Sur les idéaux fermatiens d'un anneau commutatif.

Autor(en): **Thierrin, Gabriel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **32 (1957-1958)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25346

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Sur les idéaux fermatiens d'un anneau commutatif

par GABRIEL THIERRIN

Si C est l'anneau des nombres entiers et si n est un nombre impair > 1, on voit facilement que le dernier théorème de FERMAT est vrai pour l'exposant n si et seulement si l'idéal (0) est tel que la relation $\sum_{i=1}^{3} a_i^n \in (0)$ entraîne $\sum_{i=1}^{3} a_i \in (0)$. Ce fait nous a conduit à considérer dans un anneau commutatif A deux classes d'idéaux qui font l'objet de ce travail, les idéaux (n, r)-fermatiens et n-fermatiens.

Un idéal M de A est (n, r)-fermatien, n et r étant deux entiers fixés avec $n > 1$, $r \geqslant 1$, si la relation $\sum_{i=1}^{r} a_i^n \in M$ entraîne $\sum_{i=1}^{r} a_i \in M$. Tout idéal (n, r)-fermatien est semi-premier. Le radical (n, r)-fermatien d'un idéal quelconque M est l'intersection de tous les idéaux (n, r)-fermatiens contenant M; c'est un idéal (n, r)-fermatien et il est intersection d'idéaux premiers (n, r)-fermatiens. Cette propriété entraîne que tout anneau (n, r)-fermatien (non réduit à 0) est isomorphe à une somme sous-directe de domaines d'intégrité (n, r)-fermatiens. (Pour la notion de somme sous-directe d'anneaux, cf. [2], [3]). Un idéal M de A est n-fermatien, s'il est (n, r)-fermatien, quel que soit r. On obtient pour les idéaux n-fermatiens des résultats analogues à ceux des idéaux (n, r)-fermatiens.

1. Idéaux (n, r)-fermatiens

Soient A un anneau commutatif et n et r deux nombres entiers *fixés*, avec $n > 1$ et $r \geqslant 1$. Un idéal M de A sera dit *(n, r)-fermatien*, si la relation $\sum_{i=1}^{r} x_i^n \in M$ entraîne $\sum_{i=1}^{r} x_i \in M$.

Un anneau commutatif dont l'idéal (0) est (n, r)-fermatien sera dit un *anneau (n, r)-fermatien*. Par exemple, si n est pair, l'anneau C des nombres entiers est (n, r)-fermatien. On voit d'autre part facilement que l'anneau C est $(n, 3)$-fermatien, n impair, si et seulement si le dernier théorème de FERMAT est vrai pour l'exposant n.

Remarquons que si M est un idéal de A, l'anneau-quotient A/M est (n, r)-fermatien, si et seulement si M est (n, r)-fermatien. Tout idéal (n, r)-fermatien est (n, s)-fermatien, avec $1 \leqslant s \leqslant r$. L'intersection d'idéaux (n, r)-fermatiens est encore un idéal (n, r)-fermatien.

Remarque. Si p et q sont deux nombres entiers positifs fixés, tout idéal M tel que la relation $\sum_{i=1}^{p} x_i^n - \sum_{j=1}^{q} y_j^n \in M$ entraîne $\sum_{i=1}^{p} x_i - \sum_{j=1}^{q} y_j \in M$ est un idéal $(n, p+q)$-fermatien. Si n est impair, c'est immédiat. Supposons n pair et posons $p+q=r$, $p+1=s$. Soit $\sum_{i=1}^{r} a_i^n \in M$. De $x^n - (-x)^n \in M$ suit $x-(-x)=2x \in M$, quel que soit x. De $\sum_{i=1}^{p} a_i^n + \sum_{i=s}^{r} a_i^n \in M$ et $2\sum_{i=s}^{r} a_i^n \in M$ suit $\sum_{i=1}^{p} a_i^n - \sum_{i=s}^{r} a_i^n \in M$ et $\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=s}^{r} a_i \in M$. Comme $2\sum_{i=s}^{r} a_i \in M$, on a donc $\sum_{i=1}^{r} a_i \in M$.

