Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 32 (1957-1958)

Artikel: Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe.
Autor: Delsarte, J. / Lions, J.L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25339

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe

par J. Delsarte et J. L. Lions, Nancy

Introduction

Etant donnés deux opérateurs différentiels A et B, sur un espace H, on dit que X est *un opérateur de transmutation de A en B*, si X est un *isomorphisme* de H sur H, tel que $BX = XA$.

Cette notion dépend de A, de B, et aussi de l'espace H choisi. Elle a été introduite en 1938, dans [2]: A et B étaient deux opérateurs différentiels du deuxième ordre, H était un espace de fonctions d'une variable, définies pour $x \geqslant 0$. Diverses généralisations et applications ont été données à partir de 1950, dans [5], [7], [8], [9], [10], [12].

Si A et B sont d'ordre $m > 2$, à coefficients indéfiniment différentiables, H étant l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur R, il n'existe pas, en général, d'opérateurs de transmutations. Le problème de la classification des opérateurs différentiels, sur R, d'ordre > 2, se pose donc naturellement. Il semble difficile. Un cas particulier, correspondant à une équation singulière, est traité dans [9].

La situation est, au contraire, fort simple si l'on prend pour A et B des opérateurs différentiels sans singularité, dans le domaine complexe, H étant l'espace des fonctions entières d'une variable complexe. Dans ce cas, *on peut toujours transmuer A en B*, pourvu qu'ils soient *de même ordre*. C'est ce que nous montrons au numéro 1.

Nous donnons ensuite quelques applications simples de ce résultat, à la théorie de la moyenne-périodicité, dans le complexe, à la théorie de la commutation de deux opérateurs différentiels, etc.

Ce travail a été résumé dans une note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, p. 832–834 (1957).

1. Théorème de transmutation – Construction d'un isomorphisme particulier

Soit H l'espace des fonctions holomorphes d'une variable complexe x, muni de la topologie usuelle de la convergence uniforme sur tout compact. Soit $D = d/dx$; on désigne par A l'opérateur différentiel:

$$A = \sum_{j=0}^{m} a_j D^j \tag{1.1}$$

où $a_j \in H$ pour tout j, et $a_m = 1$.

On appelle *opérateur de transmutation de A en D^m sur H* un opérateur X, s'il existe, ayant les propriétés suivantes:

(i) X est un isomorphisme de H sur H,

(ii) $D^m X = XA$.

Nous allons montrer dans ce numéro le

Théorème 1.1. *Il existe toujours un opérateur de transmutation de A en D^m sur H.*

On verra au numéro suivant (et c'est d'ailleurs immédiat) qu'il existe alors une infinité d'opérateurs de transmutations de A en D^m.

Par ailleurs, il résulte aussitôt du théorème 1.1 le

Corollaire 1.1. *Si B est un deuxième opérateur d'ordre m, du même type que A, il existe un opérateur de transmutation de A en B.*

Démonstration du théorème 1.1.

1) Pour tout $f \in H$, posons à priori

$$Xf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{m-1} D^p A^k f(0)\, x^{p+km} \frac{1}{(p+km)!} \tag{1.2}$$

et admettons provisoirement le

Lemme 1.1. *La série* (1.2) *converge dans H et l'application linéaire de H dans H ainsi définie est continue.*

Ce lemme admis pour l'instant, nous avons

$$D^m Xf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p} D^p A^k f(0)\, x^{p+(k-1)m} \frac{1}{(p+(k-1)m)!}\,,$$

ce qui, en changeant k en $k-1$ s'écrit $XAf(x)$, donc

$$D^m Xf = XAf \tag{1.3}$$

pour tout $f \in H$.

On va maintenant démontrer que X est un isomorphisme de H sur lui-même. La démonstration va se faire en plusieurs points.

2) *L'opérateur X est biunivoque.*

Notons d'abord la propriété suivante, immédiate à partir de (1.2)

$$Xf(0) = f(0), \quad DXf(0) = Df(0), \ldots, D^{m-1}Xf(0) = D^{m-1}f(0)\,. \tag{1.4}$$

Montrons maintenant que si $Xf = 0$ alors $f = 0$. Vu (1.4) on sait déjà que

$$f(0) = Df(0) = \ldots = D^{m-1}f(0) = 0\,. \tag{1.5}$$

De (1.3) il résulte, puisque $Xf = 0$

$$XAf = 0 \ ,$$

donc, en appliquant (1.4) avec Af au lieu de f

$$Af(0) = DAf(0) = \ldots = D^{m-1}Af(0) = 0 \ ,$$

ce qui, en utilisant la forme de A et (1.5), entraîne

$$D^m f(0) = D^{m+1}f(0) = \ldots = D^{2m-1}f(0) = 0 \ ,$$

et ainsi de suite:

$$D^n f(0) = 0 \quad \text{pour tout } n,$$

donc $f = 0$. C. Q. F. D.

3) *Fonction* $\Theta(x,\lambda)$ *et opérateur* $\mathcal{X}$.

