Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1952)

Artikel: Beiträge zur Theorie von Stützfunktionen und Radius.
Autor: Schindler, Johann Jakob
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21278

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Beiträge zur Theorie von Stützfunktion und Radius

Von Johann Jakob Schindler, Bolligen

Der Begriff der Stützfunktion hat in der neueren Differentialgeometrie eine ziemliche Bedeutung erlangt; aber auch im Bereich der klassischen Problemstellungen läßt er sich verwenden, wie W. Scherrer in seinen Arbeiten[1]) gezeigt hat. Es werden darin die Grundgleichungen der Flächentheorie auf diese beiden anschaulichen und orthogonalinvarianten Größen, die relativen Hauptformen und die entsprechenden Krümmungsmaße zurückgeführt. In der zweiten Arbeit werden Radius $R = \mathfrak{x}^2$ und Stützfunktion $P = (-\mathfrak{N}\,\mathfrak{x})^2$ respektive deren reziproker Wert $S = \frac{1}{P}$ selber als Parameter eingeführt, was zu besonders einfachen Grundgleichungen führt. Es folgt dann der Satz, daß eine Fläche, deren Gaußsche Krümmung als Funktion von R und S bekannt ist, durch Vorgabe eines nicht asymptotischen Streifens eindeutig bestimmt wird.

Im Anschluß an diesen Satz liegt die Frage nahe, was für Flächen resultieren, falls zwischen Stützfunktion und Radius selber ein funktioneller Zusammenhang besteht. Diesen Flächen ist die vorliegende Arbeit gewidmet.

Die Problemstellung war anfänglich die, ob neben den Rotationsflächen noch andere Flächen existieren, die der Bedingung

$$P = P(R)$$

genügen. Es hatte dabei den Anschein, als wäre der Gesamtheit dieser Flächen auf Grund von räumlichen Polarkoordinaten beizukommen. Berechnet man nämlich in ihnen P und R, so liefert die Bedingung für die Abhängigkeit dieser beiden Größen eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für R. Sie läßt sich auf eine Gleichung 1. Ordnung zurück-

[1]) *W. Scherrer*, Integralsätze der Flächentheorie, Comment. Math. Helv. **19** (1946). Stützfunktion und Radius I, Comment. Math. Helv. **20** (1947). Stützfunktion und Radius II, Comment. Math. Helv. **25** (1951).

führen für das Verhältnis $\left(\frac{R_u}{R_v}\right)$. Dieses ist denn auch berechenbar; dagegen kann die 2. Stufe der Integration zur Bestimmung von R nicht mehr allgemein durchgeführt werden.

Es hat sich dann als zweckmäßig erwiesen, auf die Grundgleichungen der Flächentheorie zurückzugreifen, und zwar auf eine Form, die W. Scherrer schon vor Jahren in seiner Vorlesung über das Formenproblem zur Darstellung gebracht hat, und die nun kürzlich auch in einem Aufsatz „Zur elementaren Flächentheorie"[2]) erschienen ist. (Bei Bezug auf diese Arbeit soll die dortige Numerierung mit „Sch" gekennzeichnet werden.)

Mit Hilfe dieser speziellen Form der Grundgleichungen ist es leicht möglich, die Klasse der Flächen $P = P(R)$ zu bestimmen. Im besondern wird gezeigt, wie man, von einer beliebigen Raumkurve ausgehend, solche Flächen konstruieren kann. Dabei erkennt man, daß es bei dieser Art der Konstruktion gerade die Böschungslinien sind, welche Anlaß geben zur Erzeugung von Rotationsflächen, während alle andern Raumkurven bei nicht trivialer Wahl der freien Parameter auf Flächen führen, die nicht Rotationscharakter aufweisen.

In einem Anhang werden schließlich einige Eigenschaften angegeben, die man erhält, wenn man im konkreten Fall der Zentralflächen zweiter Ordnung die Parameter R und S einführt.

