Extremallängen und Kapazität.

Autor(en): **Pfluger, Albert**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **29 (1955)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23282

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Extremallängen und Kapazität

von Albert Pfluger, Zürich

Meinem verehrten Kollegen M. Plancherel zum siebzigsten Geburtstag

Im Anschluß an die von *Ahlfors* und *Beurling* ([1]) eingeführte Extremallänge einer Kurvenschar stellen wir uns folgendes Problem: Es sei im Einheitskreis $|z|<1$ eine Jordankurve Γ_0 und auf der Peripherie eine Punktmenge E gegeben; $J = J(E)$ sei die Gesamtheit der Wege, die Γ_0 im Einheitskreis mit Punkten aus E verbinden. Unter welchen Bedingungen für E ist die Extremallänge von J unendlich? Es wird gezeigt, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn die äußere Kapazität von E verschwindet (Satz 1). Wegen der konformen Invarianz der Extremallänge ergeben sich Anwendungen auf die konforme Abbildung (Satz 2), die quasikonforme Abbildung des Kreises auf sich (Satz 4) sowie auf eine Klasse von meromorphen Funktionen im Einheitskreis hinsichtlich ihrer asymptotischen Werte (Satz 3).

1. Wir betrachten in der euklidischen oder in der funktionen-theoretischen Ebene Kurvenmengen von zweierlei Art:

1. Mengen von Wegen j, bezeichnet mit J;
2. Mengen von Kurven c, die das stetige Bild des halboffenen Intervalls $0 \leqq t < 1$ sind; solche Mengen bezeichnen wir mit C.

Es sei $z(t)$ $(0 \leqq t < 1)$ eine Parameterdarstellung einer Kurve aus C und E eine Punktmenge. Existiert eine Folge $t_n \to 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z(t_n) = \zeta \in E$, so sagen wir, diese Kurve komme der Menge E bzw. dem Punkt ζ aus E beliebig nahe.

Irgendeine Kurvenmenge bezeichnen wir mit M, ihre Elemente mit μ. Wir definieren ihre Extremallänge λ_M in einer von *J. Hersch* ([6]) gegebenen Modifikation folgendermaßen: Es sei $\varrho(z)$ eine in der ganzen Ebene erklärte nicht-negative Funktion. Sie definiert eine Metrik $d\sigma = \varrho(z)\cdot|dz|$. allerdings ohne irgendwelche Regularitätsvoraussetzungen. Insbesondere ist sie überall dort ausgeartet, wo ϱ verschwindet. Das untere Darbouxsche Integral $\underline{\int}_\mu \varrho(z)\,|dz|$, als Kurvenintegral im Cauchyschen Sinne, kann als Länge von μ und das obere Darbouxsche Integral

$$A(\varrho) = \overline{\int} \varrho^2(z)\,dx\,dy$$

als Flächeninhalt der Ebene in bezug auf die Metrik ϱ interpretiert werden. Wir nennen ϱ zulässig für die Kurvenmenge M, wenn $\int_\mu \varrho \cdot |dz| \geqq 1$ ist für jedes $\mu \in M$. Die untere Grenze der $A(\varrho)$ für alle zulässigen ϱ ist eine nicht-negative Zahl oder ∞. Ihr reziproker Wert ist die Extremallänge λ_M der Kurvenmenge M. Der zugrunde gelegte Integralbegriff macht es möglich, sich bei diesem Variationsproblem auf stetige ϱ zu beschränken. Aus der Definition folgt unmittelbar

1. die Monotonieeigenschaft: Für $M' \subset M$ ist $\lambda_{M'} \geqq \lambda_M$.
2. die konforme Invarianz: Wird ein Gebiet, das die Kurvenmenge M (außer eventuell ihren Endpunkten) enthält, konform abgebildet und ist M' die Menge der Bildkurven, so gilt $\lambda_{M'} = \lambda_M$.

Kapazität verstehen wir im logarithmischen Sinne. Ist die beschränkte und abgeschlossene Punktmenge A der Rand eines Gebietes, das den unendlich fernen Punkt enthält, und $g(z, \infty)$ die Greensche Funktion dieses Gebietes mit dem Pol in ∞, so ist $\lim\limits_{z \to \infty} (g(z, \infty) - \ln |z|) = \gamma_A$ die Robinsche Konstante und $\operatorname{Cap} A = e^{-\gamma_A}$ die Kapazität von A. Für eine offene Menge O auf der Kreisperipherie $|z| = 1$ ist die Kapazität definiert durch $\operatorname{Cap} O = \operatorname{Sup}\limits_{A \subset O} \operatorname{Cap} A$ und die äußere Kapazität einer beliebigen Menge E auf $|z| = 1$ durch $\overline{\operatorname{Cap}}\, E = \operatorname{Inf}\limits_{O \supset E} \operatorname{Cap} O$ ([3]). Entsprechend ist $\gamma_0 = \operatorname{Sup}\limits_{A \subset O} \gamma_A$ die Robinsche Konstante für O und $\gamma_E = \operatorname{Inf}\limits_{O \supset E} \gamma_0$ die (äußere) Robinsche Konstante für E. Eine abgeschlossene Punktmenge ist dann und nur dann von der Kapazität null, wenn sie vom absoluten harmonischen Maß null ist ([9]).