On désigne par $\Theta(x,\lambda)$ *la* solution de

$$A_x\Theta(x,\lambda) - \lambda^m\Theta(x,\lambda) = 0 \ , \qquad \lambda \in C \ , \tag{1.6}$$

avec

$$\Theta(0,\lambda) = 1 \ , \qquad D_x\Theta(0,\lambda) = \lambda, \ldots, D_x^{m-1}\Theta(0,\lambda) = \lambda^{m-1} \ . \tag{1.7}$$

La fonction Θ est entière de x et de λ; considérons le développement

$$\Theta(x,\lambda) = \sum_{n\geqslant 0} \theta_n(x)\lambda^n \frac{1}{n!} \ ; \tag{1.8}$$

on a

$$\theta_n \in H \quad \text{pour tout } n,$$

et les relations

$$A\theta_n = 0 \quad \text{si} \quad n \leqslant m-1 \ , \quad D^j\theta_n(0) = j!\,\delta_{nj} \ , \quad j = 0,1,\ldots,m-1 \tag{1.9}$$

et

$$A\theta_n = \frac{n!}{(n-m)!}\theta_{n-m} \quad \text{si} \quad n \geqslant m, \quad \theta_n(0) = \ldots = D^{m-1}\theta_n(0) = 0 \tag{1.10}$$

relations qui caractérisent complètement les θ_n .

Considérons maintenant la série

$$\mathcal{X}f(x) = \sum_n D^n f(0)\,\theta_n(x)\frac{1}{n!} \tag{1.11}$$

et admettons provisoirement le

Lemme 1.2. *La série* (1.11) *converge dans* H *et l'application linéaire ainsi définie de* H *dans* H *est continue.*

Ce lemme admis pour l'instant, il résulte aussitôt de (1.9) et (1.10) que l'on a

$$A\mathcal{X}f = \mathcal{X}D^m f \quad \text{pour tout} \quad f \in H \ . \tag{1.12}$$

Notons également que

$$\mathcal{X}f(0) = f(0) \ ; \quad D\mathcal{X}f(0) = Df(0), \ldots, D^{m-1}\mathcal{X}f(0) = D^{m-1}f(0) \ . \tag{1.13}$$

4) *L'application X est sur.*

Il résulte de (1.11) que

$$\mathcal{X}x^n = \theta_n \ .$$

Posons $X\theta_n = \varphi_n$. Nous avons $D^m\varphi_n = XA\theta_n$, d'où en utilisant (1.9) et (1.10)

$$D^m\varphi_n = 0 \quad \text{si} \quad n \leqslant m-1 \ , \quad = \frac{n!}{(n-m)!}\varphi_{n-m} \quad \text{si} \quad n \geqslant m \ ,$$

et $D^j\varphi_n(0) = j!\ \delta_{nj}$, $\quad j \leqslant m-1$.

Il en résulte que

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \text{pour tout } n \ ,$$

donc que

$$X\mathcal{X}x^n = x^n \quad \text{pour tout } n, \tag{1.14}$$

et par conséquent

$$X\mathcal{X}f = f \quad \text{pour tout } f \in H \ . \tag{1.15}$$

Ceci montre que X applique H sur H; comme X est déjà biunivoque, il en résulte que X est un isomorphisme (algébrique) de H sur H, d'inverse $\mathcal{X}$; donc X est un isomorphisme topologique (si l'on ne savait pas que $\mathcal{X}$ est continu, le résultat serait également vrai, par application du théorème d'isomorphisme de BANACH).

Démonstration du lemme 1.1. Il résulte de la formule de CAUCHY que

$$Af(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C B(x,y)\frac{1}{(y-x)^{m+1}}f(y)dy \tag{1.16}$$

où

$$B(x,y) = \sum_{j=0}^{j=m}(y-x)^{m-j}a_j(x)j! \ , \tag{1.17}$$

et, où, pour fixer les idées, C est un cercle de centre x. On en déduit

$$A^2f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} B(x,y_1)\frac{1}{(y_1-x)^{m+1}}Af(y_1)dy_1$$

où C_1 est un cercle quelconque de centre x; on peut remplacer

$$Af(y_1) \quad \text{par} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} B(y_1,y_2)\frac{1}{(y_2-y_1)^{m+1}}f(y_2)dy_2$$

où C_2 est un cercle quelconque de centre y_1. Finalement, on peut écrire

$$A^k f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{C_1} \frac{B(x_1 y_1)}{(y_1 - x)^{m+1}} dy_1 \int_{C_2} \frac{B(y_1, y_2)}{(y_2 - y_1)^{m+1}} dy_2 \cdots \int_{C_k} \frac{B(y_{k-1}, y_k)}{(y_k - y_{k-1})^{m+1}} f(y_k) dy_k \tag{1.18}$$

où nous prenons les C_i comme suit: Soit $R > 0$ fixe quelconque; alors

C_k a pour centre y_{k-1}, pour rayon $R/(k+1)$;
C_{k-1} a pour centre y_{k-2}, pour rayon $R/(k+1)$;
.....
C_2 a pour centre y_1, pour rayon $R/(k+1)$;
C_1 a pour centre x , pour rayon $R/(k+1)$.