§ 1. Die Abhängigkeitsbedingung für $P = P(R)$.

Notwendige und hinreichende Bedingung für die Abhängigkeit der Stützfunktion $P = (-\mathfrak{N}\,\mathfrak{x})^2$ vom Radius respektive dessen Quadrat $R = \mathfrak{x}^2$ ist das identische Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} P_u, & P_v \\ R_u, & R_v \end{vmatrix} . \tag{1}$$

Bei Verwendung von Krümmungslinienparametern lassen sich auf Grund der Gleichungen von Rodrigues die Ableitungen von P berechnen:

Die Gleichungen von Rodrigues lauten nach (Sch 10)

$$\mathfrak{N}_u = -\frac{1}{\varrho}\mathfrak{x}_u , \qquad \mathfrak{N}_v = -\frac{1}{\sigma}\mathfrak{x}_v .$$

Durch skalare Multiplikation mit dem Flächenvektor $\mathfrak{x}$ erhält man

$$-\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}_u = \frac{1}{\varrho}\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_u , \qquad -\mathfrak{x}\,\mathfrak{N}_v = \frac{1}{\sigma}\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_v .$$

---

[1]) *W. Scherrer*, Zur elementaren Flächentheorie, Comment. Math. Helv. **26** (1952).

Diese beiden Gleichungen lassen sich auch schreiben

$$(-\mathfrak{N}\,\mathfrak{x})_u = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varrho}(\mathfrak{x}^2)_u\,, \qquad (-\mathfrak{N}\,\mathfrak{x})_v = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma}(\mathfrak{x}^2)_v\,,$$

oder ausgedrückt in P und R

$$(\sqrt{P})_u = \frac{P_u}{2\sqrt{P}} = \frac{1}{2\varrho}R_u\,, \qquad (\sqrt{P})_v = \frac{P_v}{\sqrt{P}} = \frac{1}{2\sigma}R_v\,.$$

Die Ableitungen von P und R sind somit verknüpft durch die Beziehungen

$$P_u = \frac{1}{\varrho}\sqrt{P}\,R_u\,, \qquad P_v = \frac{1}{\sigma}\sqrt{P}\,R_v\,. \tag{2}$$

Die Bedingungsgleichung (1) wird nun

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho}\sqrt{P}\,R_u\,, & \frac{1}{\sigma}\sqrt{P}\,R_v \\ R_u\,, & R_v \end{vmatrix} \equiv 0$$

oder

$$\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\sigma}\right)\sqrt{P}\,R_u\,R_v \equiv 0\,. \tag{3}$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

a) $$\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\sigma}\right) = 0$$

oder

b) $$\sqrt{P} = 0$$

oder endlich

c) $$R_u = 0 \quad \text{bzw.} \quad R_v = 0\,.$$

Die beiden ersten Fälle sind trivial; a) führt auf Kugeln und b) auf Ebenen durch den Ursprung respektive Kegel mit der Spitze im Ursprung. Interessant ist bloß der letzte Fall.

§ 2. Flächen mit der Eigenschaft $R_u = 0$.

Wegen $R = \mathfrak{x}^2$ ist

$$R_u = 2\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_u\,. \tag{4}$$

Aus der ersten Gleichung von Rodrigues $\mathfrak{x}_u = -\varrho\,\mathfrak{N}_u$ bekommt man durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}$: $\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x} = -\varrho\,\mathfrak{N}_u\,\mathfrak{x} = 0$. Das bedeutet, daß $\mathfrak{x}$ senkrecht steht zu $\mathfrak{N}_u$ und sich darstellen läßt

$$\mathfrak{x} = \alpha\,\mathfrak{N} + \beta\,\mathfrak{N}_v\,. \tag{5}$$

Durch Ableitung erhält man

$$\mathfrak{x}_u = \alpha_u \mathfrak{N} + \alpha \mathfrak{N}_u + \beta_u \mathfrak{N}_v + \beta \mathfrak{N}_{uv} \ ,$$
$$\mathfrak{x}_v = \alpha_v \mathfrak{N} + \alpha \mathfrak{N}_v + \beta_v \mathfrak{N}_v + \beta \mathfrak{N}_{vv} \ .$$

