Kosmologische Lösungen eines homogenen Wirkungsprinzips.

Autor(en): **Nohl, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **29 (1955)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23293

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Kosmologische Lösungen eines homogenen Wirkungsprinzips

von Walter Nohl

§ 1. Einleitung

Im Anschluß an eine Untersuchung von Herrn Prof. Dr. W. Scherrer, in der Wirkungsfunktionen mit gewissen Homogenitätseigenschaften eingeführt und die statisch-zentralsymmetrischen Lösungen der zugehörigen Feldgleichungen ermittelt wurden [1], schien es interessant, auch nach eventuellen kosmologischen Lösungen der genannten Feldgleichungen zu suchen. In der vorliegenden Arbeit, zu der ich von Herrn Prof. Dr. W. Scherrer angeregt wurde, soll gezeigt werden, daß sich das kosmologische Problem explizite vollständig lösen läßt.

Das in Frage stehende Variationsprinzip hat die folgende Form:

$$\delta \int [R\Phi^2 + 2\xi R_{\lambda\mu}\Phi^\lambda\Phi^\mu + 2\eta D_\lambda\Phi^\mu D_\mu\Phi^\lambda + 2\zeta(D\Phi)^2 + \varepsilon F_{\lambda\mu}F^{\mu\lambda}]\sqrt{-G}\,dx = 0\ . \tag{1.1}$$

Dabei bedeutet

$$R_{\lambda\mu} = \frac{\partial\Gamma^\nu_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\Gamma^\nu_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \Gamma^\omega_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\mu\omega} - \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\Gamma^\omega_{\nu\omega}$$

den verjüngten Riemannschen Krümmungstensor, $R = G^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu}$ den Riemannschen Krümmungsskalar, $F_{\lambda\mu} = D_\lambda\Phi_\mu - D_\mu\Phi_\lambda$ den elektromagnetischen Feldtensor. D_λ stellt das Symbol für kovariante Differentiation dar. Ferner wurde $\Phi_\lambda\Phi^\lambda = \Phi^2$ und $D_\lambda\Phi^\lambda = D\Phi$ gesetzt.

Die im Wirkungsprinzip (1.1) auftretenden Invarianten sind alle rational und homogen von der Dimension 0 in bezug auf die Komponenten $G_{\lambda\mu}$ des metrischen Tensors und ganz rational und homogen von der Dimension 2 in bezug auf die Potentiale Φ^λ. Die Größen ξ, η, ζ, ε sind dimensionslose universelle Konstanten. In einer zweiten Arbeit von Herrn Prof. Dr. W. Scherrer wird gezeigt, daß infolge einer linearen Abhängigkeit zwischen den zu verschiedenen Invarianten von (1.1) gehörenden Variationen ohne Einschränkung der Allgemeinheit eine der Konstanten ξ, η, ζ gleich null gesetzt werden darf. Wir setzen $\eta = 0$.

Im Rahmen der durch (1.1) charakterisierten vollständigen Feldtheorie ist der Vektor Φ^λ der Repräsentant der materiellen Eigenschaften der Welt. Die physikalischen Vorgänge werden beschrieben durch die Differentialgleichungen, die aus dem Wirkungsprinzip (1.1) bei Variation der Funktionen $G_{\lambda\mu}$ bzw. der Funktionen Φ^λ fließen.

Beim kosmologischen Problem werden die Funktionen $G_{\lambda\mu}$ so spezialisiert, daß der durch $x_0 =$ konstant definierte Unterraum die Metrik einer dreidimensionalen Hypersphäre aufweist. Das Linienelement hat die Form

$$ds^2 = dx_0^2 - L^2(x_0)d\sigma^2\,;\; d\sigma^2 = dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2\,. \quad (1.2)$$

Diese Annahme bedeutet, daß alle Punkte und alle Richtungen im Raum vollständig gleichwertig sind. Entsprechend der vollkommenen Symmetrie dieses R_3 wird der Vektor Φ^λ spezialisiert auf $\Phi^0 = \Phi(x_0)$; $\Phi^1 = \Phi^2 = \Phi^3 = 0$. Wenn man eine solche Lösung als Modell der Welt auffassen will, muß man offenbar alle lokalen Inhomogenitäten – Sterne, Atome, Elementarteilchen – vernachlässigen.

Zum Methodischen sei das Folgende angemerkt. Im Prinzip handelt es sich darum, Lösungen desjenigen Systems von Differentialgleichungen zu ermitteln, welches sich aus dem Variationsprinzip (1.1) ergibt. Dabei werden an die gesuchten Funktionen die oben angegebenen zusätzlichen Forderungen gestellt. Die Differentialgleichungen erfahren dadurch eine starke Vereinfachung. Bei Aufgaben dieser Art ist es oft zweckmäßig, die Spezialisierung schon in der Wirkungsfunktion des Variationsprinzips vorzunehmen. Man erhält dann sofort vereinfachte Feldgleichungen, wobei allerdings noch abzuklären bleibt, ob deren Lösungen auch die allgemeinen Differentialgleichungen erfüllen. In unserem Fall erweist sich jedoch dieser Weg als ungeeignet. Es zeigt sich, daß Spezialisierung nach Ausführung der Variation drei verschiedene Gleichungen ergibt, währenddem man bei Ausführung der Variation nach der Spezialisierung der Wirkungsfunktion naturgemäß nur zwei Beziehungen erhalten kann, die aus den eben genannten drei Gleichungen folgen. Die größere Zahl von Gleichungen ermöglicht Eliminationsprozesse, welche die Auflösung des Systems sehr erleichtern.

