Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1959)

Artikel: Systèmes différentiels du type de FUCHS en théorie des distributions.
Autor: Methée, Pierre-Denis
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26006

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions

par Pierre-Denis Methée, Lausanne

1. Introduction. Considérons un système de n équations différentielles (n-système différentiel, en abrégé), du premier ordre, linéaires, sans second membre, pour n distributions inconnues $T_1, \ldots, T_n$ de la variable réelle x, les coefficients étant de classe C^∞ (fonctions indéfiniment dérivables).

Si ce système est régulier, c'est-à-dire résoluble, pour tout x, par rapport aux dérivées T_i', les distributions solutions sont les fonctions C^∞ solutions usuelles (S, I, 130).

Si ce système n'est pas régulier, il n'a, en général, pas de distribution solution. Cependant: «dans des cas où les conditions du théorème de Fuchs sont réalisées, le système a des solutions dépendant de plus de n constantes» (S, I, 132).

Nous nous proposons ici d'étudier le cas général où le système est du type de Fuchs à l'origine, c'est-à-dire de la forme

$$D_i T_i = x T_i' + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(x) T_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) . \tag{1.1}$$

Nous supposons les A_{ik} fonctions C^∞ et, de plus, analytiques au voisinage de l'origine.

Ce système peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle matricielle (S, I, 128)

$$DT = x \frac{dT}{dx} + AT = 0 , \tag{1.2}$$

A désignant la matrice des A_{ik}, et T la distribution vectorielle $\{T_1, \ldots, T_n\}$.

Nous désirons essentiellement établir que la solution générale de (1.2) dépend de $2n$ constantes arbitraires.

Bien entendu, ce résultat vaudra, en particulier, pour une équation différentielle linéaire ordinaire, d'ordre n, du type de Fuchs à l'origine

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} y^{(n-1)} a_{n-1}(x) + \ldots + x y' a_1(x) + a_0(x) = 0 ,$$

dont les coefficients satisfont aux mêmes conditions que les A_{ik}, une telle équation se ramenant aisément à un système (1.1).

Notation. Dans la suite, T représentera toujours une distribution vectorielle, T_i la $i^{\text{ème}}$ «composante» de T. Si l'on considère une famille de distributions

vectorielles, on distinguera celles-ci entre elles par un indice supérieur: T^1, $T^2, \ldots$

2. Distributions de type (O, m). On appellera distribution de type (O, m) toute distribution ayant pour support l'origine O, et d'ordre m, c'est-à-dire de la forme $\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \delta^{(j)}$ avec $\alpha_m \neq 0$, et où $\delta^{(j)}$ est la dérivée d'ordre j de la distribution de DIRAC relative à O.

Une distribution vectorielle T sera dite de support O si toutes ses composantes T_i sont de support O; T sera dite de type (O, m) si $T_i = \sum_{j=0}^{m} \alpha_{ij}\delta^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, n)$, l'un au moins des α_{im} étant non nul.

3. Condition nécessaire pour que l'équation $DT = 0$ **admette pour solution une distribution vectorielle de type** $(O, m-1)$. On établit facilement les formules

$$x^p \delta^{(q)} = (-1)^p \frac{q!}{(q-p)!} \delta^{(q-p)} \quad \text{si } p \leqslant q, \qquad x^p \delta^{(q)} = 0 \quad \text{si } p > q,$$

p et q étant des entiers $\geqslant 0$.

Par hypothèse, on peut poser, pour x assez petit:

$$A_{ik} = \sum_{p=0}^{\infty} A_{ikp} x^p ,$$

d'où l'on déduit

$$A_{ik}\delta^{(j)} = \sum_{p=0}^{\infty} A_{ikp} x^p \delta^{(j)} = \sum_{p=0}^{j} A_{ikp} \frac{(-1)^p j!}{(j-p)!} \delta^{(j-p)} .$$

Si $DT = 0$ admet une solution T de type $(O, m-1)$, chacune des composantes $T_i = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{ij}\delta^{(j)}$ vérifie $D_i T_i = 0$, ce qui mène, par un calcul simple, au système d'égalités $(i = 1, \ldots, n)$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \delta^{(j)} \left[-\alpha_{ij}(j+1) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{m-j-1} \alpha_{k,j+p} A_{ikp} (-1)^p \frac{(j+p)!}{j!} \right] = 0 . \tag{3.1}$$