Unter Verwendung der Gleichungen (Sch 8) gibt das

$$\mathfrak{x}_u = \left(\alpha + \beta \frac{e_v}{e}\right) \mathfrak{N}_u + \left(\beta_u + \beta \frac{g_u}{g}\right) \mathfrak{N}_v + \alpha_u \mathfrak{N} \ ,$$

$$\mathfrak{x}_v = - \beta \frac{g g_u}{g^2} \mathfrak{N}_u + \left(\alpha + \beta_v + \beta \frac{g_v}{g}\right) \mathfrak{N}_v + (\alpha_v - g^2) \mathfrak{N} \ .$$

Durch Vergleich mit den Beziehungen von Rodrigues bekommt man folgende sechs Bedingungen:

$$\alpha + \beta \frac{e_v}{e} = - \varrho \qquad (6) \qquad\qquad \alpha + \beta_v + \beta \frac{g_v}{g} = - \sigma \qquad (7)$$

$$\beta_u + \beta \frac{g_u}{g} = 0 \qquad (8) \qquad\qquad \beta \frac{g\, g_u}{g^2} = 0 \qquad (9)$$

$$\alpha_u = 0 \qquad (10) \qquad\qquad \alpha_v - \beta g^2 = 0 \qquad (11)$$

Die Bedingung (9) verlangt entweder $\beta = 0$, was zusammen mit (6) und (7) auf Kugeln führt, oder

$$g = g(v) \ , \qquad \text{unabhängig von } u. \qquad (12)$$

Mit dieser Einschränkung ist die Integrabilitätsbedingung (Sch 9)

$$\frac{1}{e\, g} \left[\left(\frac{g_u}{e}\right)_u + \left(\frac{e_v}{g}\right)_v\right] + 1 = 0$$

leicht integrierbar besonders dann, wenn man zusätzlich die erlaubte Annahme trifft, daß der Parameter v die Bogenlänge des Normalenbildes sein soll, was bewirkt, daß

$$g = 1 \qquad (13)$$

wird.

Die Integrabilitätsbedingung wird damit

$$e_{vv} + e = 0 \ , \qquad (14)$$

das heißt

$$e = a(u) \sin v + b(u) \cos v \ . \qquad (15)$$

Mit diesen Ausdrücken vereinfacht sich das System (Sch 8):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{N}_{uu} &= \frac{(a' \sin v + b' \cos v)}{a \sin v + b \cos v} \mathfrak{N} - (a \sin v + b \cos v)(a \cos v - b \sin v) \mathfrak{N}_v \\
&\qquad - (a \sin v + b \cos v) \mathfrak{N} \\
\mathfrak{N}_{uv} &= \frac{a \cos v - b \sin v}{a \sin v + b \cos v} \mathfrak{N}_u \\
\mathfrak{N}_{vv} &= - \mathfrak{N}
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Die dritte dieser Gleichungen hat das Integral

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{a}(u) \sin v + \mathfrak{b}(u) \cos v \ . \tag{17}$$

Dieses Normalenbild $\mathfrak{N}$ hat neben den beiden ersten Gleichungen von (16) auch verschiedene geometrische Eigenschaften zu erfüllen:

1. $\mathfrak{N}^2 = 0$, also $\mathfrak{a}^2 \sin v + \mathfrak{b}^2 \cos v + 2\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \sin v \cos v = 1$ für alle v. Das verlangt, daß

$$\mathfrak{a}^2 = 1 \ , \qquad \mathfrak{b}^2 = 1 \ , \qquad \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \ . \tag{18}$$

2. $\mathfrak{N}_v^2 = g^2 = 1$, was auf die unter 1) angeführten Eigenschaften führt.