Rappelons qu'un idéal M est dit *semi-premier*, si la relation $x^2 \in M$ entraîne $x \in M$. Il en résulte que l'on a $x \in M$, dès que l'on a $x^m \in M$, m étant un entier positif quelconque. Par conséquent, un idéal est semi-premier si et seulement s'il est $(n, 1)$-fermatien.

Théorème 1. *Tout idéal (n, r)-fermatien M d'un anneau commutatif est semi-premier.*

En effet, tout idéal (n, r)-fermatien est $(n, 1)$-fermatien, donc semi-premier.

Corollaire 1. *Tout anneau commutatif (n, r)-fermatien ne contient pas d'éléments nilpotents différents de zéro.*

Corollaire 2. *Pour qu'un anneau commutatif A dont la caractéristique est un nombre premier p soit (p, r)-fermatien, il faut et il suffit qu'il ne contienne pas d'éléments nilpotents différents de zéro.*

Si M est un idéal quelconque d'un anneau commutatif A, l'intersection de tous les idéaux (n, r)-fermatiens contenant M est un idéal (n, r)-fermatien qui sera appelé le *radical (n, r)-fermatien de M* et noté par $R_{(n, r)}(M)$. Si $1 \leqslant s \leqslant r$, on a $R_{(n, s)}(M) \subseteq R_{(n, r)}(M)$, puisque tout idéal (n, r)-fermatien est (n, s)-fermatien. Un idéal est (n, r)-fermatien si et seulement s'il coïncide avec son radical (n, r)-fermatien. Désignons par $S_1(M)$ l'idéal engendré par l'ensemble de tous les éléments x de A de la forme $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $\sum_{i=1}^{r} x_i^n \in M$, par $S_2(M)$ l'idéal $S_1[S_1(M)]$, et d'une manière générale par $S_k(M)$ l'idéal $S_1[S_{k-1}(M)]$. On a les relations $M \subseteq S_1(M) \subseteq \ldots \subseteq S_k(M) \subseteq \ldots \subseteq R_{(n, r)}(M)$.

On déduit facilement de là que

$$R_{(n, r)}(M) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k(M)$$

car $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k(M)$ est un idéal (n, r)-fermatien.

Le radical (n, r)-fermatien de l'idéal (0) de l'anneau A sera appelé le *radical (n, r)-fermatien de A* et noté par $R_{(n, r)}$.

Rappelons qu'un idéal premier P de A est dit un *idéal premier minimal appartenant à* M, si $M \subseteq P$ et s'il n'existe pas d'idéal premier P' tel que $M \subseteq P' \subset P$. Nous dirons de même qu'un idéal premier (n, r)-fermatien Q de A est un *idéal premier (n, r)-fermatien minimal appartenant à* M, si $M \subseteq Q$ et s'il n'existe pas d'idéal premier (n, r)-fermatien Q' tel que $M \subseteq Q' \subset Q$.

Théorème 2. *Soit M un idéal (n, r)-fermatien d'un anneau commutatif A. Tout idéal premier minimal appartenant à M est un idéal premier (n, r)-fermatien minimal appartenant à M, et inversement.*

Soit P un idéal premier minimal appartenant à M et supposons $P \subset A$. On sait (cf. [1], [2]) que l'ensemble $B = A - P$ est un sous-demi-groupe multiplicatif maximal ne rencontrant pas M (c'est-à-dire sans éléments communs avec M). Soit $x = \sum_{i=1}^{r} x_i^n \in P$. Si $y = \sum_{i=1}^{r} x_i \notin P$, alors $y \in B$. Désignons par X le sous-demi-groupe multiplicatif cyclique engendré par l'élément x. On a $X \cap M = \emptyset$; en effet de $x^m \in M$ suit, puisque M est semi-premier (théorème 1), $x \in M$ et donc $y \in M \subseteq P$, ce qui est impossible. On a de même $BX \cap M = \emptyset$. En effet, si $b \in B$ et si $bx^m \in M$, on a $(bx)^m \in M$. D'où $bx \in M$ et $b^n x \in M$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{r} (bx_i)^n \in M$. Cette dernière relation entraîne, puisque M est (n, r)-fermatien, $\sum_{i=1}^{r} bx_i \in M$ et $by \in M \cap B$, ce qui est impossible. De ce qui précède, il résulte que le sous-demi-groupe

$$T = B \cup X \cup BX$$

contient B et ne rencontre pas M; d'où, puisque B est maximal, $T = B$. Comme $x \in T$, on a donc $x \notin P$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, $\sum_{i=1}^{r} x_i \in P$, et P est un idéal premier (n, r)-fermatien minimal appartenant à M.