Les $\delta^{(j)}$ étant linéairement indépendantes, leurs coefficients doivent être nuls. On obtient ainsi, pour chaque valeur de j de 0 à $m-1$, un système de n équations $(i = 1, \ldots, n)$ qui s'écrit, avec le symbole δ_{ik} de KRONECKER:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j} [A_{ik0} - (j+1)\delta_{ik}] = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m-j-1} \alpha_{k,j+p} A_{ikp} (-1)^p \frac{(j+p)!}{j!} . \tag{3.2}$$

En particulier, pour $j = m-1$, on a les n équations

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,m-1} [A_{ik0} - m\delta_{ik}] = 0 , \tag{3.3}$$

satisfaites par des $\alpha_{k,m-1}$ non tous nuls par hypothèse. Le déterminant de la matrice $A(0) - mI$ doit donc être nul, $A(0)$ désignant la matrice des A_{ik0} et I la matrice unité. Or, si l'on pose $F(r) = \text{dét.}\,(-A(0) - rI)$, l'équation $F(r) = 0$ est $(K, 58)$ l'équation caractéristique du système (1.1). D'où le

Lemme I. *Une condition nécessaire pour que l'équation $DT = 0$ admette pour solution une distribution vectorielle de type $(O, m-1)$ est que $-m$ soit solution de l'équation caractéristique.*

Cette condition n'est, en général, pas suffisante. Cependant, on a le

Lemme II. *Si $-m$ (m entier $\geqslant 1$) est la plus grande racine entière négative de l'équation caractéristique, l'équation $DT = 0$ admet une solution de type $(O, m-1)$, unique (à une constante multiplicative près). Il n'y a pas de solution de type (O, s) pour $s < m - 1$.*

En effet, par hypothèse, dét. $(A(0) - mI) = 0$: on peut trouver des $\alpha_{k,m-1}$ non tous nuls vérifiant le système (3.3), et déterminés à un même facteur près. Pour chaque valeur $j = m-2, m-3, \ldots, 0$, le système (3.2) est linéaire, non homogène, à déterminant non nul puisque $-m+1, \ldots, -1$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique. Les inconnues $\alpha_{k,j}$ s'obtiennent donc par résolution d'un système de CRAMER, et sont des fonctions linéaires bien déterminées des $\alpha_{k,j+1}, \ldots, \alpha_{k,m-1}$. La dernière affirmation du lemme II résulte du lemme I.

Lemme III. *Si $-m$ (m entier $\geqslant 2$) est la plus grande racine entière négative de l'équation caractéristique, et si U est une distribution vectorielle donnée de type (O, s) avec $s \leqslant m-2$, l'équation $DT = U$ admet toujours une solution de type (O, s), qui est l'unique solution de support O et d'ordre $\leqslant s$.*

En effet, soient β_{ij} $(i = 1, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, s)$ les coefficients intervenant dans la définition de U. On a à résoudre des systèmes analogues à (3.2), mais où $m-1$ est remplacé par s, et où le second membre contient en addition le terme β_{ij}. Pour $j = s, s-1, \ldots, 0$, on a donc des systèmes linéaires non homogènes, à déterminant non nul (puisque $-m+1, -m+2, \ldots, -1$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique), qui fournissent de façon unique les valeurs des α_{kj} $(k = 1, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, s)$. D'autre part, il ne peut y avoir de solution de support O et d'ordre $< s$, parce que $x\dfrac{d\delta^{(k)}}{dx} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\delta^{(k)}$ est toujours d'ordre k au plus.

4. Solution de $DT = 0$ dans le cas où l'équation caractéristique n'admet aucune racine entière négative. Pour $x \neq 0$, le système (1.1) est régulier: il n'a pas d'autres solutions que les solutions usuelles, fonctions C^∞ puisque

les A_{ik} le sont. Soit ${}^{+}y_i^j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ un système fondamental de ces solutions pour $x > 0$ (pour chaque valeur de j, les n fonctions ${}^{+}y_i^j$ représentent une solution particulière usuelle de (1.1), linéairement indépendante des autres). Soit, de même, ${}^{-}y_i^j$ un tel système pour $x < 0$.