3. $\mathfrak{N}_u^2 = e^2$. Nun ist $\mathfrak{N}_u = (\mathfrak{a}' \sin v + \mathfrak{b}' \cos v)$ und $\mathfrak{N}_u^2 = (\mathfrak{a}' \sin v + \mathfrak{b}' \cos v)^2$. Der Vergleich mit $e^2 = (a \sin v + b \cos v)^2$ gibt für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Eigenschaften $\mathfrak{a}'^2(u) = a^2(u)$, $\mathfrak{b}'^2(u) = b^2(u)$, und aus den gemischten Gliedern der Binome schließt man $\mathfrak{a}' \parallel \mathfrak{b}'$.

Nach (18) sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Einheitsvektoren, so daß man die neuen Eigenschaften zusammenfassend schreiben kann

$$\mathfrak{a}' = a\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \ , \qquad \mathfrak{b}' = b\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \ . \tag{19}$$

Wie sich durch Einsetzen leicht zeigen läßt, reichen die Eigenschaften (18) und (19) aus, um auch die beiden ersten Gleichungen von (16) zu erfüllen.

Bevor vermittels der Gleichungen von Rodrigues der Flächenvektor $\mathfrak{x}(u, v)$ bestimmt werden kann, hat man aus dem System (Sch 11)

$$\varrho_v = -(\varrho - \sigma)\frac{e_v}{e} \ , \qquad \sigma_u = -(\sigma - \varrho)\frac{g_u}{g}$$

noch die Hauptkrümmungsradien zu ermitteln. Wegen $g_u = 0$ wird daher

$$\sigma = \sigma(v) \tag{20}$$

beliebig. Zur Bestimmung von ϱ dient die Differentialgleichung

$$\varrho_v + \varrho\frac{a \cos v - b \sin v}{a \sin v + b \cos v} - \sigma\frac{a \cos v - b \sin v}{a \sin v + b \cos v} = 0 \ .$$

Ihr Integral lautet

$$\varrho = \frac{1}{e}\left\{c(u) + a\int_0^v \sigma(w) \cos w\, dw - b\int_0^v \sigma(w) \sin w\, dw\right\} \tag{21}$$

oder mit

$$\left.\begin{aligned} \int_0^v \sigma(w) \cos w \, dw &= \lambda(v) \\ \int_0^v \sigma(w) \sin w \, dw &= \mu(v) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

und

$$\varrho = \frac{1}{e} \{c(u) + a(u)\, \lambda(v) - b(u)\, \mu(v)\} \ . \tag{23}$$

Es verbleibt nur noch die Integration der Gleichungen von Rodrigues. An ihrer Stelle könnten auch die noch nicht ausgewerteten Bedingungsgleichungen (6) bis (11) verwendet werden zur Bestimmung der Faktoren α und β, welche in (5) eingesetzt ebenfalls die gesuchte Fläche ergeben würden.

Die zweite der Rodriguesschen Gleichungen lautet nun

$$\mathfrak{x}_v = -\left(\mathfrak{a}(u) \cdot \sigma(v) \cos v - \mathfrak{b}(u) \cdot \sigma(v) \sin v\right) \ .$$

Für $\mathfrak{x}(u, v)$ kann man daher auch schreiben

$$\mathfrak{x}(u, v) = -\mathfrak{a}(u) \cdot \lambda(v) + \mathfrak{b}(u) \cdot \mu(v) - \mathfrak{c}(u) \ , \tag{24}$$

wo λ und μ die in (22) definierten Funktionen bedeuten.

