Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1959)

Artikel: Über eine spezielle Klasse von Nabelpunkten.
Autor: Voss, K.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26010

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über eine spezielle Klasse von Nabelpunkten

von K. Voss in München

Herrn Professor H. Kneser zum 60. Geburtstag gewidmet

Auf einem differentialgeometrischen Flächenstück F im Euklidischen x, y, z-Raum sei o ein isolierter Nabelpunkt. Die zur größeren Hauptkrümmung von F gehörigen Krümmungsrichtungen bilden auf $F - o$ ein stetiges Feld nicht orientierter Linienelemente, dessen Homotopieklasse durch den *Index* j von o beschrieben wird. Definiert man j in noch näher zu erläuternder Weise als die durch 2π dividierte Winkeländerung bei Umlaufung von o, so wird j eine ganze oder halbganze Zahl, je nachdem, ob das Feld orientierbar oder nicht orientierbar ist. Offenbar gibt es Richtungsfelder mit isolierter Singularität, bei denen $2j$ eine beliebige ganze Zahl ist; dagegen kann der Index eines *Nabelpunktes* nicht beliebige Werte annehmen: nach einem Satz von Hamburger ist auf reell-analytischen Flächen stets $j \leq 1$. Bei der Untersuchung der Nabelpunkte auf Weingartenschen Flächen (vgl. H. Hopf [1], ferner K. Voss [2]) hat sich gezeigt, daß das Verhalten der Hauptkrümmungen von F in der Umgebung von o einen Einfluß auf den Index haben kann. Hier wird in dieser Beziehung folgender Satz bewiesen:

Satz 1. *Ist F stetig differenzierbar, $F - o$ zweimal stetig differenzierbar und gilt für die Hauptkrümmungen k_1, k_2 auf $F - o$ die Ungleichung $(k_1 - c)(k_2 - c) < 0$ mit konstantem c, so ist der Index $j \leq 0$.*

Hierbei kann o Nabelpunkt sein mit $k_1 = k_2 = c$; es ist aber auch zugelassen, daß die k_i in o gar nicht existieren. Bei Flachpunkten auf negativ gekrümmten Flächen, also im Spezialfall $c = 0$ des Satzes 1, ist die Eigenschaft $j \leq 0$ wohlbekannt. Sie wurde von Cohn-Vossen [3] beim Beweis des Kongruenzsatzes für isometrische Eiflächen entdeckt und von Schilt [4] neu begründet; ein anderer Beweis stammt von H. Hopf und Samelson [5].

Der Satz 1 läßt sich auf ein Lemma von Cohn-Vossen über gewisse Abbildungen von Richtungsfeldern zurückführen. Die betreffenden Sätze werden im folgenden zunächst formuliert und mit Beweisen versehen, die sich zum Teil an die Schiltsche Darstellung, zum Teil enger an die ursprüngliche Cohn-Vossensche Idee anschließen. Dann wird ein Satz über zwei sich berührende Flächen hergeleitet, der den Satz 1 enthält. Die Schiltschen Ergebnisse über das Verhalten der Fläche relativ zur Tangentialebene werden ebenfalls auf diesen Fall verallgemeinert. Schließlich wird noch die umgekehrte Ungleichung $(k_1 - c)(k_2 - c) > 0$ untersucht.

Abbildung von Richtungsfeldern

In der x, y-Ebene sei U eine Umgebung des Punktes o, ferner Γ eine stetige geschlossene Kurve in $U - o$, bezogen auf die orientierte Parameterkreislinie S, und γ die *Umlaufzahl* von Γ um o. Ein stetiges Feld ebener Einheitsvektoren $\mathfrak{v} = \{v_1, v_2\}$ längs Γ induziert in folgender Weise eine Abbildung φ von S in sich: man realisiere S als positiv durchlaufenen Einheitskreis einer v_1, v_2-Ebene und trage $\mathfrak{v}$ in dieser Ebene ab. Der Abbildungsgrad von φ werde als *Drehzahl* d von $\mathfrak{v}$ längs Γ bezeichnet ($d \cdot 2\pi$ ist die Gesamtdrehung von $\mathfrak{v}$ bei Durchlaufung von Γ). Die beiden Felder $\mathfrak{v}$ und $-\mathfrak{v}$ haben dieselbe Drehzahl.