En utilisant maintenant la relation

$$D^p f(0) = \frac{p!}{(2\pi i)} \int_{C_0} \frac{1}{y_0^{p+1}} f(y_0) dy_0$$

où C_0 a pour centre l'origine et pour rayon $R/(k+1)$, on a finalement

$$D^p A^k f(0) = \frac{p!}{(2\pi i)^{k+1}} \int_{C_0} \frac{dy_0}{y_0^{p+1}} \int_{C_1} \frac{B(y_0, y_1)}{(y_1 - y_0)^{m+1}} dy_1 \int_{C_2} \cdots \int_{C_k} \frac{B(y_{k-1}, y_k)}{(y_k - y_{k-1})^{m+1}} f(y_k) dy_k \tag{1.19}$$

où $C_0, C_1, \ldots C_k$ sont choisis comme ci-dessus et où C_1 a pour centre y_0 et pour rayon $R/(k+1)$.

Du choix des rayons il résulte que dans (1.19) on a

$$|y_k| \leqslant R \ .$$

De façon générale si $g \in H$, posons

$$|g|_R = \max |g(x)| \ , \qquad |x| \leqslant R \ .$$

On a

$$|B(y_{l-1}, y_l)| \leqslant m! \ (1 + \alpha(R,k)) \ ,$$

où

$$\alpha(R,k) = |a_{m-1}|_R \left(\frac{R}{k+1}\right) + |a_{m-2}|_R \left(\frac{R}{k+1}\right)^2 + \cdots + |a_0|_R \left(\frac{R}{k+1}\right)^m$$

et l'on déduit alors de (1.19)

$$|D^p A^k (f(0))| \leqslant p! (m!)^k (1 + \alpha(R,k))^k \left(\frac{k+1}{R}\right)^{km+p} |f|_R \ . \tag{1.20}$$

Il en résulte que

$$\limsup_{n = p + km \to \infty} \left(\left| D^p A^k f(0) \frac{x^n}{n} \right|^{1/n} \right) \leqslant \frac{(m!)^{1/m} e}{Rm} |x| \ .$$

Puisque R est fixé quelconque, le lemme 1.1 en résulte.

Démonstration du lemme 1.2. Commençons par démontrer le lemme suivant:

Lemme 1.3. *Soit v une fonction donnée dans H telle que $|v(x)| \leqslant M|x|^{\lambda-1}$, λ entier, pour $|x| \leqslant R$ (M dépend de R). Soit u la solution de*

$$Au = v \ , \tag{1.21}$$

avec

$$u(0) = Du(0) = \ldots = D^{m-1}u(0) = 0 \ . \tag{1.22}$$

Alors, il existe une constante C dépendant de R et de A telle que pour tout x avec $|x| \leqslant R$, on ait

$$|u(x)| \leqslant M \frac{\Gamma(\lambda)}{(m+\lambda)!} |x|^{m+\lambda-1} \exp C|x| \ . \tag{1.23}$$

Démonstration. On multiplie les deux membres de (1.21) par

$$\frac{1}{(m-1)!}(x-y)^{m-1} \ ,$$

et on intégre de 0 à x, sur le segment joignant 0 à x, pour fixer les idées. On obtient

$$u(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x (x-y)^{m-1} v(y)dy + \int_0^x H(x,y)u(y)dy \tag{1.24}$$

où $H(x,y)$ est une fonction entière de x et y, qui dépend de A.

Si l'on pose

$$w(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x (x-y)^{m-1} v(y)dy \ ,$$

on peut écrire, posant $y = tx$

$$w(x) = \frac{x^m}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} v(tx)dt$$

d'où en utilisant l'hypothèse faire sur v

$$|w(x)| \leqslant M \frac{\Gamma(\lambda)}{(m+\lambda)} |x|^{m+\lambda-1} \ , \qquad |x| \leqslant R \ . \tag{1.25}$$

On résout maintenant (1.24) par approximation successives

$$u_0 = w, \ldots, u_n = w + \int_0^x H u_{n-1} dy, \ldots$$

On voit facilement que, C désignant le maximum de $H(x,y)$ pour $|x| \leqslant R$, $|y| \leqslant R$

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leqslant M C^n \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(m+\lambda+n)} |x|^{m+\lambda-1+n} , \qquad |x| \leqslant R .$$

On en déduit facilement (1.23).

Passons maintenant à la démonstration du lemme 1.2. Il résulte aussitôt de la majoration suivante:

$$|\theta_{km+p}(x)| \leqslant M |x|^{km+p} \exp(kCR) , \qquad |x| \leqslant R , \tag{1.26}$$

où

$$M = \sup_{j=0,\ldots,m-1,\, |x| \leqslant R} |x|^{-j} |\theta_j(x)| . \tag{1.27}$$

Reste donc à démontrer (1.26); ce que l'on fait, pour p fixé $(0 \leqslant p \leqslant m-1)$ par récurrence sur k. Le résultat est vrai si $k = 0$, par définition de M. Admettons le pour $1, \ldots, k-1$, donc

$$|\theta_{(k-1)m+p}(x)| \leqslant M |x|^{(k-1)m+p} \exp(k-1)CR .$$

On utilise maintenant (1.10) et le lemme 1.3 pour avoir (1.26).