(24) nach u abgeleitet gibt

$$\mathfrak{x}_u = -\mathfrak{a}' \cdot \lambda + b' \cdot \mu - \mathfrak{c}' \ ,$$

oder bei Verwendung von (19)

$$\mathfrak{x}_u = -[a \cdot \lambda - b \cdot \mu] \cdot [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] - \mathfrak{c}' \ . \tag{25}$$

Andererseits liefert die erste Gleichung von Rodrigues

$$\mathfrak{x}_u = -\mathfrak{a}' \left[\frac{\sin v}{e} (a \cdot \lambda - b \cdot \mu + c)\right] - \mathfrak{b}' \left[\frac{\cos v}{e} (a \cdot \lambda - b \cdot \mu + c)\right] ,$$

oder

$$\mathfrak{x}_u = -[a(u) \cdot \lambda(v) - b(u) \cdot \mu(v) + c(u)] \cdot [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \ . \tag{26}$$

Der Vergleich von (25) und (26) liefert für $\mathfrak{c}$ die Beziehung

$$\mathfrak{c}'(u) = c(u) [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \ . \tag{27}$$

Im weiteren muß noch die Bedingung (4) $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_u = 0$ erfüllt sein. Das bedeutet wegen der Orthogonalität von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$

$$\mathfrak{c} \cdot [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = 0 \ . \tag{28}$$

Daher steht $\mathfrak{c}$ senkrecht auf $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ und läßt sich aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kombinieren

$$\mathfrak{c} = l \cdot \mathfrak{a} + m \cdot \mathfrak{b} \ . \tag{29}$$

Für die Ableitung von $\mathfrak{c}$ bekommt man $\mathfrak{c}' = l'\mathfrak{a} + m'\mathfrak{b} + [la + mb]\cdot[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$. Die ersten beiden Glieder müssen wegen (27) verschwinden, was bedeutet, daß l und m Konstanten sind. Weiter erkennt man wieder durch Vergleich mit (27) die Beziehung

$$c(u) = l\cdot a(u) + m\cdot b(u) \ . \tag{30}$$

Damit bekommt man schließlich den Flächenvektor $\mathfrak{x}(u, v)$

$$\mathfrak{x}(u, v) = -[\lambda(v) + l]\cdot\mathfrak{a} + [\mu(v) - m]\cdot\mathfrak{b} \ , \tag{31}$$

wobei m, l Konstanten, $\lambda = \int_0^v \sigma(w) \cos w \, dw$, $\mu = \int_0^v \sigma(w) \sin w \, dw$.

Dadurch sind die Flächen mit der geforderten Eigenschaft bei Vorgabe der beiden von u allein abhängigen Funktionen $a(u)$ und $b(u)$ aus (15) bestimmt bis auf die Integration der Differentialgleichungen (19) mit den zugehörigen Nebenbedingungen (18).

Zu einer bestimmten Lösung von (19) kann dann immer noch der zum Parameter v gehörige Krümmungsradius $\sigma(v)$ frei gewählt werden. Er geht gemäß (22) ein in die beiden Funktionen $\lambda(v)$ und $\mu(v)$. Weiter kann in (31) über die beiden Parameter l und m willkürlich verfügt werden.

Würde man in diesem Paragraphen nicht ausgehen von der Bedingung $R_u = 0$, sondern von der offenbar äquivalenten $R_v = 0$, so würden in (31) einfach die Rollen der Parameter u und v vertauscht sein.

§ 3. Konstruktion von Flächen mit der Eigenschaft $R_u = 0$ aus einer Raumkurve.

Für den Zusammenhang der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit den skalaren Größen a und b aus (15) gelten die Differentialgleichungen (19) mit den Nebenbedingungen (18).

Für die Ableitung des Produktes $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ bekommt man

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]' = [\mathfrak{a}', \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}'] = a[[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], \mathfrak{b}] + b[\mathfrak{a}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]] = -a\cdot\mathfrak{a} - b\cdot\mathfrak{b} \ . \tag{32}$$