Ein stetiges Vektorfeld in $U - o$ erzeugt längs jeder Kurve ein Feld; homotope Kurven induzieren homotope Abbildungen von S, also dieselbe Drehzahl. Zwei geschlossene Kurven sind dann und nur dann homotop in $U - o$, wenn sie dieselbe Umlaufzahl γ um o haben. Daher hängt $d^{(\gamma)}(\mathfrak{v})$ nur von γ ab, und es gilt

$$d^{(\gamma)}(\mathfrak{v}) = \gamma d^{(1)}(\mathfrak{v}) . \tag{1}$$

$d^{(1)}$ heißt Drehzahl von $\mathfrak{v}$ schlechthin.

Ist o Nabelpunkt auf F, so entsteht durch Projektion der Krümmungsrichtungen auf die Tangentialebene in o ein Linienelementfeld in $U - o$, welches sich längs jeder Kurve Γ mit $\gamma = 2$ auf zwei Arten orientieren läßt, wobei Vektorfelder $\mathfrak{v}$ und $-\mathfrak{v}$ längs Γ entstehen. Der *Index* von o sei definiert durch

$$j = \tfrac{1}{2} d^{(2)}(\mathfrak{v}) .$$

Nun sei σ: $(x, y) \to (x', y')$ eine stetige Abbildung von U in eine x', y'-Ebene mit der Eigenschaft: *in $U - o$ ist σ stetig differenzierbar, und die Funktionaldeterminante*

$$\Delta = \frac{\partial (x', y')}{\partial (x, y)}$$

ist positiv. (Im Punkt o darf zum Beispiel $\Delta = 0$ sein). Dann wird behauptet:

Es gibt Kreisscheiben V um o und V' um $o' = \sigma(o)$ und eine natürliche Zahl g mit folgenden Eigenschaften: Der Punkt o' hat außer o keinen weiteren Urbildpunkt in V; jeder Punkt $p' \neq o'$ von V' hat in V genau g Urbildpunkte.

Demnach ist ein Teil von V vermöge σ verzweigte g-blättrige Überlagerung von V' mit einem Windungspunkt über o'.

Beweis[1]*:* Da jeder Punkt p von $U - o$ eine Umgebung besitzt, die eineindeutig abgebildet wird, können sich die Urbildpunkte von o' in p nicht

[1]) Vgl. Schilt [4], S. 250–251.

häufen. Ein Kreisringgebiet mit Zentrum o enthält daher nur endlich viele Urbilder von o'; also gibt es eine Kreislinie L um o, die kein Urbild von o' enthält. h sei die Umlaufzahl von $\sigma(L) = L'$ um o', W die von L berandete Kreisscheibe und W' eine Kreisscheibe um o', die von L' nicht getroffen wird. Dann ist h zugleich Abbildungsgrad von σ in den Punkten von W': da die Punkte $p' \neq o'$ bei σ nur eineindeutig und positiv bedeckt werden, besitzt jeder Punkt von $W' - o'$ genau h Urbilder in W (und da es in $W' - o'$ Bildpunkte von W gibt, ist $h > 0$). Dann kann aber o' in $W - o$ höchstens h Urbildpunkte haben, denn jede positive Bedeckung von o' führt auch zu einer Bedeckung in der Nähe von o'. Somit gibt es eine Kreisscheibe V um o, die außer o kein Urbild von o' enthält. Ist K der Randkreis von V, g die Umlaufzahl von $\sigma(K) = K'$ um o' und V' eine zu K' fremde Kreisscheibe um o', so sind alle behaupteten Eigenschaften erfüllt.