Soit maintenant Q un idéal premier (n, r)-fermatien minimal appartenant à M. On sait que tout idéal premier Q contenant un idéal M contient un idéal premier minimal P appartenant à M. Mais d'après la première partie du théorème, P est (n, r)-fermatien. Donc $P = Q$.

Théorème 3. *Le radical (n, r)-fermatien $R_{(n, r)}(M)$ d'un idéal quelconque M d'un anneau commutatif A est l'intersection de tous les idéaux premiers (n, r)-fermatiens minimaux appartenant à M.*

Le radical $R_{(n, r)}(M)$ est un idéal (n, r)-fermatien, donc semi-premier. Par conséquent, (cf. [1], [2]), $R_{(n, r)}(M)$ est l'intersection de tous les idéaux premiers minimaux P_i appartenant à $R_{(n, r)}(M)$. D'après le théorème 2, ces idéaux P_i sont tous les idéaux premiers (n, r)-fermatiens minimaux apparte-

nant à $R_{(n,\,r)}(M)$. De la définition du radical (n, r)-fermatien suit alors facilement que les idéaux P_i sont aussi tous les idéaux premiers (n, r)-fermatiens minimaux appartenant à M.

Corollaire. *Tout idéal (n, r)-fermatien M de A est l'intersection de tous les idéaux premiers (n, r)-fermatiens minimaux appartenant à M.*

Théorème 4. *Pour qu'un anneau commutatif A (non réduit à zéro) soit isomorphe à une somme sous-directe de domaines d'intégrité (n, r)-fermatiens, il faut et il suffit qu'il soit (n, r)-fermatien.*

On voit facilement que la condition est nécessaire. Elle est aussi suffisante. En effet, l'idéal (0), étant (n, r)-fermatien, est d'après le corollaire du théorème 3, intersection de tous les idéaux premiers (n, r)-fermatiens minimaux P_i appartenant à (0). Par conséquent, A est isomorphe à une somme sous-directe des anneaux-quotients A/P_i. Comme $A \neq 0$, on a $P_i \subset A$ et les anneaux A/P_i sont des domaines d'intégrité (n, r)-fermatiens.

Théorème 5. *Le corps des quotients K d'un domaine d'intégrité (n, r)-fermatien A est un corps (n, r)-fermatien.*

Soit $\sum_{i=1}^{r} k_i^n = 0$, avec $k_i \in K$. Les éléments k_i sont de la forme $k_i = a_i b_i^{-1}$, avec a_i, $b_i \in A$, $b_i \neq 0$. Posons $b = b_1 b_2 \ldots b_r$; on a $b \neq 0$, $b k_i \in A$ et $\sum_{i=1}^{r} (b k_i)^n = 0$. D'où, puisque A est (n, r)-fermatien, $b \sum_{i=1}^{r} k_i = \sum_{i=1}^{r} b k_i = 0$. Par conséquent, $\sum_{i=1}^{r} k_i = 0$ et K est (n, r)-fermatien.

Théorème 6. *Pour que tous les domaines d'intégrité (n, r)-fermatiens soient de caractéristique non nulle, il faut et il suffit que l'anneau C des nombres entiers ne soit pas (n, r)-fermatien.*

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. En effet, soit A un domaine d'intégrité (n, r)-fermatien et soit K le corps des quotients de A. D'après le théorème 5, K est (n, r)-fermatien. Si A est de caractéristique nulle, il en est de même de K. Le corps K contient alors un sous-corps isomorphe au corps des nombres rationnels qui n'est pas (n, r)-fermatien, puisque C ne l'est pas. Par conséquent, K n'est pas (n, r)-fermatien, ce qui est contradictoire.

