

wo ω eine numerische Integrationskonstante ist, und (4.23) geht über in

$$\boxed{g^2 = (\varepsilon\omega^2 + 2\theta\omega - 2\theta)\varphi^2 + 2(2\omega - 1)\varphi + 1 \,.} \tag{4.27}$$

Diesen Umständen haben wir es also zu verdanken, daß die restliche Integration explizite durchgeführt werden kann.

Falls aber die linke Seite von (4.24) verschwindet, fallen (4.21) und (4.22) in eine Gleichung zusammen und das Problem wird unterbestimmt. Die Bedingung (4.24) ist daher unerläßlich für alle bestimmbaren Varianten.

Zur sukzessiven Bestimmung von r, f und Φ als Funktionen des Parameters φ benötigt man die Gleichungen (4.27), (4.25), (4.20) und (4.17). Bezeichnet man die Nullstellen des durch (4.27) gegebenen quadratischen Polynoms für g^2 mit α und β, so erhält man vermittelst elementarer Integrationen folgende Lösungstafel:

$$\boxed{\begin{aligned} g^2 &= \frac{(\varphi-\alpha)(\varphi-\beta)}{\alpha\beta} \\ r &= D\,\varphi^{-1}(\varphi-\alpha)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(\varphi-\beta)^{\frac{a}{\alpha-\beta}} \\ f &= A\left(\frac{\varphi-\alpha}{\varphi-\beta}\right)^{\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}} ; \qquad A = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}} \\ \Phi &= C\,f^{\omega} \,. \end{aligned}} \tag{4.28}$$

Hier ist D eine Länge, A eine reine Zahl und C von der Dimension des elektrischen Potentials. Der Wert von A ist festgelegt durch die Forderung, daß für $r = \infty$, das heißt $\varphi = 0$ entsprechend dem pseudoeuklidischen Linienelement $f = 1$ herauskommen soll.

Um weitern Aufschluß zu erhalten, müssen wir die Energie- und Ladungsverhältnisse analysieren.

§ 5. Der Energietensor

Da die Lösungsfunktionen (4.28) als Variable nicht r, sondern den Parameter φ enthalten, rechnen wir auch das Linienelement (4.1) auf φ um und erhalten

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - h^2 d\varphi^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d\lambda^2) \tag{5.1}$$

mit

$$h = \frac{r}{\varphi g} = D\sqrt{\alpha \beta}\, \varphi^{-2} \left(\frac{\varphi - \alpha}{\varphi - \beta} \right)^{\frac{\beta+\alpha}{2(\beta-\alpha)}} \tag{5.2}$$

Es folgt

$$\sqrt{-g} = f \mid h \mid r^2 \tag{5.3}$$

und die Γ-Tafel lautet jetzt

$$\boxed{\begin{array}{llll} & \Gamma^0_{10} = \dfrac{f'}{f} & & \\ \Gamma^1_{00} = \dfrac{f f'}{h^2}, & \Gamma^1_{11} = \dfrac{h'}{h}, & \Gamma^1_{22} = -\dfrac{r r'}{h^2}, & \Gamma^1_{33} = -\dfrac{r r'}{h^2} \sin \vartheta \\ & \Gamma^2_{12} = \dfrac{r'}{r}, & & \Gamma^2_{33} = -\sin \vartheta \cos \vartheta \\ & \Gamma^3_{13} = \dfrac{r'}{r}, & \Gamma^2_{23} = \operatorname{cotg} \vartheta & \end{array}}$$

wobei nun der Strich die Ableitung nach φ bedeutet.