Jetzt sei σ eine Abbildung der betrachteten Art, Γ eine geschlossene Kurve in $V - o$ mit der Umlaufzahl γ um o und $\sigma(\Gamma) = \Gamma'$ die Bildkurve mit der Umlaufzahl γ' um o'. Dann gilt folgende Form des Cohn-Vossenschen Lemmas:

Ist $\mathfrak{v}$ ein Vektorfeld längs Γ und $\sigma(\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}'$ das durch die Richtungsabbildung in jedem Punkt entstandene Bildfeld längs Γ', so gilt für die Drehzahlen $d = d^{(\gamma)}(\mathfrak{v})$ und $d' = d^{(\gamma')}(\mathfrak{v}')$:

$$d' - d = \gamma' - \gamma\,. \tag{2_γ}$$

Der Beweis erfolgt in 3 Schritten:

1. *$d' - d$ hat für jedes Feld denselben Wert:* Sind $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ zwei Felder, α der Winkel von $\mathfrak{v}_1$ nach $\mathfrak{v}_2$ als stetige Funktion längs Γ, so ist die Gesamtänderung von α längs Γ

$$\delta\alpha = (d_2 - d_1)2\pi\,.$$

Sind $\mathfrak{v}_1'$, $\mathfrak{v}_2'$, α' die entsprechenden Größen im Bild, so gilt

$$\delta(\alpha' - \alpha) = \{(d_2' - d_2) - (d_1' - d_1)\}2\pi\,.$$

In einem Punkt sei $\alpha \equiv \alpha_0 \bmod 2\pi$ mit $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$, so daß α_0 in einem der vier Bereiche $\alpha_0 = 0$, $0 < \alpha_0 < \pi$, $\alpha_0 = \pi$, $\pi < \alpha_0 < 2\pi$ liegt. Nach Ausübung einer linearen Abbildung mit positiver Determinante folgt, daß α_0' jeweils in demselben Wertebereich liegt, also ist stets

$$\alpha' - \alpha \not\equiv \pi \bmod 2\pi\,.$$

Somit überschreitet $\alpha' - \alpha$ kein ungerades Vielfaches von π, bleibt also im Innern eines Intervalls der Länge 2π. Daher ist $|\delta(\alpha' - \alpha)| < 2\pi$, also $\delta(\alpha' - \alpha) = 0$, das heißt

$$d_2' - d_2 = d_1' - d_1\,.$$

2. *$d' - d$ hat für homotope Kurven Γ denselben Wert:* $\mathfrak{v}'$ sei ein beliebiges stetiges Feld in $\sigma(V - o)$, zum Beispiel $\mathfrak{v}' = \{1, 0\}$. Das Urbildfeld $\mathfrak{v}$ in $V - o$, das bei der Richtungsabbildung im jeweiligen Punkt in $\mathfrak{v}'$ transformiert wird, ist stetig. Homotope Kurven Γ gehen bei σ in homotope Kurven Γ' über, also hängen d und d' nur von der Homotopieklasse von Γ ab.

Da man Γ durch einen γ-mal durchlaufenen Kreis um o ersetzen kann, ist

$$\gamma' = \gamma g \,. \tag{3}$$

Wegen (1) genügt es nun, den Spezialfall $\gamma = 1$ von (2_γ) zu beweisen. Dieser lautet wegen (3):

Für Kurven der Umlaufzahl 1 *ist*

$$d' - d = g - 1 \text{ [2]} \,. \tag{2_1}$$

3. *Konstruktion eines speziellen Feldes*[3]: C' sei eine Kreislinie um o' in V'. Jeder Punkt $p' \in C'$ besitzt eine Umgebung, deren g Urbilder zueinander fremd sind; endlich viele dieser Umgebungen überdecken C'. Bei einem festen Punkt p' beginnend, konstruiert man einen glatten Bogen in $V - o$, der zwei Urbilder von p' verbindet und auf C' abgebildet wird. Nach einer endlichen Anzahl γ' von positiven Umläufen auf C' erhält man eine einfach geschlossene glatte Kurve Γ in $V - 0$, deren Bild Γ' der γ'-mal durchlaufene Kreis C' ist. Dabei ist entweder $\gamma = 0$ oder $\gamma = \pm 1$, je nachdem, ob o im Außengebiet oder im Innengebiet von Γ liegt. Wegen (3) und wegen $\gamma' > 0$ folgt $\gamma = 1$ und $\gamma' = g$.