En vertu de l'analyticité des A_{ik}, chaque fonction y_i^j, pour x assez voisin de 0, sera une somme de termes du type $|x|^r \log^p |x| f(x)$, avec r racine de l'équation caractéristique, p entier $\geqslant 0$, $f(x)$ analytique (K, 58 et 59, 82 et 83).

Les y_i^j ne sont, en général, pas intégrables au voisinage de 0, mais les distributions qu'elles définissent pour $x \neq 0$ peuvent être prolongées au moyen des parties finies (M, 253). Nous noterons ${}^{+}T^j$ (resp. ${}^{-}T^j$) la distribution vectorielle de composantes $Pf y_\varepsilon {}^{+}y_i^j$ (resp. $Pf(1 - y_{-\varepsilon}) {}^{-}y_i^j$), y_ε désignant la fonction de HEAVISIDE égale à 1 pour $x > \varepsilon$, à 0 pour $x < \varepsilon$.

Il est alors clair que toute distribution solution de $DT = 0$ doit être de la forme

$$T = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j {}^{+}T^j + \mu_j {}^{-}T^j) + \sum_k \nu_k U^k , \tag{4.1}$$

où les U^k désignent des distributions vectorielles de support O linéairement indépendantes. Il reste à déterminer les relations liant les constantes λ_j, μ_j, ν_k pour que T soit effectivement solution.

Lemme IV. *Si l'équation caractéristique n'admet aucune racine entière négative, la solution générale de $DT = 0$ dépend de $2n$ constantes arbitraires.*

a) Montrons que ${}^{+}T^j$ est solution de l'équation. Comme on a $D{}^{+}T^j = 0$ pour $x \neq 0$, il suffit de vérifier que les termes $A\,{}^{+}T^j$ et $x \dfrac{d}{dx} {}^{+}T^j$ ne donnent aucune contribution à l'origine. Cela est évident pour le premier. On obtient celle du second en déterminant celle de chacun des termes de la forme $x \dfrac{d}{dx} Pf y_\varepsilon x^r \log^p x f(x)$. Et cette contribution est nulle, car un calcul facile (cf. par exemple, M 255) montre qu'elle s'écrit $Pf \varepsilon^{r+1} \log^p \varepsilon f(\varepsilon) \delta_\varepsilon$, où δ_ε est la distribution de DIRAC relative au point d'abscisse ε; cette expression ne fournit aucun terme non nul si r n'est pas entier négatif.

b) On vérifie de la même façon que $D{}^{-}T^j = 0$.

c) Considérons (4.1). Le lemme I montre que DU^k est toujours $\neq 0$. La condition $DT = 0$ entraîne donc $\nu_k = 0$ pour tout k, les λ_j et μ_j restant arbitraires, d'où le lemme IV.

Si l'équation caractéristique a des racines entières négatives, il n'en va plus de même. Mais le calcul effectif de la distribution de support O égale à DT (T défini par (4.1)) est impraticable dans le cas général où l'ordre n du système (1.1) équivalent à $DT = 0$ est quelconque. En revanche, il est aisé

pour $n = 1$. Nous nous ramènerons alors à ce cas par abaissement successif de l'ordre, en nous inspirant de la méthode classique pour un système différentiel linéaire usuel.

On notera que, l'équation $DT = 0$ étant régulière en dehors de l'origine, la recherche du nombre de constantes arbitraires figurant dans la solution générale de cette équation peut se faire dans n'importe quel voisinage ouvert contenant l'origine, si petit soit-il.

5. Abaissement de l'ordre d'un système de FUCHS dans le cas où l'équation caractéristique admet une ou plusieurs racines entières négatives. Considérons un p-système du type de FUCHS à l'origine (p entier > 1 quelconque)

$$D_i T_i = x T_i' + \sum_{k=1}^{p} A_{ik} T_k = 0, \qquad (i = 1, \ldots, p), \tag{5.1}$$

et notons $DT = 0$ l'équation différentielle matricielle équivalente.

Soit $-m$ $(m \geqslant 1)$ la plus grande racine entière négative (qui peut être multiple) de l'équation caractéristique. On pourra trouver, dans un voisinage ouvert V de l'origine, un système de solutions usuelles de la forme $x^{-m} f_i(x)$, les $f_i(x)$ étant analytiques, et, pour fixer les idées, $f_1(x)$ non nulle.

Nous nous plaçons, pour toute la suite du paragraphe, dans V.