In dieser Arbeit wird die geometrische Entwicklung der Welt im Rahmen der vorliegenden Theorie untersucht, das heißt es werden die in Frage kommenden Funktionen $L = L(x_0)$ ermittelt. Je nach Wahl von ξ und ζ treten verschiedenartige Lösungstypen auf. Dagegen hangen die kosmologischen Lösungen nicht vom Wert der Konstanten ε ab. Es er-

geben sich Modelle, bei denen der Weltradius $L(x_0)$ von null auf einen endlichen Wert ansteigt und nach endlicher Zeit wieder auf null zurückfällt. Andere Lösungen ergeben eine Kontraktion von $L = \infty$ auf einen minimalen endlichen Wert und nachfolgend Expansion nach $L = \infty$. Diese Entwicklung kann in einem endlichen Zeitintervall erfolgen oder unendlich lange dauern. Weiter treten Lösungen auf, bei denen monotone Expansion von $L = 0$ nach $L = \infty$ stattfindet, ebenso ist eine entsprechende Kontraktion möglich. Diese Vorgänge können wieder innerhalb einer endlichen Epoche ablaufen oder unendlich viel Zeit in Anspruch nehmen. Von einigem Interesse könnten die zwei folgenden Lösungstypen sein: Wenn eine bestimmte lineare Relation zwischen den universellen Konstanten erfüllt ist, ergeben sich Modelle, bei denen der Weltradius von einem endlichen Anfangswert auf einen endlichen Endwert steigt oder fällt. Diese Entwicklungen sind also frei von Singularitäten. Sie dauern unendlich lange. Bei allen bisher genannten Lösungen ist $\dot{L}$ variabel. Es treten aber auch Lösungen auf, bei denen $\dot{L}$ konstant bleibt, die also eine lineare Expansion oder Kontraktion der Welt beschreiben. Ein Teil dieser Lösungen hat allerdings singulären Charakter, indem in jedem Punkt eine nichtlineare Lösung in deren Wendepunkt, also in zweiter Ordnung, berührt wird. Die Steigung der übrigen linearen Lösungen stimmt mit dem $\dot{L}$-Wert überein, den nichtlineare Lösungen am Anfang oder am Ende ihrer Entwicklung annehmen oder asymptotisch anstreben.

§ 2. Die Feldgleichungen

Man kann die Invarianten in (1.1) auffassen als Funktionen der Größen $\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma}$ und Φ^{ϱ}. Alle Variationen sind dann auszudrücken durch $\delta(\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma})$ und $\delta\Phi^{\varrho}$. Es ist zu verlangen, daß die durch partielle Integration auftretenden Randglieder verschwinden. Zur Umrechnung der Variationen gelten die folgenden Formeln:

$$\delta\sqrt{-G} = \tfrac{1}{2}\,G_{\varrho\sigma}\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma})$$

$$\delta G^{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{-G}}\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\lambda\mu}) - \frac{1}{2\sqrt{-G}}\,G^{\lambda\mu}G_{\varrho\sigma}\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma})$$

$$\delta G_{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{-G}}\,(\tfrac{1}{2}\,G_{\lambda\mu}G_{\varrho\sigma} - G_{\lambda\varrho}G_{\mu\sigma})\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma})\,.$$

Nun sollen zunächst die Variationen der einzelnen Summanden in (1.1) bestimmt werden.

Variation von $\int R\Phi^2 \sqrt{-G}\,dx$

Setzt man

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R} &= \sqrt{-G}\,R \\
\mathfrak{P}^\lambda &= \sqrt{-G}\,(G^{\lambda\nu}\Gamma^\mu_{\nu\mu} - G^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) \;, \\
\mathfrak{Q} &= \sqrt{-G}\,G^{\mu\nu}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\omega_{\lambda\omega} - \Gamma^\lambda_{\mu\omega}\Gamma^\omega_{\nu\lambda}) \;,
\end{aligned}$$

so gilt

$$\mathfrak{R} = \frac{\partial \mathfrak{P}^\lambda}{\partial x_\lambda} + \mathfrak{Q}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathfrak{P}^\lambda = \Gamma^\nu_{\mu\nu}\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\lambda\mu}) - \tfrac{1}{2}\,\Gamma^\nu_{\mu\nu}\,G^{\lambda\mu}G_{\varrho\sigma}\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma}) \\
+ \tfrac{1}{2}\,G^{\lambda\mu}\,\frac{\partial\,[G_{\varrho\sigma}\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma})]}{\partial x_\mu} + \frac{\partial[\delta(\sqrt{-G}\,G^{\lambda\mu})]}{\partial x_\mu} \;,
\end{aligned}$$