Théorème 7. *Soit C l'anneau des nombres entiers et soient a et n deux nombres entiers supérieurs à l'unité, avec n impair. Posons $r = a^n + 1$. Le radical (n, r)-fermatien $R_{(n,\,r)}$ de A vérifie la relation*

$$(0) \subset R_{(n,\,r)} \subseteq (2) \ .$$

L'idéal (2) est évidemment (n, r)-fermatien; donc $R_{(n,r)} \subseteq (2)$. On a d'autre part $a^n - a^n = 0$ et $a^n - a \neq 0$. L'élément a^n peut s'écrire $a^n = 1^n + \ldots + 1^n$. On a par conséquent

$$1^n + \ldots + 1^n + (-a)^n = 0 \quad \text{et} \quad 1 + \ldots + 1 + (-a) \neq 0 .$$

L'idéal (0) n'est donc pas (n, r)-fermatien. D'où $(0) \subset R_{(n,r)}$.

Théorème 8. *Soit n un nombre entier impair > 1. Si l'anneau C des nombres entiers n'est pas (n, r)-fermatien, tout nombre premier q, à partir d'un certain rang, est de la forme*

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{r} a_i^n}{b}, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i = 1 .$$

Si C n'est pas (n, r)-fermatien, C n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers (n, r)-fermatiens. Par conséquent, tout nombre premier q, à partir d'un certain rang, est tel que l'idéal premier (q) correspondant n'est pas (n, r)-fermatien. Soit Q le corps des classes résiduelles modulo q, $Q = C/(q)$; le corps Q n'est pas (n, r)-fermatien. Il existe par conséquent r éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in Q$ tels que l'on ait $\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^n = 0$. En multipliant respectivement par α^{-1} et α^{-n}, on a, en posant $\alpha_i \alpha^{-1} = \beta_i$

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} \beta_i^n = 0 .$$

Ces relations donnent dans C:

$$\sum_{i=1}^{r} b_i = sq + 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} b_i^n = tq .$$

Posons $a_i = b_i$ pour $i = 1, \ldots, r-1$, $a_r = b_r - sq$.
On a alors

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i^n = bq \neq 0 .$$

Donc $q = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} a_i^n}{b}$.

Corollaire 1. *Soient a et n deux nombres entiers supérieurs à l'unité, avec n impair, et posons $r = a^n + 1$. Tout nombre premier q, à partir d'un certain rang, est de la forme*

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{r} a_i^n}{b} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i = 1 .$$

En effet, d'après le théorème 7, l'anneau C n'est pas (n, r)-fermatien.

Corollaire 2. *Si l'équation* $x^n + y^n = z^n$ *a des solutions en nombres entiers positifs* x, y, z, *avec* n *impair* > 1, *tout nombre premier* q, *à partir d'un certain rang, est de la forme*

$$q = \frac{a^n + b^n + c^n}{d} \quad \text{avec} \quad a + b + c = 1 \ .$$

En effet, avec cette hypothèse, l'anneau C n'est pas $(n, 3)$-fermatien.

Corollaire 3. *Le dernier théorème de Fermat est vrai pour tout exposant impair* $n > 1$ *tel qu'il existe une infinité de nombres premiers* q *ne pouvant se mettre sous la forme*

$$q = \frac{a^n + b^n + c^n}{d} \quad \text{avec} \quad a + b + c = 1 \ .$$

2. Idéaux n-fermatiens

Soient A un anneau commutatif et n un nombre entier *fixé*, avec $n > 1$. Un idéal M de A sera dit *n-fermatien*, s'il est (n, r)-fermatien pour tout entier positif r. Un anneau commutatif dont l'idéal (0) est n-fermatien sera dit un *anneau n-fermatien*. Si N est un idéal de A, l'anneau-quotient A/N est n-fermatien si et seulement si N est n-fermatien. L'anneau C des nombres entiers est n-fermatien pour n pair; par contre, d'après le théorème 7, C n'est pas n-fermatien pour n impair.