Verwendet man zur Bestimmung von $d' - d$ die Kurve Γ und ihre positiv gerichteten Tangentenvektoren, so wird nach Konstruktion $d' = g$ und nach dem Tangentensatz[4] $d = 1$, q. e. d.

Im Falle einer Abbildung σ mit $\Delta < 0$ nimmt (2_1) die Form an

$$d' + d = g + 1 \,, \tag{$2_1'$}$$

---

[2]) $g - 1$ ist die Ordnung des Windungspunktes. Aus (2_1) folgt leicht eine bekannte Verzweigungsformel für geschlossene orientierbare Flächen: Ist F vermöge σ eine n-blättrige verzweigte Überlagerung von F' mit der Verzweigungsordnung $Z = \Sigma(g - 1)$ und sind χ, χ' die Eulerschen Charakteristiken, so gilt

$$\chi = n\chi' - Z \,.$$

Bringt man nämlich auf F' ein Feld $\mathfrak{v}'$ an, das höchstens in den Grundpunkten der Windungspunkte singulär ist, und ist $\mathfrak{v}$ das Urbildfeld von $\mathfrak{v}'$ auf F, so gilt $\Sigma d = \chi$, und wegen $d' = d^{(g)}(\mathfrak{v}') = g d^{(1)}(\mathfrak{v}')$ wird $\Sigma d' = n\chi'$.

[3]) Schilt [4], S. 252, verwendet hier ein Niveaulinienfeld, wobei die Bendixsonsche Theorie herangezogen wird.

[4]) Vgl. H. Hopf [6].

denn bei der Abbildung $(x, y) \to (x^* = x', \; y^* = -y')$ ist $\Delta^* > 0$, $g^* = -g > 0$ und, da $\mathfrak{v}^*$ durch Spiegelung von $\mathfrak{v}'$ an der x-Achse entsteht, $d^* = -d'$.

Für den Index eines Linienelementfeldes in $U - o$ folgt daher

$$\begin{aligned} j' - j &= g - 1 \quad \text{für} \quad g > 0\,, \\ j' + j &= g + 1 \quad \text{für} \quad g < 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Identifiziert man die x', y'-Ebene mit der x, y-Ebene, so kann man die Richtungsabbildung in einem Punkt p auch als lineare Abbildung des Richtungsbüschels in sich auffassen, indem man die Bildvektoren $\mathfrak{v}'$ parallel nach p verschiebt.

Bei einer Abbildung σ mit $\Delta < 0$ in $U - o$ hat die Richtungsabbildung in jedem Punkt reelle und verschiedene Eigenwerte; die zum positiven Eigenwert gehörigen Eigenrichtungen bilden ein stetiges Linienelementfeld, für dessen Index j nach (4) gilt

$$j = \tfrac{1}{2}(g + 1) \leq 0\,. \tag{5}$$

Für $\Delta > 0$ stellt die Existenz eines stetigen Eigenrichtungsfeldes eine zusätzliche Voraussetzung dar. Diese hat nach (4) zur Folge, daß $g = 1$, also σ eineindeutig ist.

Berührung zweier Flächen

Jetzt werden Flächenstücke F betrachtet, welche die x, y-Ebene im Punkt $o(x = y = 0)$ berühren. F sei einmal, $F - o$ zweimal stetig differenzierbar. Als Flächenparameter u^i $(i = 1, 2)$ können speziell x, y gewählt werden. Mit den Abkürzungen

$$z_x = p, \; z_y = q, \; 1 + p^2 + q^2 = W^2, \; W > 0, \; P = \frac{p}{W}, \; Q = \frac{q}{W}$$

haben Ortsvektor $\mathfrak{x}$ und Normalvektor $\mathfrak{n}$ die Darstellungen

$$\mathfrak{x} = \{x, y, z\}\,, \qquad -\mathfrak{n} = \{P, Q, -W^{-1}\}\,.$$

Für die Ableitungen von $\mathfrak{n}$ nach u^i gilt

$$-\mathfrak{n}_i = l_i^j \mathfrak{x}_j\,; \tag{6}$$

der gemischte zweite Fundamentaltensor l_i^j hat als Eigenwerte die k_i und als Eigenrichtungen die Krümmungsrichtungen.