$$\delta\mathfrak{Q} = \frac{\partial[\Gamma^\lambda_{\varrho\sigma}\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma})]}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial[\Gamma^\nu_{\lambda\nu}\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\lambda\mu})]}{\partial x_\mu} + R_{\varrho\sigma}\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma}) \;.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\delta\int R\Phi^2\sqrt{-G}\,dx &= \int[\delta(\mathfrak{R})\,\Phi^2 + \mathfrak{R}\Phi^\lambda\Phi^\mu\,\delta G_{\lambda\mu} + 2\,\mathfrak{R}G_{\lambda\mu}\Phi^\lambda\,\delta\Phi^\mu]\,dx \\
&= \int\left[-\frac{\partial\Phi^2}{\partial x_\lambda}\,\delta\mathfrak{P}^\lambda + \Phi^2\,\delta\mathfrak{Q} + \mathfrak{R}\Phi^\lambda\Phi^\mu\,\delta G_{\lambda\mu} + 2\,\mathfrak{R}G_{\lambda\mu}\Phi^\lambda\,\delta\Phi^\mu\right]dx \;.
\end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung ergibt sich:

$$\delta\int R\Phi^2\sqrt{-G}\,dx = \int A_{\varrho\sigma}\,\delta(\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma})\,dx + \int a_\varrho\sqrt{-G}\,\delta\Phi^\varrho\,dx$$

mit

$$\begin{aligned}
A_{\varrho\sigma} &= -\,R\Phi_\varrho\Phi_\sigma + R_{\varrho\sigma}\Phi^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(D_\varrho D_\sigma + D_\sigma D_\varrho)\Phi^2 + \tfrac{1}{2}(R\Phi^2 + \Box\,\Phi^2)G_{\varrho\sigma} \\
a_\varrho &= 2\,R\Phi_\varrho \;.
\end{aligned}$$

Variation von $\int R_{\lambda\mu}\Phi^\lambda\Phi^\mu\sqrt{-G}\,dx$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\delta\int R_{\lambda\mu}\Phi^\lambda\Phi^\mu\sqrt{-G}\,dx = \int\delta(R_{\lambda\mu})\,\Phi^\lambda\Phi^\mu\sqrt{-G}\,dx + \int R_{\lambda\mu}\Phi^\lambda\Phi^\mu\,\delta\sqrt{-G}\,dx \\
+ 2\int R_{\lambda\mu}\Phi^\lambda\sqrt{-G}\,\delta\Phi^\mu\,dx \;.
\end{aligned}$$

Mit

$$\delta\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \delta(G^{\nu\omega})\,\Gamma_{\omega,\lambda\mu} + \tfrac{1}{2}\,G^{\nu\omega}\,\frac{\partial\delta G_{\omega\lambda}}{\partial x_\mu} + \tfrac{1}{2}\,G^{\nu\omega}\,\frac{\partial\delta G_{\mu\omega}}{\partial x_\lambda} - \tfrac{1}{2}\,G^{\nu\omega}\,\frac{\partial\delta G_{\lambda\mu}}{\partial x_\omega}$$

folgt hieraus nach einiger Rechnung:

$$\delta \int R_{\lambda\mu} \Phi^\lambda \Phi^\mu \sqrt{-G} dx = \int B_{\varrho\sigma} \delta(\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma}) dx + \int b_\varrho \sqrt{-G}\, \delta\Phi^\varrho dx \ ,$$

wobei

$$B_{\varrho\sigma} = \tfrac{1}{2} [D_\lambda D_\varrho (\Phi^\lambda \Phi_\sigma) + D_\lambda D_\sigma (\Phi^\lambda \Phi_\varrho) - \Box (\Phi_\varrho \Phi_\sigma)] + \tfrac{1}{2} [R_{\lambda\mu} \Phi^\lambda \Phi^\mu + \tfrac{1}{2} \Box \Phi^2] G_{\varrho\sigma} \ ,$$

$$b_\varrho = 2 R_{\varrho\lambda} \Phi^\lambda \ .$$

Variation von $\int (D\Phi)^2 \sqrt{-G}\, dx$

Aus

$$\delta \int (D\Phi)^2 \sqrt{-G}\, dx = 2 \int \delta(\sqrt{-G}\, D\Phi) D\Phi dx - \int (D\Phi)^2 \delta \sqrt{-G}\, dx$$

erhält man unter Verwendung der Gleichung

$$\delta(\sqrt{-G}\, D\Phi) = \frac{\partial(\Phi^\lambda \delta \sqrt{-G})}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial(\sqrt{-G}\, \delta\Phi^\varrho)}{\partial x_\varrho}$$

$$\delta \int (D\Phi)^2 \sqrt{-G}\, dx = \int C_{\varrho\sigma} \delta(\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma}) dx + \int c_\varrho \sqrt{-G}\, \delta\Phi^\varrho dx \ ,$$

wobei

$$C_{\varrho\sigma} = - [\Phi^\lambda D_\lambda D\Phi + \tfrac{1}{2} (D\Phi)^2] G_{\varrho\sigma} \ ,$$

$$c_\varrho = - 2 D_\varrho D\Phi \ .$$

Variation von $\int F_{\lambda\mu} F^{\mu\lambda} \sqrt{-G}\, dx$

Die Rechnung ergibt hier

$$\delta \int F_{\lambda\mu} F^{\mu\lambda} \sqrt{-G}\, dx = \int D_{\varrho\sigma} \delta(\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma}) dx + \int d_\varrho \sqrt{-G}\, \delta\Phi^\varrho dx$$