Für die Berechnung der Energiekomponenten gemäß (3.4) erhält man nun die Formeln

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathfrak{R}_0^0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R} &= \frac{f r^2}{|h|}\left[2\left(\frac{r'}{r}\right)' + \left(3\frac{r'}{r} - 2\frac{h'}{h}\right)\frac{r'}{r} - \frac{h^2}{r^2}\right]\sin\vartheta \\
\mathfrak{R}_1^1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R} &= \frac{f r^2}{|h|}\left[\left(2\frac{f'}{f} + \frac{r'}{r}\right)\frac{r'}{r} - \frac{h^2}{r^2}\right]\sin\vartheta \\
\mathfrak{R}_2^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R} &= \frac{f r^2}{|h|}\left[\left(\frac{f'}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h} + \frac{r'}{r}\right)\frac{f'}{f} + \left(\frac{r'}{r}\right)' + \left(\frac{r'}{r} - \frac{h'}{h}\right)\frac{r'}{r}\right]\sin\vartheta \\
\mathfrak{R}_3^3 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R} &= \mathfrak{R}_2^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}\,.
\end{aligned}
}
\tag{5.5}
$$

Die Berechnung ergibt vorerst

$$
\frac{f r^2}{|h|} = \frac{A\,|D|}{\sqrt{\alpha\beta}}\,(\varphi - \alpha)^{\frac{2\alpha\beta + 3\beta - \alpha}{2(\beta - \alpha)}}\,(\varphi - \beta)^{\frac{2\alpha\beta + 3\alpha - \beta}{2(\alpha - \beta)}} \tag{5.6}
$$

und hierauf für die Energiekomponente

$$
\mathfrak{R}_0^0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R} = A\,|D|\,\sqrt{\alpha\beta}\,(\varphi - \alpha)^{\frac{2\alpha\beta + 3\alpha - \beta}{2(\beta - \alpha)}}\,(\varphi - \beta)^{\frac{2\alpha\beta + 3\beta - \alpha}{2(\alpha - \beta)}} \tag{5.7}
$$

Das Raumintegral über die Energiedichte konvergiert also sicher im Unendlichen, das heißt bei $\varphi = 0$.

Die Berechnung der Impulsdichten zeigt nun aber, daß die entsprechenden Integrale im Undendlichen dann und nur dann konvergieren, wenn die Bedingung

$$
\boxed{2\,\alpha\beta + \alpha + \beta = 0} \tag{5.8}
$$

erfüllt ist.

Bei Berücksichtigung dieser Bedingung erhält man

$$
\frac{f r^2}{|h|} = \frac{A\,|D|}{\sqrt{\alpha\beta}}\,(\varphi - \alpha)\,(\varphi - \beta) \tag{5.9}
$$

und hierauf

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathfrak{R}_0^0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R} &= \frac{A\,|D|\,\sqrt{\alpha\beta}}{(\varphi - \alpha)(\varphi - \beta)} \\
\mathfrak{R}_1^1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R} &= -\frac{A\,|D|\,\sqrt{\alpha\beta}}{(\varphi - \alpha)(\varphi - \beta)} \\
\mathfrak{R}_2^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R} &= \frac{A\,|D|\,\sqrt{\alpha\beta}}{(\varphi - \alpha)(\varphi - \beta)} \\
\mathfrak{R}_3^3 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R} &= \frac{A\,|D|\,\sqrt{\alpha\beta}}{(\varphi - \alpha)(\varphi - \beta)}\,.
\end{aligned}
}
\tag{5.10}
$$

Nach (4.27) und (4.28) gilt nun offenbar

$$2(2\omega - 1) = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

oder

$$4\omega = \frac{2\alpha\beta - \alpha - \beta}{\alpha\beta} .$$

Die Bedingung (5.8) liefert daher

$$\boxed{\omega = 1} \tag{5.11}$$

und (4.27) verwandelt sich in

$$\boxed{g^2 = \varepsilon\varphi^2 + 2\varphi + 1 .} \tag{5.12}$$

Wir ersehen daraus, daß die Wurzeln α und β und damit die für die Energie- und Impulsdichten maßgeblichen Werte (5.10) nur von ε abhängen. Hieraus folgt, daß die durch die Invarianten J und L bedingten Anteile zur Totalenergie Null sein müssen. Im Falle des statischen Zentralfeldes kann man also auf J und L verzichten. Immerhin ist zu beachten, daß bei $\xi = \eta = 0$ infolge (4.19) die Bedingung (4.24) übergeht in $\varepsilon \neq 1$. Die Integration muß geführt werden von $\varphi = 0$ $(r = \infty)$ an bis zum Minimum von $|r|$, wobei man die Wahl hat, φ durchs Positive oder Negative laufen zu lassen. Man überlegt sich unschwer, daß eine Begegnung mit einem Pol nur vermieden werden kann, wenn

$$\alpha\beta = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \tag{5.13}$$

ist. Vermöge (5.8) folgt daraus, daß die beiden Wurzeln α und β negativen Realteil haben müssen.