Schreibt man (19) und (32) in der folgenden Reihenfolge

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}' &= \phantom{-a\,\mathfrak{a}} \quad a[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \\ [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]' &= -a\,\mathfrak{a} \qquad\qquad - b\,\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' &= \phantom{-a\,\mathfrak{a}} \quad b[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \ , \end{aligned} \tag{33}$$

so gibt ein Vergleich mit den bekannten Formeln von Frenet für die Ableitungen des eine Raumkurve begleitenden Dreibeins der Tangente $\mathfrak{t}$, Normalen $\mathfrak{n}$ und Binormalen $\mathfrak{b}$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{t}' &= \qquad\quad + \varkappa\,\mathfrak{n} \\
\mathfrak{n}' &= -\varkappa\,\mathfrak{t} \qquad\quad + \tau\,\mathfrak{b} \\
\mathfrak{b}' &= \qquad\quad - \tau\,\mathfrak{n}\,,
\end{aligned}
$$

daß die Vektoren $\mathfrak{a}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ und $\mathfrak{b}$ aufgefaßt werden können als solches Kurvendreibein:

$$
\left.
\begin{array}{rll}
 & \mathfrak{a} \sim \mathfrak{t} & \text{Tangente} \\
- & [\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}] \sim \mathfrak{n} & \text{Normale} \\
 & \mathfrak{b} \sim \mathfrak{b} & \text{Binormale.} \\
\text{Weiter entsprechen sich:} & & \\
 & -\mathfrak{a} \sim \varkappa & \text{Krümmung} \\
 & +\mathfrak{b} \sim \tau & \text{Torsion.}
\end{array}
\right\} \qquad (34)
$$

Bezeichnet man die zugehörige Kurve mit $\mathfrak{y}$, so muß u nun aufgefaßt werden als Bogenlänge auf dieser Kurve.

Zur Konstruktion einer Fläche mit der geforderten Eigenschaft kann man jetzt ausgehen von einer beliebigen Raumkurve, die als Funktion ihrer Bogenlänge u gegeben sei. Man berechnet ihr begleitendes Kurvendreibein sowie Krümmung und Torsion, geht dann auf Grund der Entsprechungen (34) *über zu den Größen der gesuchten Fläche. Mit einem willkürlich gewählten $\sigma(v)$ hat man noch die Funktionen $\lambda(v)$ und $\mu(v)$ zu berechnen, womit die Fläche* (31) *vollständig bestimmt ist.*

§ 4. Rotationsflächen

Die ursprüngliche Problemstellung war die: Gibt es neben der Klasse der Rotationsflächen noch andere Flächen mit der Eigenschaft $P = P(R)$?

Nachdem nun allgemein die Flächen mit dieser Eigenschaft bestimmt sind, ist es nachträglich von Interesse, zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen man durch die Darstellung (31) auf Rotationsflächen geführt wird.

Die beiden Scharen der Krümmungslinien auf Rotationsflächen fallen bekanntlich zusammen mit den Breitenkreisen und den Meridianen. Der Parameter auf diesen letzteren sei v, und entspreche gleichzeitig der Bogenlänge ihres Normalenbildes. Weiter sei $\mathfrak{d}$ die auf die Länge 1 normierte Rotationsachse. Die Rotationsflächen um $\mathfrak{d}$ sind dann charakterisiert durch die beiden Bedingungen

$$
\left.
\begin{aligned}
(\mathfrak{x}^2)_u &= R_u = 0 \\
(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{d})_u &= 0\,.
\end{aligned}
\right\} \qquad (35)
$$

Die erste Bedingung für sich allein führt, wie eben gezeigt, auf die Flächen (31). Welche Bedingungen müssen diese Flächen zusätzlich erfüllen, um auch der zweiten Beziehung von (35) zu genügen?

