Note sur les dérivées uniformes et les différentielles totales.

Autor(en): **Ostrowski, Alexandre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **29 (1955)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23291

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Note sur les dérivées uniformes et les différentielles totales

par ALEXANDRE OSTROWSKI, Bâle

Dans une communication parue dans ce journal en 1943[1]), j'ai introduit la notion d'une *dérivée partielle uniforme* qui a trouvé des différentes applications[2]), en particulier à la solution du problème des différentielles totales.

Il est évident que pour qu'une fonction $f(x, y)$ (nous nous bornons ici au cas de deux variables indépendantes) possède dans un point $P_0(x_0, y_0)$ une différentielle totale «au sens de Stolz», l'existence de $f'_x(P_0)$, $f'_y(P_0)$ ne suffit pas. Le problème à résoudre consiste à décomposer la condition d'existence de la différentielle totale en deux conditions, indépendantes l'une de l'autre (autant que possible) et qui se rapportent au comportement de $f(P)$, l'une au «voisinage» de $x = x_0$ et l'autre au «voisinage» de $y = y_0$. —

Il y a quelques jours, mon attention a été attiré, grâce à une communication aimable de M. *Fréchet*, à un mémoire de M. *F. Severi* de 1935[3]), qui m'avait malheureusement échappé lors de la publication de ma note citée et dans lequel M. *Severi* (parmi un très grand nombre d'autre résultats importants) établit des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une différentielle totale dans un point en utilisant la notion de la *dérivée partielle généralisée* (derivata parziale generalizzata) qu'il a introduite dans ce but.

Donc, la première solution du problème des différentielles totales remonte à M. *Severi*, ce que je me dépêche de reconnaître.

En plus, ma notion de la dérivée uniforme est apparantée à la dérivée généralisée de M. *Severi*. De l'autre côté, il me semble que dans les con-

---

[1]) *Alexandre Ostrowski*, Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales, Comm. Math. Helv. 15 (1942/43), pp. 222–225.

[2]) Cf. *Alexandre Ostrowski*, Sur les conditions de validité d'une classe de relations entre les expressions différentielles linéaires, Comm. Math. Helv. 15 (1942/43), pp. 265–286; *Rolf Conzelmann*, Beiträge zur Theorie der singulären Integrale bei Funktionen von mehreren Variablen, Comm. Math. Helv. 19 (1946/47), pp. 279–315.

[3]) *Francesco Severi*, Sulla differenziabiltà totale delle funzioni di più variabili reali, Annali di Matematica pure ed applicata, 4, tomo 13 (1935), pp. 1–35.

ditions de M. *Severi* l'indépendance des deux conditions se rapportant à x et à y est *partiellement* réalisée, tandis que dans mes conditions cette indépendance est presque complètement réalisée et même peut l'être totalement au prix de détruire la symétrie.

Considérons l'expression

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} . \tag{1}$$

Je définis la dérivée uniforme en $P_0(x_0, y_0)$ par rapport à x comme la limite de l'expression (1), $P(x, y)$ tendant à P_0 de sorte que l'on ait

$$| y - y_0 | \leqq | x - x_0 | . \tag{2}$$

M. *Severi* définit la dérivée partielle généralisée en P_0 par rapport à x comme la limite de l'expression (1), quand la demi-droite P_0P (d'origine P_0) tend vers une demi-droite λ quelconque d'origine P_0, mais différente de $x = x_0$ et si cette limite ne dépend pas de λ. Il est presque immédiat que cette définition est équivalente à la suivante: la dérivée partielle généralisée par rapport à x est égale à la limite de l'expression (1) pour $P \to P_0$, $P \neq P_0$ parcourant le domaine

$$| y - y_0 | \leqq C | x - x_0 | , \tag{3}$$

si cette limite existe pour *chaque* constante $C > 0$.

Maintenant, la condition nécessaire et suffisante de M. *Severi* consiste en ce que les deux dérivées partielles généralisées doivent exister en P_0. Il est évident que les domaines du plan sur lesquels portent ces deux conditions prises individuellement contiennent comme partie commune les angles

$$c | x - x_0 | \leqq | y - y_0 | \leqq C | x - x_0 | ,$$

pour chaque couple de constante c, C avec $0 < c < C$. Quant à ma condition qui consiste en l'existence des deux dérivées partielles uniformes en P_0, les domaines du plan en question n'ont en commun que les droites

$$| y - y_0 | = | x - x_0 | .$$

D'ailleurs il serait facile de modifier mes conditions de sorte que les domaines en question n'aient des points en commun. Il suffirait par exemple pour une constante positive fixe quelconque c de remplacer la condition $| y - y_0 | \leqq | x - x_0 |$ dans la définition de la dérivée partielle uniforme par rapport à x par la condition $| y - y_0 | \leqq c | x - x_0 |$ et la

condition $|x - x_0| \leqq |y - y_0|$ dans la définition de la dérivée uniforme par rapport à y par $c\,|x - x_0| < |y - y_0|$. Mais alors on aurait l'inconvenient que les définitions des dérivées uniformes par rapport à x et à y ne restent plus symétriques.

En tout cas, il est évident que l'existence des deux dérivées partielles *uniformes* en P_0 est équivalente à l'existence simultanée des deux dérivées partielles généralisées en P_0.

(Reçu le 5 mars 1955)