mit

$$D_{\varrho\sigma} = 2(F_{\varrho\lambda} F^\lambda_\sigma - \Phi_\varrho D_\lambda F^\lambda_\sigma - \Phi_\sigma D_\lambda F^\lambda_\varrho) + 2(\Phi_\mu D_\lambda F^{\lambda\mu} - \tfrac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\mu\lambda}) G_{\varrho\sigma} \ ,$$

$$d_\varrho = 4 D_\lambda F^\lambda_\varrho \ .$$

Als Feldgleichungen der Gravitation und der Materie erhält man jetzt:

$$A_{\varrho\sigma} + 2\xi B_{\varrho\sigma} + 2\zeta C_{\varrho\sigma} + \varepsilon D_{\varrho\sigma} = 0 \ , \tag{2.1}$$

$$a_\varrho + 2\xi b_\varrho + 2\zeta c_\varrho + \varepsilon d_\varrho = 0 \ . \tag{2.2}$$

§ 3. Das kosmologische Problem

Kosmologische Koordinaten

Es sind jetzt diejenigen Lösungen der allgemeinen Feldgleichungen zu ermitteln, bei denen das Linienelement die spezielle Gestalt (1.2) aufweist. Für die Dreiindizessymbole gilt die folgende Tafel:

$$\Gamma^0_{00} = 0 \qquad \Gamma^0_{0l} = 0 \qquad \Gamma^0_{kl} = L\dot{L} g_{kl} = -\frac{\dot{L}}{L} G_{kl} ,$$

$$\Gamma^i_{00} = 0 \qquad \Gamma^i_{0l} = \frac{\dot{L}}{L}\delta^i_l \qquad \Gamma^i_{kl} = \gamma^i_{kl} .$$

Hierbei durchlaufen die Indizes i, k, l die Werte 1, 2, 3. Der Index 0 gehört der zeitlichen Koordinate an. Die g_{kl} stellen die Komponenten des metrischen Tensors im Unterraum R_3 dar, die γ^i_{kl} sind die zugehörigen Dreiindizessymbole.

Für den verjüngten Riemannschen Krümmungstensor erhält man

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{L}}{L} , \qquad R_{0k} = 0 ,$$

$$R_{ik} = -(L\ddot{L} + 2\dot{L}^2 + 2)\, g_{ik} = (L\ddot{L} + 2\dot{L}^2 + 2)\frac{G_{ik}}{L^2} ,$$

Der Riemannsche Krümmungsskalar hat den Wert

$$R = 6\,\frac{L\ddot{L} + \dot{L}^2 + 1}{L^2} .$$

Spezialisierung der Feldgleichungen auf kosmologische Koordinaten

Für die Tensoren $A_{\varrho\sigma}$, $B_{\varrho\sigma}$, $C_{\varrho\sigma}$, $D_{\varrho\sigma}$ erhält man die folgenden spezialisierten Ausdrücke, in denen r, s die Werte 1, 2, 3 annehmen:

$$A_{00} = \frac{3}{2}\frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2} + \frac{3}{2}\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} - 3\,\frac{\dot{L}^2 + 1}{L^2}\Phi^2$$

$$A_{rs} = \left[\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2} + \frac{5}{2}\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} + \frac{4L\ddot{L} + 5\dot{L}^2 + 5}{L^2}\Phi^2\right] G_{rs}$$

$$2B_{00} = \frac{3}{2}\frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2} + \frac{9}{2}\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} + 3\,\frac{L\ddot{L}}{L^2}\Phi^2$$

$$2B_{rs} = \left[\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2} + \frac{7}{2}\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} + \frac{5L\ddot{L} + 4\dot{L}^2}{L^2}\Phi^2\right] G_{rs}$$

$$2C_{00} = \left(\frac{d\Phi}{dx_0}\right)^2 - \frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2} - 6\,\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} - 3\,\frac{2L\ddot{L} + \dot{L}^2}{L^2}\Phi^2$$

$$2C_{rs} = \left[\left(\frac{d\Phi}{dx_0}\right)^2 - \frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2} - 6\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} - 3\frac{2L\ddot{L} + L^2}{L^2}\Phi^2\right]G_{rs}$$

$$D_{00} = 0\ ; \quad D_{rs} = 0\ .$$

Für die Vektoren a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ, d_ϱ ergibt sich:

$$a_0 = 12\frac{L\ddot{L} + \dot{L}^2 + 1}{L^2}\Phi \qquad 2b_0 = 12\frac{\ddot{L}}{L}\Phi$$

$$2c_0 = -4\frac{d^2\Phi}{dx_0^2} - 12\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi}{dx_0} - 12\frac{L\ddot{L} - \dot{L}^2}{L^2}\Phi \qquad d_0 = o$$

Alle nicht angegebenen Komponenten verschwinden.