2. Für die spätern Anwendungen beweisen wir zunächst

Lemma 1. *Es sei E eine abgeschlossene Punktmenge von der Kapazität 0, G ihre (zusammenhängende) Komplementärmenge, Γ_0 eine Jordankurve in G und C irgendeine Menge von Kurven, die auf Γ_0 beginnen und in G verlaufend der Menge E beliebig nahekommen. Dann ist ihre Extremallänge λ_C unendlich.*

Beweis. Wir schöpfen das Gebiet G durch eine wachsende Folge von kompakten Teilgebieten G_n aus, deren Ränder Γ_n je aus endlich vielen Jordankurven bestehen. G_0 ist das von dem Γ_0 des Lemmas berandete Gebiet. u_n bezeichne die in $G_n - \overline{G}_0$ harmonische Funktion, die auf Γ_0 verschwindet und auf Γ_n den Wert 1 annimmt. Die Folge u_n ist monoton abnehmend und konvergiert gegen eine harmonische Grenz-

funktion u, und für die Dirichletintegrale gilt $\lim_{n\to\infty} D(u_n) = D(u)$. Unabhängig von der Wahl des Γ_0 und der Ausschöpfung $\{G_n\}$ ist entweder $u \equiv 0$ oder $u > 0$ in $G - \overline{G_0}$ ([9]). Im ersten Fall ist $\operatorname{Cap} E = 0$, im zweiten $\operatorname{Cap} E > 0$.

Nach Voraussetzung ist $\operatorname{Cap} E = 0$, also $\lim D(u_n) = 0$. $\varrho(z) = |\operatorname{grad} u_n|$ ist für die Kurvenmenge C zulässig. Betrachten wir nämlich von einer beliebigen Kurve c aus C ein (sicher vorhandenes) Teilstück c_1, das Γ_0 innerhalb $G_n - \overline{G_0}$ mit Γ_n verbindet, so ist

$$1 = \int_{c_1} du_n \leqq \int_{c_1} |\operatorname{grad} u_n| \, |dz| \, .$$

Aus $A(\varrho) = D(u_n)$ folgt dann $\lambda_C = \infty$.

Betrachten wir nun ein Gebiet G und auf seinem Rand eine abgeschlossene Punktmenge E. Ist J die Menge der Wege, welche eine Jordankurve Γ_0 in G innerhalb G mit E verbinden, so gilt im Falle $\operatorname{Cap} E = 0$ nach Lemma 1 $\lambda_J = \infty$. Daß mit $\operatorname{Cap} E > 0$ auch $\lambda_J < \infty$ wäre, ist im allgemeinen nicht zu erwarten. Für den Kreis hingegen gibt es eine solche Umkehrung. Es gilt sogar folgende schärfere und allgemeinere Aussage:

Satz 1 (Hauptsatz). *Es sei E eine beliebige Punktmenge auf der Kreisperipherie $|z| = 1$, Γ_0 eine (den Nullpunkt umschließende) Jordankurve in $|z| < 1/3$ und $J = J(E)$ die Gesamtheit der Wege j, welche Γ_0 innerhalb $|z| < 1$ mit (den Punkten von) E verbinden. Zwischen der Robinschen Konstanten $\gamma = \gamma_E$ und der Extremallänge $\lambda = \lambda_{J(E)}$ besteht die Ungleichung*

$$2\gamma + k \leqq 2\pi\lambda \leqq 2\gamma + K \, , \tag{1}$$

wo die positiven Größen k und K nur von Γ_0 abhängig sind. Insbesondere ist λ dann und nur dann unendlich, wenn $\gamma = \infty$ oder die (äußere) Kapazität von E verschwindet.

Der Beweis dieses Satzes wird in drei Schritten geführt.

1. Schritt: E ist eine abgeschlossene Menge A, bestehend aus endlich vielen disjunkten Intervallen $I_1, I_2, \ldots, I_n$.
2. Schritt: E ist eine beliebige offene Menge O.
3. Schritt: E ist eine beliebige Menge.