Le Théorème 1.1 est ainsi complètement démontré.

Remarque 1.1. Désignons par $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions holomorphes à l'origine, muni de la topologie de limite inductive usuelle. Soit $A = \sum^m a_j D^j$, avec $a_m = 1$ et $a_j \in \mathcal{H}$. Alors la démonstration du théorème 1.1 fournit également le

Théorème 1.2. *Il existe toujours un isomorphisme X de $\mathcal{H}$ sur lui-même tel que $D^m X = XA$.*

2. Détermination de tous les isomorphismes

Il est évident que *tout* isomorphisme de transmutation de A en D^m s'obtient en composant l'opérateur X construit au numéro 1 avec un élément quelconque Y *du groupe $\mathcal{G}_m$ des isomorphismes tels que*

$$D^m Y = Y D^m . \tag{2.1}$$

Nous allons dans ce numéro construire $\mathcal{G}_m$.

Soit H' le dual de H; si $f \to \langle \mu; f \rangle$ est une forme linéaire continue sur H $(\mu \in H')$, elle est déterminée de façon unique par

$$\langle \mu, e_\lambda \rangle = \hat{\mu}(\lambda) , \qquad e_\lambda(x) = \exp(\lambda x) , \qquad \lambda \in C ; \tag{2.2}$$

$\hat{\mu}$ est une fonction entière de type exponentiel. – On appelle $\hat{\mu}$ *la transformée de* Fourier *de* μ.

Soit maintenant $Y \in \mathcal{L}(H, H)$; alors, pour tout $a \in C$ fixé, $f \to Yf(a)$ est une forme linéaire continue sur H, donc de la forme

$$Yf(a) = <\mu(a), f> \tag{2.3}$$

où $\mu(a) \in H'$; soit $\hat{\mu}(a; \lambda)$ la transformée de FOURIER de $\mu(a)$; la fonction $a \to Yf(a)$ étant dans H, la fonction $a \to \mu(a)$ est entière à valeurs dans H' ou, ce qui revient au même $a, \lambda \to \hat{\mu}(a, \lambda)$ est entière en a et λ, entière de type exponentiel en λ (de type borné lorsque a parcourt un compact). Cherchons maintenant à construire les $Y \in \mathcal{L}(H; H)$, ayant les *deux propriétés supplémentaires*

(i) Y vérifie (2.1) (Y est un opérateur de *commutation*),

(ii) Y est un isomorphisme de H sur lui-même.

Recherche des Y vérifiant (i).

Il suffit d'écrire que $D^m Y e_\lambda = Y D^m e_\lambda$ pour tout $\lambda \in C$; mais $D^m e_\lambda = \lambda^m e_\lambda$ donc

$$D^m Y e_\lambda = \lambda^m Y e_\lambda \ . \tag{2.4}$$

Or

$$Y e_\lambda(a) = <\mu(a), e_\lambda> = \hat{\mu}(a; \lambda)$$

donc (2.4) équivaut à

$$D_a^m \hat{\mu}(a; \lambda) = \hat{\mu}(a; \lambda) \tag{2.5}$$

et

$$\lambda \to \hat{\mu}(a; \lambda), \ \lambda \to D_a^p \hat{\mu}(a; \lambda)$$

doivent être entières de type exponentiel, donc

$$\hat{\mu}(a; \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} M_j(\lambda) \exp(\lambda \omega^j a) \tag{2.6}$$

où

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$$

et où les fonctions

$$M_j \quad (j = 1, \ldots, m-1)$$

sont entières de type exponentiel. Donc

Proposition 2.1. *Tout Y vérifiant* (i) *est représenté par* (2.3) *où la transformée de FOURIER de $\mu(a)$ est donnée par* (2.6).

Recherche des Y vérifiant (i) *et* (ii).

Si Y vérifie (i) et (ii) alors l'isomorphisme *inverse*

$$Z = Y^{-1}$$

vérifie également

$$D^m Z = Z D^m$$

donc, vu la proposition 2.1 on a

$$Zf(a) = <\nu(a), f> \tag{2.7}$$

avec

$$\hat{\nu}(a;\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} N_j(\lambda) \exp(\lambda \omega^j a) \ . \tag{2.8}$$

Il faut trouver la condition nécessaire et suffisante pour que, Y étant donné, il existe Z donné par (2.7) et (2.8) avec

$$YZf = ZYf = f$$

pour tout $f \in H$; il suffit naturellement d'écrire

$$YZe_\lambda = ZYe_\lambda = e_\lambda \tag{2.9}$$

pour tout $\lambda \in C$. Or

$$Ze_\lambda(a) = \hat{\nu}(a;\lambda)$$

et alors

$$YZe_\lambda(a) = \sum_{j=0}^{m-1} N_j(\lambda) \hat{\mu}(a;\lambda\omega^j) \ .$$