Nach (2.1) und (2.2) erhalten die Feldgleichungen nunmehr die folgende Gestalt:

Gleichungen der Gravitation:

$$\zeta\left(\frac{d\Phi}{dx_0}\right)^2 + \frac{3 + 3\xi - 2\zeta}{2}\frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2} + \frac{3 + 9\xi - 12\zeta}{2}\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} + \frac{3(\xi - 2\zeta)L\ddot{L} - 3(1 + \zeta)\dot{L}^2 - 3}{L^2}\Phi^2 = 0\ . \tag{3.1a}$$

$$\zeta\left(\frac{d\Phi}{dx_0}\right)^2 + \frac{1 + \xi - 2\zeta}{2}\frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2} + \frac{5 + 7\xi - 12\zeta}{2}\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} + \frac{(4 + 5\xi - 6\zeta)L\ddot{L} + (5 + 4\xi - 3\zeta)\dot{L}^2 + 5}{L^2}\Phi^2 = 0\ . \tag{3.1b}$$

Gleichung der Materie

$$\zeta\frac{d^2\Phi}{dx_0^2} + 3\zeta\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi}{dx_0} - \frac{3(1 + \xi - \zeta)L\ddot{L} + 3(1 + \zeta)\dot{L}^2 + 3}{L^2}\Phi = 0\ . \tag{3.2}$$

Multipliziert man (3.2) mit Φ und addiert man das Resultat zu den Gleichungen (3.1a) und (3.1b), so ergeben sich nach linearen Kombinationen die Beziehungen

$$\zeta\frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2} - 3(2 + 2\xi - 3\zeta)\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} - 6\frac{(1 + \xi - \zeta)(L\ddot{L} + 2\dot{L}^2) + 2}{L^2}\Phi^2 = 0, \tag{3.3a}$$

$$1 + \xi)\frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2} - (1 - \xi)\frac{\dot{L}}{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} - 2\frac{(2 + \xi)(L\ddot{L} + 2\dot{L}^2) + 4}{L^2}\Phi^2 = 0\ . \tag{3.3b}$$

Aus (3.3a) und (3.3b) läßt sich $\frac{d^2\Phi^2}{dx_0^2}$ eliminieren. Setzt man $\lambda = 3 + 3\xi - 2\zeta$, so folgt

$$\tfrac{1}{3}(\lambda^2 - 3\zeta - 4\zeta^2)\left(\dot{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} + \frac{L\ddot{L} + 2\dot{L}^2}{L}\Phi^2\right) + \frac{2\lambda}{L}\Phi^2 = 0\ , \tag{3.4}$$

somit

$$\frac{d\Phi^2}{dx_0} = -\frac{L\ddot{L} + 2\dot{L}^2}{L\dot{L}}\Phi^2 - \frac{6\lambda}{(\lambda^2 - 3\zeta - 4\zeta^2)\,L\dot{L}}\Phi^2 . \tag{3.5}$$

Dabei ist $\lambda^2 - 3\zeta - 4\zeta^2 \neq 0$ vorausgesetzt.

Eine zweite Relation zwischen $\frac{d\Phi^2}{dx_0}$ und Φ^2 erhält man durch Elimination von $\frac{d^2\Phi}{dx_0^2}$ aus (3.2) und (3.3a):

$$\frac{d\Phi^2}{dx_0} = 2\,\frac{(\lambda - \zeta)\,\dot{L} + \sqrt{(\lambda^2 - 3\zeta - 4\zeta^2)\,\dot{L}^2 + 3\zeta}}{\zeta \cdot L}\,\Phi^2 . \tag{3.6}$$

Hier wird vorausgesetzt, daß $\zeta \neq 0$ ist.

Aus (3.5) und (3.6) folgt die separierte Differentialgleichung für L allein, die die geometrische Entwicklung der Welt beschreibt:

$$L\ddot{L} = -\sqrt{\alpha\,\dot{L}^2 + \beta}\,\dot{L} - \gamma(\alpha\,\dot{L}^2 + \beta) . \tag{3.7}$$

Dabei wurde zur Abkürzung gesetzt:

$$\alpha = \frac{4(\lambda^2 - 3\zeta - 4\zeta^2)}{\zeta^2}\,; \quad \beta = \frac{12}{\zeta}\,; \quad \gamma = \frac{\lambda\zeta}{2(\lambda^2 - 3\zeta - 4\zeta^2)} . \tag{3.8}$$

Im Ausnahmefall $\lambda^2 - 3\zeta - 4\zeta^2 = 0$ gibt es keine nichttriviale Lösung ($\Phi \not\equiv 0$) der kosmologischen Gleichungen. Aus (3.4) folgt nämlich zunächst $\lambda = 0$, somit entweder $\zeta = 0$ oder $\zeta = -\frac{3}{4}$. Die erste Möglichkeit wird durch (3.3a), die zweite durch (3.6) ausgeschlossen.

Liegt der Ausnahmefall $\zeta = 0$ vor, so reduziert sich die Gleichung (3.2) zu

$$\vartheta L\ddot{L} = \dot{L}^2 + 1 . \tag{3.9}$$

Dabei wurde gesetzt:

$$\vartheta = -(1 + \xi) = -\frac{\lambda}{3} . \tag{3.10}$$

Die Gleichung (3.5) vereinfacht sich mit (3.9) und (3.10) zu

$$L\dot{L}\frac{d\Phi^2}{dx_0} = \frac{-(1 + 2\vartheta)\,\dot{L}^2 + 1}{\vartheta}\,\Phi^2 . \tag{3.11}$$

Zusammenfassend gelten nach (3.5), (3.7), (3.9), (3.11) die folgenden Gleichungssysteme:

$\zeta \neq 0$	$\zeta = 0$
a) $L\ddot{L} = -\sqrt{\alpha \dot{L}^2 + \beta}\,\dot{L} - \gamma(\alpha \dot{L}^2 + \beta)$	b) $\vartheta L \ddot{L} = \dot{L}^2 + 1$ (3.12)
c) $L \dfrac{d\Phi^2}{dx_0} = \left[\sqrt{\alpha \dot{L}^2 + \beta} + 2\dfrac{\lambda - \zeta}{\zeta}\dot{L}\right]\Phi^2$	d) $L\dot{L}\dfrac{d\Phi^2}{dx_0} = \dfrac{-(1+2\vartheta)\dot{L}^2 + 1}{\vartheta}\Phi^2$

Im folgenden Abschnitt sollen die Lösungen der Gleichungen (3.12a) und (3.12b) angegeben und diskutiert werden.

§ 4. Lösung der kosmologischen Gleichungen

Aus den Gleichungen (3.12) ersieht man unmittelbar, daß mit $L(x_0)$ stets auch $-L(x_0)$ eine Lösung darstellt. Da beide Funktionen dieselbe Entwicklung der Welt beschreiben, ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, $L(x_0)$ sei positiv. Außerdem existiert zu jeder Lösung die zeitlich umgekehrt verlaufende. Wir können uns daher bei monotonen Lösungen zum vornherein auf monoton steigende Funktionen beschränken.

Die Gleichungen (3.8) und (3.10) geben an, welche Werte der Konstanten α, β, γ, ϑ in Frage kommen. Der Charakter der auftretenden Lösungen hängt wesentlich vom Vorzeichen dieser Konstanten ab. Wir unterscheiden die *Hauptfälle*

$$\text{I.}\quad \alpha > 0,\ \beta > 0; \qquad \text{II.}\quad \alpha > 0,\ \beta < 0; \qquad \text{III.}\quad \alpha < 0,\ \beta > 0,$$

in denen ζ nicht verschwindet und die Gleichungen (3.12a), (3.12c) gelten, sowie den *Sonderfall* $\zeta = 0$, für den die Gleichungen (3.12b), (3.12d) gelten.

Zur Auflösung der Gleichung (3.12a) kann man $\dot{L} = p$ als Lösungsparameter einführen. Mit $\ddot{L} = \dfrac{dp}{dL}p$ erhält man eine sofort separierbare Differentialgleichung, die sich in der Form

$$\frac{dL}{L} = -\frac{p\,dp}{\sqrt{\alpha p^2 + \beta}\,p + \gamma(\alpha p^2 + \beta)}$$

schreiben läßt. Es liegt nahe, hier hyperbolische bzw. trigonometrische Funktionen einzuführen. Setzt man in den Fällen

$$\text{I.}\quad p = \frac{\sqrt{\beta}}{|\sqrt{\alpha}|}\sinh z \qquad \sqrt{\alpha p^2 + \beta} = \sqrt{\beta}\cosh z$$

$$\text{II.}\quad p = \frac{\sqrt{-\beta}}{|\sqrt{\alpha}|}\cosh z \qquad \sqrt{\alpha p^2 + \beta} = \sqrt{-\beta}\sinh z \tag{4.1}$$

$$\text{III.}\quad p = \left|\sqrt{\frac{\beta}{-\alpha}}\right|\sin z \qquad \sqrt{\alpha p^2 + \beta} = |\sqrt{\beta}|\cos z$$

sowie zur Abkürzung

$$\mu = 3\zeta + 4\zeta^2\,, \qquad \text{also} \qquad \alpha = \frac{4(\lambda^2 - \mu)}{\zeta^2}\,,$$

so erhält man in den drei Hauptfällen

$$\left.\begin{aligned}
\text{I.}\quad \frac{dL}{L} &= -\frac{1}{2}\,\frac{\zeta\sinh z\,dz}{|\sqrt{\lambda^2-\mu}|\sinh z + \lambda\cosh z}\,,\\
\text{II.}\quad \frac{dL}{L} &= -\frac{1}{2}\,\frac{\zeta\cosh z\,dz}{-|\sqrt{\lambda^2-\mu}|\cosh z + \lambda\sinh z}\,,\\
\text{III.}\quad \frac{dL}{L} &= -\frac{1}{2}\,\frac{\zeta\sin z\,dz}{|\sqrt{-\lambda^2+\mu}|\sin z - \lambda\cos z}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Bei der weiteren Auflösung sind die Vorzeichen von λ und μ zu berücksichtigen. Es ergeben sich die folgenden Unterfälle:

I. a)	$\lambda > 0$,	$\mu > 0$	I. b)	$\lambda < 0$,	$\mu > 0$
II. a)	$\lambda > 0$,	$\mu > 0$ $(\zeta < -\frac{3}{4})$	II. b)	$\lambda < 0$,	$\mu > 0$ $(\zeta < -\frac{3}{4})$
II. c)	$\mu = 0$	$(\zeta = -\frac{3}{4})$	II. d)	$\mu < 0$	$(-\frac{3}{4} < \zeta < 0)$
III.	$\mu > 0$				