3. *Erster Schritt.* E ist die Vereinigungsmenge A von endlichvielen abgeschlossenen Intervallen $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Γ_0 und die Kreisperipherie $|z| = 1$ beranden ein Gebiet G. $h(z)$ ist die in G harmonische Funk-

tion, die auf Γ_0 verschwindet, auf A den Wert 1 annimmt und auf den zu A komplementären Kreisbogen eine verschwindende Normalableitung besitzt. Es ist $\varrho = |\operatorname{grad} h|$ zulässig und deshalb

$$D(h) = A(\varrho) \geqq \lambda^{-1} . \tag{2}$$

Setzen wir

$$\int_{\Gamma_0} dh^* \quad (= D(h)) = 2\pi/a \tag{3}$$

(h^* bezeichnet die zu h konjugierte harmonische Funktion), so liefert $w = e^{a(h+ih^*)}$ die konforme Abbildung des Gebietes G auf den mit endlichvielen radialen Einschnitten versehenen Kreisring $1 < |w| < e^a$, die von der äußern Kontur ausgehen und den zu A komplementären Kreisbogen entsprechen. Mit (Φ) bezeichnen wir den radialen Querschnitt $w = Re^{i\Phi}$, $1 \leqq R \leqq e^a$, dieses Gebietes G_w, wobei Φ von den Argumenten der genannten Einschnitte verschieden sein soll. Jedem solchen Querschnitt entspricht in G vermittels der konformen Abbildung ein Jordanbogen aus $J(A)$.

Ist nun $\varrho(z)$ irgendeine zulässige Metrik für $J(A)$, so wird mit $\varrho_1(w) = \varrho(z(w)) \left|\frac{dz}{dw}\right|$ für alle (Φ)

$$1 \leqq \left(\int_{(\Phi)} \varrho_1 \cdot |dw|\right)^2 \leqq \int_{(\Phi)} \varrho_1^2 \, R dR \cdot \int_{(\Phi)} \frac{dR}{R} = a \int_{(\Phi)} \varrho_1^2 \, R dR .$$

Durch Integration bezüglich Φ folgt gemäß (3)

$$D(h) = 2\pi/a \leqq \int_{G_w} \varrho_1^2 R dR d\Phi = \int_G \varrho^2 dx dy \leqq A(\varrho)$$

und in Verbindung mit (2)

$$D(h) = \lambda^{-1} . \tag{4}$$

4. Nun sei $g(z,\infty)$ die Greensche Funktion des von A auf der funktionentheoretischen Ebene berandeten Gebietes mit dem Pol in ∞. Dann ist $g(z) = \ln|z| + \gamma_A + o(1)$ für $z \to \infty$, $\gamma_A \geqq 0$ und

$$u(z) = \gamma_A - g = -\int_A \ln|z - e^{i\theta}| \, d\mu_\theta \tag{5}$$

das sogenannte Gleichgewichtspotential für A. Die Funktion

$$U(z) = u(z) + u\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \tag{6}$$

ist symmetrisch zum Einheitskreis; sie hat in 0 und ∞ einen negativen

logarithmischen Pol und auf A den Wert 2γ; längs der zu A komplementären Bogen des Einheitskreises verschwindet ihre Normalableitung. Für die Funktion $(U+k)^+$ liefert die Greensche Formel $D(U+k)^+ = 4\pi(2\gamma+k)$ und bei Beschränkung auf den Einheitskreis, wegen der Symmetrie von $(U+k)^+$,

$$D_{|z|<1}(U+k)^+ = 2\pi(2\gamma+k) \tag{7}$$

Nun ist

$$(1-r)^2/r \leqq |z-e^{i\theta}| \cdot |1/\bar{z}-e^{i\theta}| \leqq (1+r)^2/r$$

für $|z| = r$. Mit $K(r) = \ln(1+r)^2/r$ und $k(r) = \ln(1-r)^2/r$ folgt dann gemäß (5) und (6)

$$-K(r) \leqq U(z) \leqq -k(r) \ . \tag{8}$$

Wir setzen $r_1 = \underset{z\in\Gamma_0}{\mathrm{Min}}\,|z|$, $r_2 = \underset{z\in\Gamma_0}{\mathrm{Max}}\,|z|$ $(<1/3)$, $K = K(r_1)$ und $k = k(r_2)$ (>0).