De même

$$ZYe_\lambda(a) = \ldots \sum_{j=0}^{m-1} M_j(\lambda) \hat{\nu}(a;\lambda\omega^j)$$

de sorte que (2.9) équivaut à

$$\sum_{j,k} N_j(\lambda) M_k(\lambda\omega^j) \exp \lambda a \omega^{j+k} = \sum_{j,k} M_j(\lambda) N_k(\lambda\omega^j) \exp(\lambda a \omega^{j+k}) = \exp(\lambda a)$$

ou encore, tous les calculs d'indices étant faits modulo m

$$\sum M_{k-j}(\lambda\omega^j) N_j(\lambda) \exp(\lambda a \omega^k) = \exp(\lambda a) \ ,$$

$$\sum N_{k-j}(\lambda\omega^j) M_j(\lambda) \exp(\lambda a \omega^k) = \exp(\lambda a) \ ,$$

donc

$$\sum_j M_{k-j}(\lambda\omega^j) N_j(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \end{cases} \tag{2.10}$$

et

$$\sum_j N_{k-j}(\lambda\omega^j) M_j(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \end{cases} \tag{2.11}$$

Introduisons les matrices (m,m)

$$\mathcal{M}(\lambda) = \| M_{k-j}(\lambda\omega^j) \| = \left\| \begin{array}{lll} M_0(\lambda) & M_1(\lambda) \ ; \ldots ; & M_{m-1}(\lambda) \\ M_{m-1}(\lambda\omega) & M_0(\lambda\omega); \ldots ; & M_{m-2}(\lambda\omega) \\ M_{m-2}(\lambda\omega^2) & ; \ldots ; & \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M_1(\lambda\omega^{m-1}) & \ldots ; & M_0(\lambda\omega^{m-1}) \end{array} \right\|$$

$$\mathcal{N}(\lambda) = \| N_{k-j}(\lambda\omega^j) \| \ .$$

Alors (2.10) et (2.11) équivalent à

$$\mathcal{M}(\lambda)\,\mathcal{N}(\lambda) = E \qquad (E = \text{matrice unité}) \tag{2.12}$$

$$\mathcal{N}(\lambda)\,\mathcal{M}(\lambda) = E \tag{2.13}$$

Il résulte de (2.12) par exemple qu'une condition nécessaire est

$$\text{dét.}\ \mathcal{M}(\lambda) \neq 0 \qquad \text{pour tout } \lambda\ . \tag{2.14}$$

Mais la fonction

$$\lambda \to \text{dét.}\ \mathcal{M}(\lambda)$$

est entière de type exponentiel et

$$\text{dét.}\ \mathcal{M}(\lambda\omega) = \text{dét.}\ \mathcal{M}(\lambda)$$

donc (en utilisant le théorème de WEIRSTRASS)

$$\text{Dét.}\ \mathcal{M}(\lambda) = C_{\mathcal{M}} = \text{Constante} \neq 0 \qquad \text{si} \qquad m \geqslant 2 \tag{2.15}$$

(si $m = 1$, alors dét. $\mathcal{M}(\lambda) = \mathrm{C}\exp(b\lambda)$).

Le système (2.10) détermine de façon unique les fonctions $N_j(\lambda)$ – et les $N_j(\lambda)$ *sont entières de type exponentiel.*

La matrice $\mathcal{N}(\lambda)$ construite à partir des fonctions $N_j(\lambda)$ que l'on vient de trouver vérifie (2.12), donc (2.13). Donc (2.10) et (2.11) ont lieu.

On a donc obtenu le

Théorème 2.1. *Tout isomorphisme Y de H sur lui-même tel que $D^m Y = Y D^m$ avec $m \geqslant 2$, est de la forme*

$$Yf(a) = \langle \mu(a), f\rangle$$

où

$$\langle \mu(a), e_\lambda\rangle = \hat{\mu}(a;\lambda) = \sum_{j=0}^{m=1} M_j(\lambda)\exp(\lambda\omega^j a)\ ,$$

les fonctions M_j étant entières de type exponentiel telles que dét. $\|M_{k-j}(\lambda\omega^j)\| =$ *constante non nulle.*

Remarque 2.1. Si $m = 1$, dét. $\mathcal{M}(\lambda) = M_0(\lambda) = c\exp(b\lambda)$ et $Y\cdot f(x) = cf(x+b)$ $(c \neq 0)$. Enfin, on a la

Proposition 2.2. *Si $m \geqslant 2$, le groupe $\mathcal{G}_m$ des isomorphismes Y tels que $D^m Y = Y D^m$ admet une représentation fidèle, de degré m, formée par les matrices*

$$\mathcal{M}(\lambda) = \|M_{k-j}(\lambda\omega^j)\|$$

où les fonctions M sont entières de type exponentiel, et telles que dét. $\mathcal{M}(\lambda) \neq 0$.

Remarque 2.2. D'après le théorème 1.1, le groupe $\mathcal{G}_A$ des isomorphismes X tels *que* $AX = XA$ *est isomorphe à* $\mathcal{G}_m$.