Setzt man in

$$\begin{aligned}
&\text{I. a)}\quad |\sqrt{\lambda^2-\mu}| = -|\sqrt{\mu}|\sinh z_0\,, \quad \lambda = |\sqrt{\mu}|\cosh z_0\,,\\
&\text{I. b)}\quad |\sqrt{\lambda^2-\mu}| = |\sqrt{\mu}|\sinh z_0\,, \quad \lambda = -|\sqrt{\mu}|\cosh z_0\,,\\
&\text{II. a)}\quad |\sqrt{\lambda^2-\mu}| = |\sqrt{\mu}|\sinh z_0\,, \quad \lambda = |\sqrt{\mu}|\cosh z_0\,,\\
&\text{II. b)}\quad |\sqrt{\lambda^2-\mu}| = -|\sqrt{\mu}|\sinh z_0\,, \quad \lambda = -|\sqrt{\mu}|\cosh z_0\,,\\
&\text{II. d)}\quad |\sqrt{\lambda^2-\mu}| = |\sqrt{-\mu}|\cosh z_0\,, \quad \lambda = |\sqrt{-\mu}|\sinh z_0\,,\\
&\text{III.}\quad |\sqrt{-\lambda^2+\mu}| = |\sqrt{\mu}|\cos z_0\,, \quad \lambda = |\sqrt{\mu}|\sin z_0\,,
\end{aligned}$$

so vereinfachen sich die Gleichungen (4.2) weiter zu

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I. a)} \quad \frac{dL}{L} = -\frac{\zeta}{2\,|\sqrt{\mu}\,|}\,\frac{\sinh z\,dz}{\cosh(z-z_0)}\\
&\text{I. b)} \quad \frac{dL}{L} = \frac{\zeta}{2\,|\sqrt{\mu}\,|}\,\frac{\sinh z\,dz}{\cosh(z-z_0)}\\
&\text{II. a)} \quad \frac{dL}{L} = -\frac{\zeta}{2\,|\sqrt{\mu}\,|}\,\frac{\cosh z\,dz}{\sinh(z-z_0)}\\
&\text{II. b)} \quad \frac{dL}{L} = \frac{\zeta}{2\,|\sqrt{\mu}\,|}\,\frac{\cosh z\,dz}{\sinh(z-z_0)}\\
&\text{II. c)} \quad \frac{dL}{L} = \frac{3}{8\lambda}\,\frac{\cosh z\,dz}{e^{z}}\\
&\text{II. d)} \quad \frac{dL}{L} = \frac{\zeta}{2\,|\sqrt{-\mu}\,|}\,\frac{\cosh z\,dz}{\cosh(z-z_0)}\\
&\text{III.} \quad \frac{dL}{L} = -\frac{\zeta}{2\,|\sqrt{\mu}\,|}\,\frac{\sin z\,dz}{\sin(z-z_0)}
\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Unter Anwendung der Additionstheoreme der hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen lassen sich die Gleichungen (4.3) sofort explizite integrieren. Man erhält:

$$\begin{aligned}
&\text{I. a)} \quad L = A\,[\cosh(z-z_0)^{\cosh z_0}\cdot e^{(z-z_0)\sinh z_0}]^{-\frac{\zeta}{2\,|\sqrt{\mu}\,|}}\\
&\text{I. b)} \quad L = A\,[\cosh(z-z_0)^{\cosh z_0}\cdot e^{(z-z_0)\sinh z_0}]^{\frac{\zeta}{2\,|\sqrt{\mu}\,|}}\\
&\text{II. a)} \quad L = A\,[|\sinh(z-z_0)|^{\cosh z_0}\cdot e^{(z-z_0)\sinh z_0}]^{-\frac{\zeta}{2\,|\sqrt{\mu}\,|}}\\
&\text{II. b)} \quad L = A\,[|\sinh(z-z_0)|^{\cosh z_0}\cdot e^{(z-z_0)\sinh z_0}]^{\frac{\zeta}{2\,|\sqrt{\mu}\,|}}\\
&\text{II. c)} \quad L = A\cdot e^{\frac{3}{16\lambda}z-\frac{3}{32\lambda}e^{-2z}}\\
&\text{II. d)} \quad L = A\,[\cosh(z-z_0)^{\sinh z_0}\cdot e^{(z-z_0)\cosh z_0}]^{\frac{\zeta}{2\,|\sqrt{\mu}\,|}}\\
&\text{III.} \quad L = A\,[|\sin(z-z_0)|^{\sin z_0}\cdot e^{(z-z_0)\cos z_0}]^{-\frac{\zeta}{2\,|\sqrt{-\mu}\,|}}
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet A eine positive Konstante.

Aus den Gleichungen (4.3) und (4.1) mit $p = \dot{L}$ läßt sich dL eliminieren. Man erhält damit die Parameterdarstellung für x_0.