Wir haben also zwei Fälle:

I. $\underline{\varepsilon > 1.}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{-1 + i\sqrt{\varepsilon - 1}}{\varepsilon} \\ \beta &= \frac{-1 - i\sqrt{\varepsilon - 1}}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

II. $\underline{0 < \varepsilon < 1.}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}{\varepsilon} \\ \beta &= \frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Die Berechnung liefert nun im ersten Falle zwei Energiewerte und im zweiten — da die negative φ-Achse vermieden werden muß — einen Energiewert:

$$\text{I.} \quad E_1 = -\frac{4\pi\,|D|}{\varkappa}\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon-1}}\exp\left(-\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon-1}}\right) \tag{5.16}$$

$$E_2 = -\frac{4\pi\,|D|}{\varkappa}\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\pi-\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon-1}}\exp\left(-\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon-1}}\right)$$

$$\text{II.} \quad E = -\frac{2\pi\,|D|\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\left(\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{1-\sqrt{1-\varepsilon}}\right)^{-\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon}}}\operatorname{Lg}\left(\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{1-\sqrt{1-\varepsilon}}\right). \tag{5.17}$$

Das Verhältnis der beiden Energien im ersten Falle

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\pi-\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}}{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}} \tag{5.18}$$

ist also durch ε allein bestimmt.

In der Schlußbetrachtung komme ich auf dieses scheinbare Auftreten negativer Massen noch einmal zurück.

§ 6. Die Ladung

Wir knüpfen an (3.3)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{\rho\sigma}}{\partial x_\sigma} = \mathfrak{s}^\rho$$

an und erhalten

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{01}}{\partial x_1} = \mathfrak{s}^0 \tag{6.1}$$

oder, mit Rücksicht auf unsere speziellen Koordinaten

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{01}}{\partial \varphi} = \mathfrak{s}^0\,. \tag{6.2}$$

Es handelt sich also um eine räumliche Ladungsdichte, die über den ganzen Raum integriert werden muß.

Für die zu ermittelnde Ladung e setze ich

$$4\pi\, e = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathfrak{s}^0\, d\lambda \sin\vartheta\, d\vartheta\, |\, d\varphi\, | \tag{6.3}$$

unter der Annahme, daß sowohl die in $\mathfrak{s}^0$ steckende Größe $\sqrt{-G}$ als auch alle Koordinatendifferentiale positiv zu bewerten seien.

Es folgt daher

$$e = \int_0^\infty \frac{\partial \mathfrak{F}^{01}}{\partial \varphi} \, | \, d\varphi \, | \; . \tag{6.4}$$

Für positives φ folgt also

$$e_1 = \mathfrak{F}^{01} \, |_0^{+\infty} \tag{6.5}$$

und für negatives

$$e_2 = \mathfrak{F}^{01} \, |_{-\infty}^{0} \tag{6.6}$$

Für $\mathfrak{F}^{01}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{01} &= \sqrt{-G}\, G^{00}\, G''\, F_{01} \\ &= -\sqrt{-G}\, G^{00}\, G''\, D_1\, \Phi_0 \\ &= |\, f\, h\, r^2 \,| \cdot \frac{1}{f^2\, h^2} \cdot \frac{d\Phi}{d\varphi} \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{F}^{01} = \frac{r^2}{|\, f\, h \,|} \, \frac{d\Phi}{d\varphi} \; . \tag{6.7}$$

Wir betrachten jetzt speziell den Fall I: $\varepsilon > 1$, und erhalten im Anschluß an (5.14)

$$\left.\begin{aligned} \varphi - \alpha &= \frac{1 + \varepsilon\, \varphi - i\sqrt{\varepsilon - 1}}{\varepsilon} = \frac{g}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left[- i \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon - 1}}{1 + \varepsilon\, \varphi} \right) \right] \\ \varphi - \beta &= \frac{1 + \varepsilon\, \varphi + i\sqrt{\varepsilon - 1}}{\varepsilon} = \frac{g}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left[i \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon - 1}}{1 + \varepsilon\, \varphi} \right) \right] \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Dabei wählen wir für die Arcusfunktion ein für allemal denjenigen Zweig, der aus dem Hauptzweig für $\varphi = 0$ durch stetige Fortsetzung hervorgeht.