Die in Nr. 3 eingeführte Funktion $h(z)$ kann längs der zu A komplementären Kreisbogen durch Spiegelung fortgesetzt werden und wir erhalten eine zu $|z| = 1$ symmetrische Funktion h, die auf Γ_0 und der symmetrischen Kurve Γ_0' verschwindet, auf dem von Γ_0, Γ_0' und A berandeten Gebiet $\hat{G}$ harmonisch ist und auf A den Wert 1 annimmt. Gemäß (8) ist anderseits $U+K$ auf Γ_0 positiv und $U+k$ dort negativ; also nach dem Maximumprinzip

$$\frac{U(z)+K}{2\gamma+K} \geqq h(z) \geqq \frac{U(z)+k}{2\gamma+k}$$

in $\hat{G}$ und daher

$$\frac{D_{|z|<1}(U+K)^+}{(2\gamma+K)^2} \leqq D_G(h) \leqq \frac{D_{|z|<1}(U+k)^+}{(2\gamma+k)^2} \ .$$

Aus (7) und (4) folgt dann die Ungleichung (1) für $\gamma = \gamma_A$ und $\lambda = \lambda_{J(A)}$.

5. *Zweiter Schritt.* E ist eine beliebige offene Menge O. $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ seien die disjunkten offenen Intervalle, aus denen O besteht, $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ die entsprechenden abgeschlossenen Intervalle und A_n die Vereinigungsmenge der $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Es ist $\gamma_O = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_{A_n}$ und $\lambda_{J(O)} \leqq \lambda_{J(A_n)}$, also gemäß dem ersten Schritt $2\pi\lambda_{J(O)} \leqq 2\gamma_{A_n} + K$ für alle A_n, womit die rechte Seite der Doppelungleichung (1) für offene Mengen schon bewiesen ist.

Der Beweis der linken Seite der Doppelungleichung (1) ist weniger

trivial. h_n sei die in Nr. 3 eingeführte, zu A_n gehörige harmonische Funktion. Mit $n \uparrow \infty$ ist h_n monoton wachsend und beschränkt, konvergiert also in G lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Grenzfunktion h, die auf O den Wert 1 annimmt und auf Γ_0 verschwindet. Daher ist $\varrho = |\operatorname{grad} h|$ eine für $J(O)$ zulässige Metrik mit $A(\varrho) = D(h) \geqq \lambda_{J(O)}^{-1}$. Anderseits ist nach (4) $D(h_n) = \lambda_{J(A_n)}^{-1}$. Nun werden wir zeigen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} D(h_n) = D(h)$ ist; daraus folgt dann wegen $\lambda_{J(A_n)} \geqq \lambda_{J(O)}$ die Beziehung $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{J(A_n)} = \lambda_{J(O)}$. Diese liefert aber zusammen mit $\gamma_O = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_{A_n}$ die Gültigkeit der linken Seite von (1) für offene Mengen.

Es verbleibt noch zu zeigen, daß $\lim D(h_n) = D(h)$ ist. Hiefür bemerken wir, daß h_n bekanntlich die folgende Extremaleigenschaft hat: Ist u in G harmonisch, gleich 0 auf Γ_0 und gleich 1 auf A_n, so ist $D(h_n) \leqq D(u)$. Daher ist $D(h_m) > D(h_n)$ für $m > n$. Die wachsende Folge $D(h_n)$ ist offenbar beschränkt und daher konvergent. Aus derselben Extremaleigenschaft folgt $D(h_n, h_m - h_n) = 0$ für $m > n$. Demnach ist $D(h_m - h_n) = D(h_m) - D(h_n)$ und somit $\lim\limits_{m,n\to\infty} D(h_m - h_n) = 0$. Hieraus schließt man nach bekanntem Verfahren, daß $\lim D(h - h_n) = 0$ und daher $\lim D(h_n) = D(h)$ ist.

6. *Dritter Schritt.* E ist eine beliebige Punktmenge.

1. Es sei $\gamma = \gamma_E$ die (äußere) Robinsche Konstante für E. Dann existiert eine Folge von offenen Mengen O_n mit $E \subset O_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_{O_n} = \gamma_E$. Wegen $\lambda_{J(E)} \geqq \lambda_{J(O_n)}$ folgt gemäß dem zweiten Schritt

$$2\gamma_{O_n} + k \leqq 2\pi\lambda_{J(E)}$$

für alle O_n und daher die linke Seite der Doppelungleichung (1) für $\lambda = \lambda_{J(E)}$ und $\gamma = \gamma_E$. Insbesondere ist mit γ_E auch $\lambda_{J(E)}$ unendlich.