Satz 2. *F und $\overline{F}$ seien Flächenstücke, die sich im Punkt o berühren und durch Geraden senkrecht zur Tangentialebene in o aufeinander bezogen sind. Auf*

$F - o$ sei die Determinante $\Delta = |l_i^j - \bar{l}_i^j| < 0$. Dann ist der Index von o im Feld der Eigenrichtungen des Tensors $l_i^j - \bar{l}_i^j$ kleiner oder gleich Null.

Beweis: F und $\bar{F}$ seien auf gemeinsame Parameter x, y bezogen. Aus (6) liest man ab, daß der Tensor l_i^j im x, y-System durch die Funktionalmatrix von P, Q nach x, y repräsentiert wird. Die Funktionalmatrix der Abbildung

$$\begin{aligned} x' &= P - \bar{P} \\ y' &= Q - \bar{Q} \end{aligned} \tag{7}$$

ist somit $l_i^j - \bar{l}_i^j$. Nach (5) ist also $j \leq 0$.

Als Spezialfall des Satzes 2 ergibt sich der Satz 1, wenn man für $\bar{F}$ die Kugel vom Radius $1/|c|$ mit dem Zentrum $\{0, 0, 1/c\}$ bzw. für $c = 0$ die Tangentialebene von F in o wählt. Dann wird nämlich $\bar{l}_i^j = c\,\delta_i^j$, $\Delta = (k_1 - c)(k_2 - c)$, und die Eigenrichtungen sind die Krümmungsrichtungen von F.

Wendet man die Bendixsonsche Theorie[5]) auf die Niveaulinien einer stetig differenzierbaren Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung einer isolierten Nullstelle des Gradienten an, so läßt sich beweisen: Die Drehzahl d des Gradienten ist ≤ 1. Für $d = 1$ hat f in o ein Extremum. Für $d \leq 0$ laufen $2 - 2d$ Niveaulinien in den Punkt o hinein, welche die Umgebung von o in Sektoren mit abwechselnd positivem und negativem Vorzeichen von $f - f_0$ zerlegen; die Zahl $s = -d$ heißt Ordnung des Sattelpunktes o.

Für zwei Flächen F und $\bar{F}$, die sich in o berühren und bei denen $\Delta = |l_i^j - \bar{l}_j^i| \neq 0$ auf $F - o$ ist, folgt:

Satz 3. *Ist g der Abbildungsgrad der Abbildung (7), so gilt:* a) *Für $g < 0$ hat F in o relativ zu $\bar{F}$ einen Sattelpunkt der Ordnung $|g|$.* b) *Für $g > 0$ ist $g = 1$, und F liegt ganz auf einer Seite von $\bar{F}$.*

Beweis: Sei $f(x, y) = z(x, y) - \bar{z}(x, y)$ für $(x, y) \in U$. Die Fälle a) und b) lassen sich zu einem vereinigen, wenn man ein Extremum von f als Sattel der Ordnung -1 auffaßt. Der in (7) gegebene Vektor $\mathfrak{v}_1 = \{x', y'\}$ ist in $V - o$ von Null verschieden und hat die Drehzahl g. Es ist zu zeigen, daß der Gradient $\mathfrak{v}_0$ von f in o eine isolierte Nullstelle und ebenfalls die Drehzahl g hat. Hierzu sei

$$W_t = \{1 + t^2(p^2 + q^2)\}^{\frac{1}{2}}, \qquad P_t = \frac{p}{W_t}, \qquad Q_t = \frac{q}{W_t}$$

gesetzt, so daß

$$1 - t^2(P_t^2 + Q_t^2) = W_t^{-2} \tag{8}$$

[5]) Unter geeigneten Voraussetzungen wird die Theorie bei Kamke [7] § 22 durchgeführt.

wird. Das Vektorfeld

$$\mathfrak{v}_t = \{P_t - \overline{P}_t, Q_t - \overline{Q}_t\} \text{ für } 0 \leq t \leq 1$$

ist stetig in x, y, t, und bei festem t ist $\mathfrak{v}_t \neq \mathfrak{o}$ in $V - o$, denn aus $\mathfrak{v}_t = \mathfrak{o}$ folgt wegen (8) zunächst $W_t = \overline{W}_t$ und daher $p = \overline{p}$, $q = \overline{q}$, also $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{o}$, was aber nur in o stattfindet. Somit ist $\mathfrak{v}_t$ eine stetige Deformation von $\mathfrak{v}_1$ in $\mathfrak{v}_0$, q. e. d.