Speziell für $\varphi = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-1 + i\sqrt{\varepsilon - 1}}{\varepsilon} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp[- i \operatorname{Arc\,tg}(\sqrt{\varepsilon - 1})] \\ \beta &= \frac{-1 - i\sqrt{\varepsilon - 1}}{\varepsilon} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp[i \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{-1})] \; . \end{aligned} \tag{6.9}$$

Die Berechnung liefert dann sukzessive

$$(\varphi - \alpha)^{\frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}} (\varphi - \beta)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}} = \exp\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon - 1}} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon - 1}}{1 + \varepsilon\, \varphi} \right) \right] \tag{6.10}$$

$$(\varphi - \alpha)^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}} (\varphi - \beta)^{\frac{\alpha}{\alpha - \beta}} = \frac{g}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left[- \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - 1}} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon - 1}}{1 + \varepsilon\, \varphi} \right) \right] \tag{6.11}$$

und speziell für $\varphi = 0$

$$A = (-\alpha)^{\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}} (-\beta)^{\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}} = \exp\left[\frac{\operatorname{Arc\,tg}(\sqrt{\varepsilon-1})}{\sqrt{\varepsilon-1}}\right] \tag{6.12}$$

$$B = (-\alpha)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} (-\beta)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A \,. \tag{6.13}$$

Wir erhalten daher die Tafel

$$\boxed{\begin{aligned} g &= \sqrt{1 + 2\varphi + \varepsilon\varphi^2} \\ r &= \frac{D g}{\sqrt{\varepsilon\varphi}} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-1}} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon-1}}{1+\varepsilon\varphi}\right)\right] \\ f &= \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-1}}\left[\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon-1}}{1+\varepsilon\varphi}\right) - \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}\right]\right\} \\ h &= \frac{D}{\sqrt{\varepsilon}\,\varphi^2} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-1}} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon-1}}{1+\varepsilon\varphi}\right)\right] . \end{aligned}} \tag{6.14}$$

Wegen (4.28) und (5.11) haben wir als Potential

$$\Phi = C f \tag{6.15}$$

und es ergibt sich

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = -\frac{C f}{g^2} \,. \tag{6.16}$$

Gestützt auf (6.7), (6.14) und (6.16) erhalten wir schließlich

$$\boxed{\mathfrak{F}^{01}(\varphi) = -\frac{C\,|D|}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-1}} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon-1}}{1+\varepsilon\varphi}\right)\right].} \tag{6.17}$$

Speziell folgt daher

$$\mathfrak{F}^{01}(0) = -\frac{C\,|D|}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-1}} \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}\right] , \tag{6.18}$$

$$\mathfrak{F}^{01}(+\infty) = -\frac{C\,|D|}{\sqrt{\varepsilon}} \,, \tag{6.19}$$

$$\mathfrak{F}^{01}(-\infty) = -\frac{C\,|D|}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left[-\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon-1}}\right] . \tag{6.20}$$

Gemäß (6.5) und (6.6) erhalten wir also schließlich folgende Ladungswerte:

$$e_1 = -\frac{C\,|\,D\,|}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1 - \exp\left[-\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{\varepsilon - 1}}\right)\right] \tag{6.21}$$

$$e_2 = -\frac{C\,|\,D\,|}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{\exp\left[-\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{\varepsilon - 1}} - \exp\left[\frac{-\pi}{\sqrt{\varepsilon - 1}}\right]\right]\right\}. \tag{6.22}$$

Über das Vorzeichen von C läßt sich nichts aussagen. Ja, es ist sogar zweifelhaft, ob es zulässig ist, C und D in beiden Formeln als gleich anzusetzen, da es sich doch schließlich um zwei getrennte Lösungen handelt, die nicht miteinander in Wechselwirkung stehen.