2. Es sei jetzt $\lambda = \lambda_{J(E)}$ gegeben. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein zulässiges und stetiges $\varrho(z)$ mit $A(\varrho) < \lambda^{-1} + \varepsilon$. Wir setzen

$$f(e^{i\varphi}) = \operatorname*{Inf}_{(j)} \int_j \varrho \, |dz| \, ,$$

wo alle jene Wege j zur Konkurrenz zugelassen sind, die Γ_0 mit $e^{i\varphi}$ innerhalb $|z| < 1$ verbinden. $f(e^{i\varphi})$ ist stetig. Für jedes $j \in J(E)$ ist $\int_j \varrho \, |dz| \geqq 1$ und daher $f \geqq 1$ für $e^{i\varphi} \in E$. Die Punkte $e^{i\varphi}$ mit

$$f > \delta = \sqrt{\frac{\lambda^{-1} + \varepsilon}{\lambda^{-1} + 2\varepsilon}}$$

bilden also eine offene Menge O, die E enthält. Es ist $\int_j \varrho \, |dz| > \delta$ für

alle $j \in J(O)$ und somit $\varrho_1 = \varrho/\delta$ eine zulässige Metrik für $J(O)$ mit $A(\varrho_1) < \lambda^{-1} + 2\varepsilon$. Es ist also $\lambda_{J(O)} > 1/\lambda^{-1} + 2\varepsilon$ und daher nach dem zweiten Schritt $2\pi/\lambda^{-1} + 2\varepsilon < 2\gamma_O + K$. Da ε beliebig war, so folgt daraus die Gültigkeit der rechten Seite der Doppelungleichung (1) für $\lambda = \lambda_{J(E)}$ und $\gamma = \gamma_E$. Insbesondere ist mit λ_E auch γ_E unendlich.

Damit ist der Beweis von Satz 1 erbracht.

7. *Anwendung auf konforme Abbildung.* Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ein Randelement (Primende) von G gehört zu einem Randpunkt ζ, wenn ζ ein Hauptpunkt dieses Randelementes ist. Wir sagen, daß ein Randelement zu einer Menge E von Randpunkten gehört, wenn es zu einem Punkt aus E gehört. Ist ζ ein erreichbarer Randpunkt, so definiert jeder in ζ endende Weg des Gebietes ein erreichbares Randelement. Die zu einem Randpunkt gehörigen Randelemente (auch die erreichbaren Randelemente allein) können die Mächtigkeit des Kontinuums haben. Es gilt aber

Satz 2. *Ist die abgeschlossene Punktmenge E auf dem Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes von der Kapazität null und bildet man das Gebiet konform auf einen Kreis ab, so entspricht auf der Kreisperipherie den zu E gehörigen Randelementen eine Punktmenge der (äußern) Kapazität* 0.

Dieser Satz, der erstmals von *J. Dufresnoy* ([4]) bewiesen wurde, ergibt sich sofort aus Satz 1 und Lemma 1 auf Grund des folgenden bekannten Satzes von *E. Lindelöf* ([8]), vgl. auch [5], p. 65): Liefert $z(w)$ die konforme Abbildung des Kreises K auf das Gebiet G, ist ω ein Punkt der Kreisperipherie und e das entsprechende Randelement von G, so kommt $z(w)$ jedem Hauptpunkt von e beliebig nahe, wenn w in K auf irgendeinem Weg gegen ω strebt. Ist also $w(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ eine Parameterdarstellung dieses Bogens mit $w(1) = \omega$ und ζ ein Hauptpunkt von e, so gilt $\liminf\limits_{t \to 1} | z(w(t)) - \zeta | = 0$.

Es sei nun E' die Menge auf der Kreisperipherie, welche den zu E gehörigen Randelementen entspricht, Γ'_0 eine Jordankurve innerhalb K und J die Gesamtheit der Wege, die Γ'_0 in K mit E' verbinden. Der Abbildung von K auf G entsprechend sei Γ_0 die Bildkurve von Γ'_0 und C die Bildmenge von J. Die letztere besteht nach dem Lindelöfschen Satz aus Kurven, die auf Γ_0 beginnen und in G verlaufend der Randmenge E beliebig nahe kommen. Nach Lemma 1 ist $\lambda_C = \infty$, wegen der konformen Invarianz auch $\lambda_J = \infty$, und nach Satz 1 $\overline{\mathrm{Cap}}\, E' = 0$.

Reduziert sich E auf einen einzigen Punkt, so besagt der Satz: *Den zu*

einem Randpunkt gehörigen Randelementen entspricht auf der Kreisperipherie eine Menge von der (äußern) Kapazität 0.

8. Eine in $|z|<1$ meromorphe Funktion $w(z)$ erzeugt eine Überlagerungsfläche der w-Ebene. Das Integral

$$F(w) = \int\limits_{|z|<1} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2} \cdot dx\,dy$$

bedeutet den sphärischen Flächeninhalt dieser Überlagerungsfläche. Analog zu dem in Nr. 7 erwähnten Lindelöfschen Satze gilt

Lemma 2. *Ist $w(z)$ in $|z|<1$ meromorph, $F(w)<\infty$ und $\lim w(z) = a$ (a irgendein komplexer Wert oder ∞), wenn z auf einem Weg gegen $e^{i\varphi}$ strebt, so gilt*

$$\liminf |w(z) - a| = 0 \quad \textit{bzw.} \quad \limsup |w(z)| = \infty\ ,$$

wenn z auf irgendeinem Weg gegen $e^{i\varphi}$ strebt.