3. Fonctions moyenne-périodiques par rapport à D^m

Pour $f \in H$, on désignera par $T_m(f)$ le sous-espace vectoriel fermé de H engendré par Xf quand X parcourt $\mathcal{G}_m$.

Définition 3.1. On dit qu'une fonction $f \in H$ est *moyenne-périodique par rapport* à D^m lorsque $T_m(f)$ est différent de H.

Si $m = 1$, on retrouve la notion usuelle dans le domaine complexe ([4], [13]). Mais en fait la définition 3.1 n'introduit pas de notion nouvelle.

Proposition 3.1. *Il y a identité entre fonctions moyenne-périodiques par rapport à* D^m *et fonctions moyenne-périodique usuelles.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{G}_m \supset \mathcal{G}_1$, il est évident que toute fonction moyenne-périodique par rapport à D^m est moyenne-périodique usuelle.

Réciproquement, soit f moyenne-périodique usuelle. On veut montrer que f est moyenne-périodique par rapport à D^m, donc qu'il existe $T \in H'$, non nulle, avec

$$\langle T, Xf \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in \mathcal{G}_m \ . \tag{3.1}$$

Soit $S \in H'$, $\neq 0$, orthogonale à $T_1(f)$; soit $\hat{S}(\lambda)$ la transformée de Fourier de S et posons

$$F(\lambda) = \prod_{j=0}^{m-1} \hat{S}(\omega^j \lambda) \ . \tag{3.2}$$

La fonction F est entière de type exponentiel, donc de la forme

$$F(\lambda) = \hat{T}(\lambda) \ , \qquad T \in H' \ , \qquad \neq 0 \ . \tag{3.3}$$

On va montrer qu'avec ce choix de T, (1) *a lieu.*

On sait que si l'on appelle spectre de f l'ensemble des zéros de $\hat{S}$, comptés avec leur multiplicité, alors $T_1(f)$ est engendré par les $x^q \exp \alpha x$, $q \leqslant p$, $(\alpha, p) \in$ spectre de f.

Donc $T_m(f)$ est engendré par les $X(x^q \exp \alpha x)$, $q \leqslant p$, $X \in \mathcal{G}_m$. Il suffit donc de montrer que

$$\langle T, X(x^q \exp \alpha x) \rangle = 0 \tag{3.4}$$

pour tout $X \in \mathcal{G}_m$ et tout $q \leqslant p$, $(\alpha, p) \in$ spectre de f.

Or, d'après (2.6), $X(x^q \exp \alpha x)$ est combinaison linéaire de $x^r \exp \alpha \omega^j x$, $r \leqslant p$, $j = 0, \ldots, m-1$. Donc (3.4) a lieu si, pour tout j, $\alpha \omega^j$ est un zéro

de $F(\lambda) = \hat{T}(\lambda)$, de multiplicité p. Or, il en est bien ainsi d'après (3.2), d'où la proposition.

4. Fonctions moyenne-périodiques et commutateurs de D^m

Soit $\mathcal{A}_m$ l'algèbre des endomorphismes Y de $H \to H$ tels que

$$D^m Y = Y D^m \ . \tag{4.1}$$

On dit que $\mathcal{A}_m$ est *l'algèbre des commutateurs de* D^m. D'après le numéro 2, $\mathcal{A}_m$ est représentée fidèlement par l'algèbre des matrices

$$\mathcal{M}(\lambda) = || \, M_{k-j}(\lambda \omega^j) || \ .$$

Définition 4.1. Le commutateur Y est dit *non dégénéré* si la fonction dét. $\mathcal{M}(\lambda)$ n'est pas identiquement nulle.

Lemme 4.1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un commutateur Y de D^m ne soit pas dégénéré est qu'il existe un deuxième commutateur Z de D^m tel que*

$$YZ = ZY = S \ , \tag{4.2}$$

où $S \in \mathcal{A}_1$, non nul.

Démonstration. La condition est suffisante; en effet si $\mathcal{N}(\lambda)$ est la matrice correspondant à Z, il résulte de (4.2) (puisque la matrice correspondant à S est de la forme: $\hat{S}(\lambda) \cdot E$, $E =$ matrice unité (m, m))

$$(\text{dét. } \mathcal{M}(\lambda)) \, (\text{dét. } \mathcal{N}(\lambda)) = \hat{S}(\lambda)$$

donc dét. $\mathcal{M}(\lambda)$ n'est pas nul.