Sei F eine Fläche mit Nabelpunkt o und $\Delta = (k_1 - c)(k_2 - c) > 0$ auf $F - o$, bei der auf $F - o$ kein weiterer Nabelpunkt liegt. Während im Falle $\Delta < 0$ der Index j von o gemäß (5) durch g festgelegt ist, folgt für $\Delta > 0$, also $g = 1$, aus (4) nichts über die Größe von j. Man könnte vermuten, daß in diesem Falle stets $j = 1$ sei. Dies ist jedoch nicht der Fall; vielmehr gilt (unter Beschränkung auf den Fall $c = 0$):

Es gibt Flächen F mit Flachpunkt o und $K = k_1 k_2 > 0$ auf $F - o$, bei denen o isolierter Nabelpunkt ist und der Index j einen beliebigen zulässigen Wert ≤ 1 annimmt.

Beispiele: F sei in Polarkoordinaten r, ϑ gegeben durch

$$z = f(x, y) = r^k g(\vartheta), \qquad g(\vartheta) = a - \cos n\vartheta$$

mit einer natürlichen Zahl n. Für $k > 2$ ist F zweimal stetig differenzierbar und o Flachpunkt. $K > 0$ ist gleichbedeutend mit

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = r^{2k-4}(k-1)\{k^2 g^2 + g'^2 + k(gg'' - g'^2)\} > 0\,. \tag{9}$$

Diese Bedingung ist (für $r > 0$) sicher dann erfüllt, wenn

$$a > 1 \quad \text{und} \quad k(a-1)^2 - n^2(a+1) > 0 \tag{9'}$$

ist, was bei festem n durch große a oder k erreicht werden kann. Die Krümmungsrichtungen werden näherungsweise durch

$$-2 f_{xy}(dx^2 - dy^2) + (f_{xx} - f_{yy}) 2\,dx\,dy = 0$$

wiedergegeben. Wählt man

$$a < 1 + n^2/k(k-2)\,, \tag{10}$$

also a und k nicht zu groß, so bekommt das Vektorfeld

$$f_{xx} - f_{yy} + i 2 f_{xy} = -r^{k-2} e^{2i\vartheta}\{g'' - k(k-2)g - i 2(k-1)g'\}$$

eine isolierte Nullstelle in o und die Drehzahl $d = 2 - n$. Der Index des Nabelpunktes o wird dann

$$j = \tfrac{1}{2}d = 1 - \tfrac{1}{2}n\,.$$

Da sich die Bedingungen (9′) und (10) gleichzeitig erfüllen lassen, zum Beispiel durch die Werte

$$k = \frac{9}{4}\,, \qquad a = 1 + \frac{4}{3}\,n^2\,,$$

erhält man für $n = 1, 2, \ldots$ Beispiele der gewünschten Art.

LITERATUR

[1] H. Hopf, *Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen*, Math. Nachrichten 4 (1951) S. 232–249.

[2] K. Voss, *Über geschlossene* Weingartensche *Flächen*, erscheint in den Math. Annalen.

[3] S. Cohn-Vossen, *Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 1927, S. 125–134.

[4] H. Schilt, *Über die isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitssätze*, Compos. Math. 5 (1937) S. 239–283.

[5] H. Hopf und H. Samelson, *Zum Beweis des Kongruenzsatzes für Eiflächen*, Math. Z. 43 (1938) S. 749–766.

[6] H. Hopf, *Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven*, Compos. Math. 2 (1935) S. 50–62.

[7] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, 2. Aufl., Leipzig 1952.

Eingegangen den 1. Juli 1958