Beweis. Wir bezeichnen den Durchschnitt der Kreislinie $|z - e^{i\varphi}| = t$ und des Einheitskreises $|z|<1$ mit β_t, setzen $z - e^{i\varphi} = t \cdot e^{i\theta}$ und

$$L(t) = \int\limits_{\beta_t} \frac{|w'|\,t\,d\theta}{1+|w|^2}\,.$$

Dann folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$L^2(t) \leqq \pi t \cdot \int\limits_{\beta_t} \frac{|w'|^2\,t\,d\theta}{(1+|w|^2)^2}$$

und nach Division durch t und Integration bezüglich t

$$\int\limits_0 \frac{L^2(t)}{t}\,dt < \pi F(w)\ .$$

Es gibt also eine Folge $t_n \to 0$ mit $\lim L(t_n) = 0$, das heißt die sphärische Länge der Bildkurven von $\beta_n = \beta_{t_n}$ strebt gegen null. Wählen wir also auf jedem β_n irgendeinen Punkt z_n, so ist $\lim w(z_n) = a$. Da nun jeder Weg, der in $e^{i\varphi}$ endet, die Querschnitte β_n trifft, so folgt sofort die Behauptung.

Es sei $w(z)$ wieder eine in $|z|<1$ nicht-konstante meromorphe Funktion mit $F(w)<\infty$. Wir betrachten die Menge E der Punkte $e^{i\varphi}$, in denen $w(z)$ den asymptotischen Wert 0 hat, das heißt, daß zu jedem $e^{i\varphi} \in E$ ein Weg existiert, der in $e^{i\varphi}$ endet, und $\lim w(z) = 0$ ist, wenn z auf diesem Bogen gegen $e^{i\varphi}$ strebt. Wir suchen hinreichende Bedingungen dafür, daß die Kapazität von E verschwindet.

Im Falle radialer asymptotischer Werte ist diese Frage von *A. Beurling* ([2]) behandelt und kürzlich von *M. Tsuji* ([10]) wieder aufgegriffen worden[1]).

Die Auszeichnung des Wertes 0 ist nur scheinbar. Denn es ist $F(w)$ gegenüber Kugeldrehungen invariant.

9. Da $w(z)$ nicht konstant ist, gibt es eine einfache Stelle z_0 mit $w(z_0) \neq 0$. Wir wählen um z_0 herum einen so kleinen Kreis Γ_0, daß sein Bild Γ_0' eine Jordankurve ist, die den Nullpunkt nicht umschließt. J sei die Menge der Wege, die im Einheitskreis Γ_0 mit E verbinden. Die Bildmenge C besteht nach Lemma 2 aus den Kurven, die von Γ_0' ausgehend dem Nullpunkt beliebig nahe kommen. Es ist offenbar $\lambda_C = \infty$. Da $w(z)$ nicht schlicht ist, kann man nicht schließen, daß auch $\lambda_J = \infty$ sei[2]). Unter gewissen zusätzlichen Bedingungen wird dies aber der Fall sein.

Wir setzen $\varrho'(w) = \sigma(w)/1 + |w|^2$ und nennen $\sigma(w)$ zulässig, wenn ϱ' für die Menge C zulässig ist. Dann ist $\varrho(z) = \varrho'(w(z)) \cdot |w'(z)|$ zulässig für J. Denn für ein $j \in J$ und ihre Bildkurve $c \in C$ gilt

$$\int_j \varrho(z)\,|dz| = \int_C \varrho'(w)\,|dw| \geqq 1 .$$

Anderseits ist

$$A(\varrho) = \int_{|z|<1} \varrho^2 dx\,dy = \int_{|z|<1} \sigma^2(w) \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,dx\,dy .$$

Damit nun $\lambda_J = \infty$ sei, muß es zulässige $\sigma(w)$ mit beliebig kleinen $A(\varrho)$ geben. Die globale Bedingung $F(w) < \infty$ wird hiefür kaum genügend sein, da die Stärke der von $w(z)$ erzeugten Überlagerungsfläche über der Umgebung von $w = 0$ von ausschlaggebender Bedeutung ist. Die implizite Bedingung, wonach $A(\varrho)$ für alle zulässigen σ die untere Grenze null haben soll, läßt sich leicht in eine etwas schwächere, aber explizite Bedingung verwandeln.