La condition est nécessaire: désignons par $N_j(\lambda)$ le mineur relatif à l'élément $M_j(\lambda)$ sur lequel se croisent la première ligne et la j-ème colonne de $\mathcal{M}(\lambda)$; la fonction N_j est entière de type exponentiel; formons la matrice

$$\mathcal{N}(\lambda) = || N_{k-j}(\lambda \omega^j) || \ ;$$

elle représente un élément Z de $\mathcal{A}_m$; or

$$\mathcal{M}(\lambda) \, \mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}(\lambda) \, \mathcal{M}(\lambda) = [\text{dét. } \mathcal{M}(\lambda)] \cdot E \ ; \tag{4.3}$$

la fonction dét. $\mathcal{M}(\lambda)$ étant entière de type exponentiel, la matrice

$$[\text{dét. } \mathcal{M}(\lambda)] \cdot E$$

représente un élément S de $\mathcal{A}_1$ (considéré dans $\mathcal{A}_m$), et (4.3) entraîne (4.2) d'où le lemme. On en déduit

Proposition 4.1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément f de H soit moyenne-périodique est qu'il existe un commutateur Y de D^m, non dégénéré, tel que*

$$Yf = 0 \ . \tag{4.4}$$

Si f est moyenne-périodique, il existe $S \in \mathcal{A}_1$, $S \neq 0$, avec $Sf = 0$. D'où (4.4) avec $Y = S$ considéré dans $\mathcal{A}_m$. Réciproquement, soit f vérifiant (4.4). Comme Y est non-dégénéré, il existe Z dans $\mathcal{A}_m$, satisfaisant à la condition (4.2). Alors

$$ZYf = Sf = 0 \ .$$

Donc f est moyenne-périodique.

Remarque 4.1. Soit

$$Yf = \sum_{j=0}^{m-1} \int_T g_j(t) f(t + \omega^j x) dt$$

les fonctions g_j étant analytiques et holomorphes à l'infini. Alors, le commutateur $S = ZY$ du lemme 4.1, s'explicite comme suit

$$Sf = \int \cdots \int_{T^m} \text{dét} \, || g_{k-j}(t_j) || \cdot f(x + \sum_{j=0}^{m-1} \omega^j t_j) dt_1 dt_2 \ldots dt_m \ . \tag{4.5}$$

Remarque 4.2. La proposition 4.4 est inexacte si Y est dégénéré, comme le montre, pour $m = 2$, le commutateur

$$Y \cdot f(x) = f(x) + f(-x)$$

qui est annulé par toute fonction impaire.

Nous reviendrons ultérieurement sur le cas des commutateurs dégénérés.

5. Fonctions moyenne-périodiques par rapport à $\mathcal{G}_A$

Soit $\mathcal{G}_A$ le groupe des isomorphismes Y de H sur H, tels que

$$AY = YA \tag{5.1}$$

où A désigne, comme au paragraphe 1, l'opérateur différentiel d'ordre m

$$A = \sum_{j=0}^{m} a_j D^j$$

où $a_j \in H$ pour tout j, et où $a_m = 1$.

Si $f \in H$, on désigne par $T_A(f)$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par les Yf, $Y \in \mathcal{G}_A$ (donc $T_{D^m}(f) = T_m(f)$).

Définition 5.1. Un fonction $f \in H$ est dite *moyenne-périodique par rapport à* A si $T_A(f)$ est différent de H.

Soit X un isomorphisme de transmutation de A en D^m: $D^m X = XA$; donc $A = X^{-1} D^m X$ et (5.1) équivaut à

$$XYX^{-1} D^m = D^m XYX^{-1} \tag{5.2}$$

donc

$$XYX^{-1} = Z \ , \qquad Z \in \mathcal{G}_m \ . \tag{5.3}$$

Alors

$$T_A(f) = XT_m(X^{-1} f) \tag{5.4}$$

de sorte que l'on a:

Proposition 5.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que f soit moyenne-périodique par rapport à A est que $X^{-1} f$ soit moyenne-périodique, X étant un isomorphisme de transmutation quelconque de A en D^m.*

Puisque le choix de X est arbitraire, prenons désormais X défini au numéro 1 (i. e. $D^p X f(0) = D^p f(0)$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$).

L'espace $T_m(X^{-1} f)$ est engendré par les exponentielles monomes qu'il contient. Donc d'après (5.4), $T_A(f)$ est engendré par les fonctions de la forme

$$X(x^p \exp \alpha x) \tag{5.5}$$

qu'il contient. En utilisant

$$D^m X = XA \quad \text{et} \quad D^p X f(0) = D^p(0) \ , \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1 \ ,$$

il est facile de déterminer les fonctions (5.5).

6. Nouveaux développements en série

Appliquons l'opérateur $X^{-1} = \mathcal{X}$ aux deux membres de (1.2). En notant que

$$\mathcal{X}\, x^n = \theta_n \ ,$$

on a le

Théorème 6.1. *Soit A donné par* (1.1) *et les fonctions θ_n données par* (1.9) *et* (1.10). *Pour tout $f \in H$, on a*

$$f = \sum_k \sum_{p=0}^{p=m-1} D^p A^k f(0) \frac{\theta_{p+km}}{(p+km)!} \ . \tag{6.1}$$

Si $A = D^m$, c'est la série de TAYLOR, dont on donne ainsi une généralisation.