Solange keine schlüssige Entscheidung möglich ist, wollen wir die formal nahegelegte Gleichheit annehmen. Für positives C ergeben sich dann zwei verschiedene negative Ladungen.

Daß dieses seltsame Ergebnis nicht ohne weiteres von der Hand gewiesen werden kann, zeigt sich, wenn man das Potential (6.15) für $r \sim \infty$ approximativ entwickelt und mit dem klassischen Potential vergleicht. Die Entwicklung auf Grund von (6.14) liefert nämlich

$$\Phi = C - \frac{C\,D}{\sqrt{\varepsilon}\,r}\exp\left[-\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{\varepsilon - 1}}\right] + \cdots \tag{6.23}$$

Also erhalten wir als klassisches Potential

$$\Phi^* = \frac{e^*}{r} \tag{6.24}$$

mit der klassischen Ladung

$$e^* = -\frac{C\,D}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left[-\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{\varepsilon - 1}}\right]. \tag{6.25}$$

Dieser Wert stimmt im Betrag also überein mit $\mathfrak{F}^{01}(0)$ gemäß (6.11). Nun aber ist $4\pi\,\mathfrak{F}^{01}(0)$ gerade das Integral der elektrischen Feldstärke, durch das man in der klassischen Theorie den Wert $4\pi e^*$ darstellt. Es ist daher bemerkenswert, daß der Wert $|\,e^*\,|$ in (6.21) mit dem negativen und in (6.22) mit dem positiven Vorzeichen auftritt.

Beim Wert (6.25) respektive (6.23) ist weiter folgendes zu beachten. Wenn man von φ zu $-\varphi$ übergeht und sinngemäß r positiv hält, so muß man gemäß (6.14) D in $-D$ überführen. Unsere beiden Lösungen liefern also tatsächlich für das Grenzpotential (6.23) den Ladungswechsel.

Um eine konkretere Vorstellung zu gewinnen, wollen wir uns die Ladungsdichte

$$\mathfrak{s}^0 = \frac{\partial \mathfrak{F}^{01}}{\partial \varphi}$$

etwas näher ansehen. Aus (6.17) folgt:

$$\mathfrak{s}^0(\varphi) = \frac{\mathfrak{F}^{01}(\varphi)}{g^2} \,. \tag{6.26}$$

Dividiert man durch $\sqrt{-G}$, so erhält man für die invariante Ladungsdichte

$$s^0(\varphi) = -\frac{\varepsilon\, C\, \varphi^4}{D^2 g^4} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon - 1}} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon - 1}\,\varphi}{1 + \varepsilon\,\varphi}\right)\right] . \tag{6.27}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck für kleine φ, also im Außenbezirk, so ergibt sich

$$s^0(\varphi) = -\frac{\varepsilon\, C}{D^2}\varphi^4 (1 - 9\varphi) \,,$$

$$s^0(-\varphi) = -\frac{\varepsilon\, C}{D^2}\varphi^4 (1 + 9\varphi) \,.$$

Die beiden Felder unterscheiden sich also dadurch, daß das erste ein Defizit und das zweite einen Überschuß gegenüber der gemeinsamen mittleren Dichte

$$\tfrac{1}{2}[s^0(\varphi) + s^0(-\varphi)] = -\frac{\varepsilon\, C}{D^2}\varphi^4$$

hat.

Man könnte sich also vorstellen, daß zwei Teilchen immer einen Ausgleich auf eine mittlere Ladungsdichte anstreben. Dann wäre es plausibel, daß gleichartige Teilchen sich abstoßen und ungleichartige sich anziehen.

Im Innenbezirk sind die beiden Dichteverteilungen sehr ungleich. Es gilt

$$\frac{ds^0(\varphi)}{d\varphi} = \frac{4 + 3\varphi}{g^2\varphi}\, s^0(\varphi)$$

und man findet, daß bei $\varphi = -4/3$ ein Maximum der absoluten Dichte ist. Beim zweiten Teilchen sinkt also die Dichte gegen das Zentrum hin wieder ab, während die beim ersten monoton ansteigt.