Wir wählen ein positives r_0 so klein, daß die Kreisscheibe $|w| < r_0$ mit Γ_0' punktfremd ist und setzen für $0 < r < r_0$

$$\sigma(w) = \frac{1 + r_0^2}{\ln r_0/r} \cdot \frac{1}{|w|}$$

im Kreisring $r \leqq |w| \leqq r_0$ und $\sigma(w) = 0$ außerhalb. Für dieses $\sigma(w)$,

---

[1]) Es ist zu bemerken, daß in *Beurlings* Resultat und im nachfolgenden Satz 3 die Punktmenge von der *äußern* Kapazität null, bei *Tsuji* aber von der *innern* Kapazität null ist. Statt (10) steht bei *Beurling* und *Tsuji* die schärfere Bedingung $S(t) = O(t^2)$.

[2]) Bei nicht-schlichten Abbildungen kann die Extremallänge nicht verkleinert werden ([6]).

das zulässig ist und außer von w noch von den Parametern r und r_0 abhängig ist, wird

$$A(\varrho) = \left(\frac{1 + r_0^2}{\ln r_0/r}\right)^2 \int\limits_{r<|w(z)|<r_0} \frac{1}{|w|^2} \cdot \frac{|w'|^2}{(1 + |w|^2)^2}\, dx\, dy\,. \tag{9}$$

Integriert wird in $|z| < 1$ über jenes Gebiet, in dem $|w(z)|$ zwischen den Grenzen r und r_0 liegt. Das Integral hat eine einfache geometrische Bedeutung: Bei der von $w(z)$ erzeugten Überlagerungsfläche der w-Ebene betrachten wir die über dem Ring $r \leqq |w| \leqq r_0$ gelegenen Stücke und darauf die Massenbelegung, deren Dichte in den über w gelegenen Punkten in bezug auf die sphärische Metrik gleich $\frac{1}{|w|}$ ist. Das Integral stellt dann die gesamte, von diesen Flächenstücken getragene Masse dar. Wir setzen

$$S(t) = \int\limits_{|w(z)|<t} \frac{|w'|^2}{(1 + |w|^2)^2}\, dx\, dy\,,$$

das ist der sphärische Inhalt der über $|w| < t$ gelegenen Stücke der Überlagerungsfläche. Das Integral in (9) schreibt sich dann in der Form

$$\int\limits_r^{r_0} \frac{dS(t)}{t^2}$$

und es wird $A(\varrho)$ für $r \to 0$ beliebig klein, wenn

$$\lim_{r\to 0} \left(\frac{1}{\ln r}\right)^2 \int\limits_r^{r_0} \frac{dS(t)}{t^2} = 0$$

ist. Durch partielle Integration folgt

$$\int\limits_r^{r_0} \frac{dS(t)}{t^2} \leqq \frac{S(r_0)}{r_0^2} + 2 \int\limits_r^{r_0} \frac{S(t)}{t^2} \cdot \frac{dt}{t}$$

und es wird $A(\varrho)$ für $r \to 0$ und dann $r_0 \to 0$ beliebig klein, wenn

$$S(t) = o\left(t^2 \ln \frac{1}{t}\right) \qquad \text{für} \quad t \to 0 \tag{10}$$

ist. Damit ist der folgende Satz bewiesen.

Satz 3. *Ist $w(z)$ in $|z| < 1$ meromorph, $0 < F(w) < \infty$ und genügt $S(t)$ der Bedingung* (10), *so ist die Menge der Punkte auf dem Kreis $|z| = 1$, in denen $w(z)$ den asymptotischen Wert* 0 *hat, von der (äußern) Kapazität* 0.

10. Zum Schluß betrachten wir eine homöomorphe Abbildung des Kreises $K_z(|z|<1)$ auf den Kreis $K_w(|w|<1)$, dargestellt durch die Funktion $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Wir setzen voraus, daß die partiellen Ableitungen von u und v existieren und stetig sind in K_z, und die Funktionaldekriminante

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x$$

dort immer positiv ist. Ein infinitesimaler Kreis vom Radius ε geht dann über in eine infinitesimale Ellipse mit den Halbachsen $\varepsilon \cdot a(z)$ und $\varepsilon \cdot b(z)$ $(a \geqq b)$. Der sogenannte Dilatationsquotient $D(z) = a/b$ ist in K_z stetig und wir setzen weiter voraus, daß er in K_z beschränkt, also

$$\operatorname*{Sup}_{|z|<1} D(z) = K < \infty$$

sei. Wir sprechen dann kurz von einer differentialgeometrischen Abbildung von K_z auf K_w mit beschränkter Dilatation oder von einer quasikonformen Abbildung. Diese Abbildung ist auf die abgeschlossenen Kreisscheiben $\overline{K}_z$ und $\overline{K}_w$ homöomorph fortsetzbar.