Remarque 6.1. Puisque $A = X^{-1} D^m X$, et $D^j = (D^m)^{j/m}$, on *posera*

$$A^{j/m} = X^{-1} D^j X \ . \tag{6.2}$$

Comme $Xf(0) = f(0)$, on a

$$A^{j/m}f(0) = D^j f(0) \ , \quad \text{donc} \quad D^p A^k f(0) = A^{p/m} A^k f(0) = A^{(k+km)/m} f(0)$$

et par conséquent

$$f = \sum_{n \geqslant 0} A^{n/m} f(0) \frac{\theta_n}{n!} \ . \tag{6.3}$$

7. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Soit $x \in C$, $y \in C$, $z \in C^N$; H_x (resp. H_y, H_z, $H_{x,y,z}$) désigne l'espace des fonctions entières en x (resp. y, z, et x, y, z). On donne

$$A = \sum_{j=0}^{m} a_j(x) D_x^j \ , \qquad a_j \in H \ , \ a_m = 1 \ ; \tag{7.1}$$

$$B = \sum_{j=0}^{n} b_j(y) D_y^j \ , \qquad b_j \in H \ , \ b_n = 1 \ ; \tag{7.2}$$

(7.3) $Q =$ opérateur différentiel dans H_z à coefficients constants. On donne ensuite un *polynome* $p(t_1, t_2, \tau)$, $t_i \in C$, $\tau \in C^N$, et l'on considère l'opérateur différentiel

$$\Lambda = p(A, B, Q) \ . \tag{7.4}$$

On va démontrer le

Théorème 7.1. *Soit f une fonction donnée dans $H_{x,y,z}$. Il existe toujours u dans $H_{x,y,z}$ solution de*

$$\Lambda u = f \ . \tag{7.5}$$

Démonstration. Soit X opérateur de transmutation de A en D^m, et Y opérateur de transmutation de B en D^n. On rappelle (cf. [6]) que

$$H_{x,y,z} = H_x \hat{\otimes} H_y \hat{\otimes} H_z \ .$$

Soit G l'opérateur

$$G = X \otimes Y \otimes 1 \ , \tag{7.6}$$

1 désignant l'application identique de H_z sur lui-même. On a

$$G \cdot (\xi_{\alpha\beta\gamma} A^\alpha \cdot B^\beta \cdot Q^\gamma) = \xi_{\alpha\beta\gamma} (D^m)^\alpha \cdot (D^n)^\beta \cdot Q^\gamma \cdot G \ ,$$

donc

$$G\Lambda = p(D^m, D^n, Q) \cdot G$$

et par conséquent (7.5) équivaut à

$$p(D^m, D^n, Q)(Gu) = Gf \ . \tag{7.7}$$

Mais $p(D^m, D^n, Q)$ est à coefficients constants, et d'après [11] (Chap. II), (7.7) admet une solution (au moins): soit v. Alors

$$u = G^{-1}(v)$$

vérifie (7.5), ce qui démontre le théorème.

La méthode précédente donne des théorèmes d'existence et d'unicité. Par exemple:

Théorème 7.2. *On donne A et B comme en* (7.1) *et* (7.2). *Il existe une fonction $u(x,y)$ et une seule, entière en x et y, telle que*

$$A_x u(x,y) = B_y u(x,y) \tag{7.8}$$

avec les conditions de CAUCHY:

$$D_y^j u(x,0) = f_j(x) \ , \qquad j = 0, \ldots, m-1 \tag{7.9}$$

les f_j étant données dans H.

Naturellement l'existence *locale* de u est bien connue (CAUCHY-KOVALEWSKA); l'existence globale n'était peut-être pas complètement évidente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BOCHNER, *Sturm-Liouville... Proceedings of the Conférence on differential equations*, Maryland 1955, p. 23–48.

[2] J. DELSARTE, *Sur certaines transformations...* C. R. Acad. Sci. Paris 206, 1938, p. 1780.

[3] J. DELSARTE, *Colloque sur les équations aux dérivées partielles*, Nancy, Avril 1956.

[4] J. DELSARTE, *Les fonctions moyenne-périodiques*, J. Math. Pures Appl. 14, 1935, p. 403–453.

[5] GELFAND-LEVITAN, Iswestziya Acad. Nauk SSSR., Ser. Mat. 15, 1951, p. 309–360.

[6] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 1955, no 16.

[7] LEVITAN, Translation no 59 (1950) of the Amer. Math. Soc.

[8] J. L. LIONS, *Opérateurs de* DELSARTE *et problèmes mixtes*, Bull. Soc. Math. France 84, 1956, p. 9–95.

[9] J. L. LIONS, *Quelques applications d'opérateurs de transmutation*, Colloque Nancy, Avril 1956.

[10] J. L. LIONS, *Solutions élémentaires...*, J. Math. Pures Appl. 1957.

[11] B. MALGRANGE, *Existence et approximation...*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 1956, p. 3–87.

[12] MARCENKO, Trudy Moscov Mat. Obsc. 1, 1952, p. 327–420; 2, 1953, p. 3–83.

[13] L. SCHWARTZ, *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques*, Ann. Math. 48, 1947, p. 857–929.

Note ajoutée à la correction des épreuves. –
M. K. FAGE, [Doklady, Akad. Nauk, (1957) t. 112, n° 6] vient d'annoncer un théorème *local* de transmutation, pour certaines classes de fonctions de variables réelles.

(Reçu le 28 mars 1957)