Auf die Berechnung des Falles II: $0 < \varepsilon < 1$ verzichte ich, da er nur eine Teilchenart liefert und daher weniger interessant zu sein scheint.

§ 7. Schlußbetrachtung

Aus (6.14) entnimmt man, daß für kleine φ, also große r, angenähert gilt

$$g^2 = 1 + \frac{2DB}{r} \tag{7.1}$$

und

$$f^2 = 1 - \frac{2DB}{r} \,. \tag{7.2}$$

Das heißt, daß die erste der Lösungen I, die dem positiven

$$\varphi \sim \frac{DB}{r} \tag{7.3}$$

entspricht, im Außenbezirk das Linienelement einer positiven Masse

$$m_1^* = \frac{8\pi\, DB}{\varkappa\, c^2} \tag{7.4}$$

liefert, obschon nach (5.16) ihr die scheinbar negative Masse

$$m_1 = \frac{E_1}{c^2} = -\frac{4\pi\,|\,D\,|}{\varkappa\, c^2}\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon-1}}\,\exp\left[-\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon-1}}\right] \tag{7.5}$$

zugeschrieben werden muß.

Führt man in (7.4) den aus (6.12) und (6.13) folgenden Wert

$$B = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\exp\left[-\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon-1}}\right] \tag{7.6}$$

ein, so ergibt sich

$$m_1^* = \frac{8\pi D}{\varkappa\, c^2\sqrt{\varepsilon}}\,\exp\left[-\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon-1}}\right] . \tag{7.7}$$

Für das absolute Verhältnis der beiden Massenwerte folgt somit

$$\left|\frac{m_1}{m_1^*}\right| = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon-1}} \,. \tag{7.8}$$

Es wäre wohl verfrüht, schon jetzt gestützt auf die Forderung $|\,m_1/m^*\,| = 1$ eine genaue Bestimmung von ε vornehmen zu wollen.

Zur Orientierung genüge folgende Tabelle

ε	$\left\lvert \frac{m_1}{m_1^*} \right\rvert$
2	$\frac{\pi}{4} = 0{,}785$
3	$\frac{3 \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 0{,}956$
4	$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1{,}209$

Läuft ε von 1 bis ∞, so läuft die rechte Seite von (7.8) ebenfalls monoton von $\frac{1}{2}$ nach ∞.

Für das Verhältnis der beiden zur Lösung I gehörigen Massen folgt nach (5.18)

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\pi - \operatorname{Arc\,tg}(\sqrt{\varepsilon - 1})}{\operatorname{Arc\,tg}(\sqrt{\varepsilon - 1})}. \tag{7.9}$$

Aus den angegebenen Gründen erzeugt m_2 das Feld einer negativen Masse. Da nun in den Bahngleichungen der Einsteinschen Gravitationstheorie die Masse des sich bewegenden Körpers keine Rolle spielt, scheint mir die Vorzeichenbewertung nach dem Feld die richtige zu sein. Wir hätten demnach eine leichtere positive und eine schwerere negative Masse. Wie man sieht, kann m_2/m_1 alle Werte von ∞ bis 1 annehmen, wenn ε von 1 bis ∞ läuft.

Zusammenfassend ist zu sagen: Es liegt eine Kontinuumstheorie vor, die auf Grund einer natürlichen Endlichkeitsbedingung ein asymmetrisches Teilchenpaar liefert. Es ist durchaus möglich, daß weitere Lösungen existieren. Von besonderem Interesse wäre natürlich eine Lösung, die im Außenbezirk das Potential 0 liefert (Neutron).

Von Interesse sind weiter folgende Fragen:

1. Läßt sich eine weitergehende Regularisierung des Linienelements (4.1) erreichen, so daß im Quellpunkt nicht nur f, sondern auch g einen endlichen Wert erhält?
2. Lassen sich die hier entwickelten Gesichtspunkte mit der Wellengeometrie von *Mimura*[4]) und seinen Mitarbeitern verbinden, so daß der Spin von vornherein mitberücksichtigt ist, aber die dort auftretende willkürliche Funktion verschwindet?

(Eingegangen den 12. März 1952.)

[4]) Vgl. die Literaturangaben im Zbl. *17*, S. 237 und 238.