Es soll also gelten $\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{d} = 0$. Für $\mathfrak{x}_u$ bekommt man aber

$$\mathfrak{x}_u = -\{[l + \lambda]\, a + [m - \mu]\, b\} \cdot [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \; .$$

Somit

$$\{[l + \lambda]\, a + [m - \mu]\, b\} \cdot [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \cdot \mathfrak{d} = 0 \; . \tag{36}$$

Das Verschwinden des Klammerausdruckes ist weiter nicht interessant; also muß sein $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \cdot \mathfrak{d} = 0$. Das heißt: $\mathfrak{d}$ liegt in der Ebene von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{d} = \zeta \cdot \mathfrak{a} + \eta \cdot \mathfrak{b} \; .$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}' &= 0 \\ &= \zeta' \, \mathfrak{a} + \eta' \, \mathfrak{b} + (\zeta\, a + \eta\, b)[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \; . \end{aligned} \tag{38}$$

Wegen der Orthogonalität des Dreibeins $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ müssen die Komponenten von (38) einzeln verschwinden, was bedeutet, daß ζ und η Konstanten sind, und b proportional a ist.

Bei Übertragung auf die Raumkurve bedeutet dies Proportionalität ihrer Krümmung und Torsion; diese Eigenschaft kennzeichnet aber die Böschungslinien.

Die Bedingung dafür, daß nach dem am Schluß des Paragraphen 3 angegebenen Konstruktionsprinzip eine andere als eine Rotationsfläche erzeugt wird, ist somit die Vorgabe einer Raumkurve, die keine Böschungslinie ist.

Anhang

Die Zentralflächen zweiter Ordnung dargestellt durch Radius und Stützfunktion

Die Parameterdarstellung in R und S für die Zentralflächen zweiter Ordnung

$$F(\mathfrak{x}) = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0 \tag{1}$$

lautet

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{A^2}{(A - B)(A - C)} [R + BCS - B - C] \\ y^2 &= \frac{B^2}{(B - C)(B - A)} [R + CAS - C - A] \\ z^2 &= \frac{C^2}{(C - A)(C - B)} [R + ABS - A - B] \; . \end{aligned} \tag{2}$$

Der Parameterbereich in der (RS)-Ebene ist bestimmt als Durchschnitt dreier Halbebenen, deren Randgeraden sich in den drei Punkten

$$\begin{cases} R_1 = A \\ S_1 = \dfrac{1}{A} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_2 = B \\ S_2 = \dfrac{1}{B} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_3 = C \\ S_3 = \dfrac{1}{C} \end{cases} \tag{3}$$

schneiden, die alle auf der Hyperbel $RS = 1$ liegen. Er ist für jeden Oktant der gleiche und wird daher achtfach überdeckt.

Parallelschnitte zu einer Koordinatenebene $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ bilden sich im (RS)-Bereich als Parallelen zu den Randgeraden ab.

Weiter zeigt sich, daß eine beliebige Gerade in der (RS)-Parameterebene das Bild einer Kurve auf der Zentralfläche zweiter Ordnung ist, die sich durch Orthogonalprojektion auf eine der drei Koordinatenebenen als Kegelschnitt abbildet. Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung.

Der Zusammenhang zwischen den (RS)- und den Krümmungslinienparametern u und v ist gegeben durch die zwei Beziehungen

$$S = \frac{u \cdot v}{ABC} \quad ; \qquad R = u + v + (A + B + C) \; . \tag{4}$$

Die Schar der Krümmungslinien im (RS)-Parameterbereich besitzt daher als Enveloppe die Parabel

$$[R - (A + B + C]^2 = 4ABC\,S \; . \tag{5}$$

Diese wird durch die Randgeraden des Bereiches in den Punkten

$$\begin{cases} R_1 = B + C - A \\ S_1 = \dfrac{A}{BC} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_2 = C + A - B \\ S_2 = \dfrac{B}{CA} \end{cases} \qquad \begin{cases} R_3 = A + B - C \\ S_3 = \dfrac{C}{AB} \end{cases} \tag{6}$$

tangiert.

Berechnet man noch die Gaußsche Krümmung K, so erhält man

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{ABC\,S^2} \; . \tag{7}$$

Man sieht daraus, daß auf den Zentralflächen zweiter Ordnung das Kurvennetz konstanter Gaußscher Krümmung identisch ist mit demjenigen konstanter Stützfunktion.

(Eingegangen den 22. April 1952.)