Du corollaire 2 du théorème 1 suit immédiatement que pour qu'un anneau commutatif, dont la caractéristique est un nombre premier p, soit p-fermatien, il faut et il suffit qu'il ne contienne pas d'éléments nilpotents différents de zéro.

L'intersection d'idéaux n-fermatiens est encore un idéal n-fermatien. Si M est un idéal quelconque de A, l'intersection de tous les idéaux n-fermatiens contenant M est un idéal n-fermatien qui sera appelé le *radical n-fermatien* de M et désigné par $R_n(M)$.

Théorème 9. *On a la relation*

$$R_n(M) = \bigcup_{r=1}^{\infty} R_{(n,\, r)}(M) \ .$$

Posons $\bigcup_{r=1}^{\infty} R_{(n,\, r)}(M) = S$. Comme $R_{(n,\, r)}(M) \subseteq R_n(M)$ pour tout entier positif r, on a donc $S \subseteq R_n(M)$. L'ensemble S est un idéal, car $R_{(n,\, r)}(M)$ est un idéal et on a $R_{(n,\, r)}(M) \subseteq R_{(n,\, s)}(M)$ pour $r < s$. D'autre part, on voit facilement que S est un idéal n-fermatien. Donc $R_n(M) \subseteq S$ et $S = R_n(M)$.

Un idéal premier n-fermatien P sera dit un *idéal premier n-fermatien minimal appartenant à l'idéal* M, si $M \subseteq P$ et s'il n'existe pas d'idéal premier n-fermatien P' tel que $M \subseteq P' \subset P$.

Du théorème 2 suit facilement le théorème suivant:

Théorème 10. *Soit M un idéal n-fermatien d'un anneau commutatif A. Tout idéal premier minimal appartenant à M est un idéal premier n-fermatien minimal appartenant à M, et inversement.*

Théorème 11. *Le radical n-fermatien $R_n(M)$ d'un idéal quelconque M d'un anneau commutatif A est l'intersection de tous les idéaux premiers n-fermatiens minimaux appartenant à M.*

Le radical $R_n(M)$ est un idéal n-fermatien, donc semi-premier. Par conséquent, $R_n(M)$ est l'intersection de tous les idéaux premiers minimaux P_i appartenant à $R_n(M)$. D'après le théorème 10, ces idéaux P_i sont tous les idéaux premiers n-fermatiens minimaux appartenant à $R_n(M)$. De la définition du radical n-fermatien suit alors facilement que les idéaux P_i sont aussi tous les idéaux premiers n-fermatiens minimaux appartenant à M.

Corollaire. *Tout idéal n-fermatien M de A est l'intersection de tous les idéaux premiers n-fermatiens minimaux appartenant à M.*

Théorème 12. *Pour qu'un anneau commutatif A (non réduit à zéro) soit isomorphe à une somme sous-directe de domaines d'intégrité n-fermatiens, il faut et il suffit qu'il soit n-fermatien.*

En utilisant le corollaire du théorème 11, la démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 4.

Théorème 13. *Le corps des quotients d'un domaine d'intégrité n-fermatien est un corps n-fermatien.*

Ce théorème découle immédiatement du théorème 5.

Théorème 14. *Tout anneau n-fermatien A, n impair, est de caractéristique non nulle N et N divise tout nombre de la forme $q^n - q$, q étant un entier quelconque > 1.*

En effet, pour tout $a \in A$, on a l'égalité $q^n a^n + (-qa)^n = 0$ qui peut se mettre sous la forme

$$a^n + \ldots + a^n + (-qa)^n = 0 .$$

Par conséquent, $a + \ldots + a + (-qa) = 0$, c'est-à-dire $q^n a - qa = (q^n - q)a = 0$. L'anneau A est donc de caractéristique non nulle N et N divise $q^n - q$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Krull, *Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung*, Math. Annalen 101 [1929], p. 729–744.

[2] N. H. McCoy, *Rings and ideals*, Carus Mathematical Monographs, no 8, 1948.

[3] N. H. McCoy, *Subdirect sums of rings*, Bull. Amer. Math. Soc., 53 [1947], p. 856–877.

(Reçu le 13 septembre 1957)