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. a)}\\ \text{I. b)}\end{array}\right\} \qquad x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{3}}\sinh z_0 \int \frac{L(z)}{\cosh(z - z_0)}\,dz$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{II. a)}\\ \text{II. b)}\end{array}\right\} \qquad x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\zeta}{3}}\sinh z_0 \int \frac{L(z)}{\sinh(z - z_0)}\,dz$$

$$\text{II. c)} \qquad x_0 = \pm\frac{1}{4}\int \frac{L(z)}{e^z}\,dz$$

$$\text{II. d)} \qquad x_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\zeta}{3}}\cosh z_0 \int \frac{L(z)}{\cosh(z - z_0)}\,dz$$

$$\text{III.} \qquad x_0 = -\frac{1}{2}\left|\sqrt{\frac{\zeta}{3}}\right|\cos z_0 \int \frac{L(z)}{\sin(z - z_0)}\,dz$$

Im Sonderfall $\zeta = 0$ ergibt sich mit $\dot{L} = \sinh z$, also

$$\ddot{L} = \sinh z \cosh z \frac{dz}{dL},$$

als Lösung:

$$L = A(\cosh z)^{\vartheta}, \qquad x_0 = \vartheta \int \frac{L(z)}{\cosh z}\,dz .$$

Die Lösungsfunktionen zeigen in den verschiedenen Fällen das folgende qualitative Verhalten:

I. a) L steigt von null auf ein Maximum und fällt wieder auf null im Verlauf einer endlichen Zeit. $\dot{L}$ fällt dabei von $+\infty$ auf $-\infty$.

I. b) L fällt von ∞ auf ein noch positives Minimum und steigt wieder nach ∞. Das Zeitintegral konvergiert auf der einen Halbachse von z sicher, auf der anderen ist je nach dem Wert der universellen Konstanten Konvergenz oder Divergenz möglich.

II. a) Die z-Achse ist an der Stelle z_0 zu unterteilen. Für $z \geqslant z_0$ erhält man eine monotone Expansion von $L = 0$ nach $L = \infty$, bei der $\dot{L}$ einen positiven Anfangswert aufweist, auf ein positives Minimum fällt und nachher gegen ∞ ansteigt. Für $z \leqslant z_0$ ergibt sich eine Expansion ohne Wendepunkt von $L = 0$ nach $L = \infty$. $\dot{L}$ steigt monoton von einem positiven Anfangswert nach $\dot{L} = \infty$. Diese Entwicklungen können in endlicher Zeit ablaufen oder unendlich lange dauern.

Am Anfang und im Wendepunkt dieser Lösungen verschwindet in (3.12a) das Produkt $L\ddot{L}$. Infolgedessen müssen Geraden, die den zugehörigen $\dot{L}$-Wert als Steigungsmaß besitzen, ebenfalls Lösungen darstellen. Die linearen Lösungen mit der Steigung der Wendetangente sind

singulär, sie berühren in jedem ihrer Punkte eine reguläre Lösung in deren Wendepunkt, also in zweiter Ordnung.

II. b) Wieder ist die z-Achse zu unterteilen. Für $z \geqslant z_0$ erhält man eine monotone Expansion von $L = 0$ nach $L = \infty$, bei der $\dot{L}$ monoton von unendlich nach einem endlichen Endwert fällt. Für $z \leqslant z_0$ ergibt sich eine analoge Expansion, die aber einen Wendepunkt enthält. Über lineare Lösungen gilt Ähnliches wie im Falle IIa.

II. c) d). Auch hier erhält man eine monotone Expansion von $L = 0$ nach $L = \infty$. $\dot{L}$ fällt nun von ∞ auf ein positives Minimum und steigt wieder nach ∞. Die Entwicklung kann innerhalb einer endlichen Epoche ablaufen oder unendlich lange dauern. Es tritt wieder eine singuläre lineare Lösung auf.

III. Für $\lambda > 0$ ergeben sich Lösungen, die sich wieder wie in I. b) aus einer Kontraktions- und einer Expansionsphase zusammensetzen. $\dot{L}$ strebt hier für $x_0 \to \pm\infty$ je einem endlichen Wert zu. Wieder tritt ein Wendepunkt auf, und es ergeben sich wieder lineare Lösungen.

Für den speziellen Fall $\lambda = 0$ erhält man eine monotone Expansion von einem endlichen Anfangswert nach einem endlichen Endwert. Die ganze Entwicklung dauert unendlich lange. Es existiert wieder eine singuläre lineare Lösung; die übrigen linearen Lösungen vereinfachen sich hier zu $L =$ konstant.

Ist $\lambda < 0$, so erhält man eine Expansion von $L = 0$ nach einem endlichen Wert und nachfolgend Kontraktion nach $L = 0$. $\dot{L}$ weist einen endlichen Anfangs- und Endwert auf. Die ganze Entwicklung spielt sich in einem endlichen Zeitintervall ab. Wiederum existiert ein Wendepunkt, und es treten wieder lineare Lösungen auf.

Im *Sonderfall* $\zeta = 0$ ergeben sich symmetrische Lösungen. Je nach dem Vorzeichen von ϑ handelt es sich um monotone Kontraktion von $L = \infty$ nach einem minimalen positiven Wert mit nachfolgender monotoner Expansion nach $L = \infty$ oder um eine Expansion von $L = 0$ nach einem positiven Maximum mit nachfolgender Kontraktion nach $L = 0$.

LITERATUR

[1] *W. Scherrer,* Metrisches Feld und vektorielles Materiefeld. Comment. Math. Helv. 26, p. 184–202.

[2] *W. Scherrer,* Metrisches Feld und vektorielles Materiefeld. Zweite Mitteilung. Comment. Math. Helv. 27, p. 157–164.

[3] *O. Heckmann,* Theorien der Kosmologie. Berlin 1942.

(Eingegangen den 29. April 1954.)