Satz 4. *Die quasikonforme Abbildung von K_z auf K_w induziert eine topologische Abbildung der Peripherie $|z| = 1$ auf die Peripherie $|w| = 1$ mit folgender Eigenschaft: Eine Punktmenge E_z auf $|z| = 1$ und die entsprechende Punktmenge E_w auf $|w| = 1$ sind immer gleichzeitig von der äußern Kapazität 0 bzw. >0* [3]).

Beweis. Es sei Γ_0 eine Jordankurve in K_z und Γ_0' die entsprechende Kurve in K_w, J die Menge der Wege, die Γ_0 in K_z mit E_z verbinden und J' ihre Bildmenge in K_w. J' besteht also aus den Wegen, die Γ_0' in K_w mit E_w verbinden. Wie unten gezeigt wird, gilt für die Extremallängen von J und J' die Ungleichung [4])

$$K^{-1}\lambda_J \leqq \lambda_{J'} \leqq K \cdot \lambda_J \ . \tag{11}$$

---

[3]) Eine ähnliche Frage habe ich in einer Note der C. R. Acad. Sci. Paris **226** (1948) p. 623 behandelt und unter allgemeinen Verhältnissen (Differenzierbarkeit fast überall) Behauptungen aufgestellt, die unrichtig sind, z. B. daß eine abgeschlossene Menge auf $|z| = 1$ vom Maß null wieder in eine Menge vom Maß null abgebildet werde. Auch unter stärkern Voraussetzungen (Differenzierbarkeit überall in $|z| < 1$) hat der dortige Beweis eine wesentliche Lücke, vgl. *P. P. Belinskij*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) **93** (1953), p. 589–590, und das diesbezügliche Referat von *A. J. Lohwater*, Mathematical Reviews, vol. 15 (1954) p. 614.

[4]) Bezüglich dieser Ungleichung soll auf eine demnächst in dieser Zeitschrift erscheinende Arbeit von *J. Hersch*, Contribution à la théorie des fonctions pseudo-analytiques, hingewiesen werden.

Mit $\overline{\mathrm{Cap}}\, E_z = 0$ ist $\lambda_J = \infty$, also auch $\lambda_{J'} = \infty$ und daher $\overline{\mathrm{Cap}}\, E_w = 0$. Dasselbe gilt für die inverse Abbildung von K_w auf K_z.

Es bleibt noch die Ungleichung (11) zu beweisen. Wegen

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = a\, b \quad \text{gilt} \quad a^2 = D \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} .$$

Ist $\varrho(w)$ zulässig für J', so ist $\varrho_1(z) = \varrho(w(z))\, a(z)$ zulässig für J; denn wegen $|dw| \leqq a(z) \cdot |dz|$ gilt für ein $j \in J$ und das entsprechende $j' \in J'$

$$\int_j \varrho_1(z)\, |dz| \geqq \int_{j'} \varrho(w) \cdot |dw| \geqq 1 .$$

Es ist ferner

$$\int_{K_w} \varrho^2(w)\, du\, dv = \int_{K_z} \varrho^2(w(z)) \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy = \int_{K_z} \varrho_1^2 \frac{dx\, dy}{D} \geqq \frac{1}{K} \int_{K_z} \varrho_1^2\, dx\, dy$$

und daher $K \lambda_J \geqq \lambda_J'$. Der andere Teil der Ungleichung ergibt sich mit Hilfe der inversen Abbildung.

LITERATUR

[1] *L. Ahlfors und A. Beurling*, Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta Math. **83** (1950).

[2] *A. Beurling*, Ensembles exceptionels. Acta Math. **72** (1940).

[3] *M. Brelot*. J. Math. Pures Appl., 19 (1940), p. 319—337.

[4] *J. Dufresnoy*. Sur les fonctions méromorphes et univalentes dans le cercle unité. Bull. Sci. Math., **69** (1945), p. 21—31; 117—121.

[5] *J. Ferrand*, Etude de la représentation conforme au voisinage de la frontière. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **59** (1942).

[6] *J. Hersch*, Longueurs extrémales, mesure harmonique et distance hyperbolique. C. R. Acad. Sci. Paris **235** (1952), p. 569–571.

[7] *J. Hersch et A. Pfluger*, Principe de l'augmentation des longueurs extrémales. C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953), p. 1205–1207.

[8] *E. Lindelöf*, Sur un principe générale de l'analyse et ses applications à la représentation conforme. Acta Soc. Sci. Fennicae, Nova Ser. A **46** (1915).

[9] *R. Nevanlinna*, Eindeutige analytische Funktionen. 2. Aufl., Springer Verlag 1953.

[10] *M. Tsuji*, Beurlings theorem on exceptional sets. Tohoku Math. J. vol. **2** (1950).

(Eingegangen den 19. August 1954.)