Pour alléger l'écriture, nous admettons implicitement que l'indice i varie de 1 à p, l'indice α de 2 à p.

Par hypothèse, pour $x \neq 0$, on a:

$$x(-m x^{-m-1} f_i(x) + x^{-m} f_i'(x)) + \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(x) x^{-m} f_k(x) = 0,$$

donc la relation

$$x f_i' - m f_i + \sum_{k=1}^{p} A_{ik} f_k = 0 \tag{5.2}$$

est vérifiée pour $x \neq 0$; elle l'est aussi pour $x = 0$ par continuité.

Lemme V. *Soient deux familles de distributions T_i et U_i liées par les relations*

$$U_1 f_1 = x^m T_1, \quad U_\alpha f_1 = \frac{x^{m-1}}{f_1}(f_1 T_\alpha - f_\alpha T_1), \tag{5.3}$$

les f_i satisfaisant à l'équation différentielle (5.2). *Alors les opérateurs D_i définis par* (5.1) *et E_i définis ci-dessous*

$$E_1 U_1 = U_1' + \sum_{k=2}^{p} A_{1k} U_k, \qquad E_\alpha U_\alpha = x U_\alpha' + \sum_{k=2}^{p} B_{\alpha k} U_k, \tag{5.4}$$

– les $B_{\alpha k}$ étant certaines fonctions analytiques dans V – sont liés par les relations

$$\begin{cases} x^{m-1} D_1 T_1 = f_1 E_1 U_1, & (5.5) \\ x^{m-1} D_\alpha T_\alpha = f_1 E_\alpha U_\alpha + f_\alpha E_1 U_1. & (5.6) \end{cases}$$

On peut écrire, d'après (5.3):

$$x^{m-1}D_1T_1 = x^{m-1}(xT_1' + \sum_{k=1}^{p} A_{1k}T_k) = (U_1f_1)' - mx^{m-1}T_1 + \sum_{k=1}^{p} A_{1k}x^{m-1}T_k$$
$$= f_1(U_1' + \sum_{k=2}^{p} A_{1k}U_k) + \frac{x^{m-1}}{f_1} T_1(xf_1' - mf_1 + \sum_{k=1}^{p} A_{1k}f_k) ,$$

d'où (5.5), la dernière parenthèse étant nulle en vertu de (5.2).

La seconde relation (5.3) donne

$$xU_\alpha f_1 = x^m T_\alpha - U_1 f_\alpha , \qquad \text{d'où} \qquad x^m T_\alpha' = (xU_\alpha f_1 + U_1 f_\alpha)' - mx^{m-1}T_\alpha ,$$

et un calcul simple montre alors que

$$x^{m-1}D_\alpha T_\alpha = f_\alpha U_1' + f_1(xU_\alpha' + \sum_{k=2}^{p} A_{\alpha k}U_k)$$
$$+ U_\alpha(xf_1' - mf_1 + f_1) + \frac{x^{m-1}}{f_1} T_1(xf_\alpha' - mf_\alpha + \sum_{k=1}^{p} A_{\alpha k}f_k) .$$

Le coefficient du dernier terme est nul en vertu de (5.2). On est alors conduit à (5.6), avec des fonctions $B_{\alpha k}$, de définition immédiate, qui sont analytiques dans V.

Le $(p-1)$-système $E_\alpha U_\alpha = 0$ est encore du type de FUCHS à l'origine. On notera $EU = 0$ l'équation différentielle matricielle équivalente.

Lemme VI. *Si la solution générale de $EU = 0$ dépend de $2p-2$ constantes arbitraires, celle de $DT = 0$ dépend de $2p$ constantes arbitraires.*

En vertu du lemme V, à chaque solution $T = \{T_i\}$ de $DT = 0$ les formules (5.3) font correspondre de façon unique un système U_i vérifiant $E_iU_i = 0$, donc, en particulier, une solution $U = \{U_\alpha\}$ de $EU = 0$, que nous appellerons l'image de T. Nous allons chercher l'image réciproque d'une solution quelconque U, c'est-à-dire l'ensemble des solutions T d'image U.

a) Considérons d'abord le système $U_\alpha = 0$, $U_1 = 0$, et choisissons un système T_i bien déterminé vérifiant (5.3), par exemple $T_1 = \delta^{(m-1)}$, $T_\alpha = T_1 f_1^{-1} f_\alpha$; $T = \{T_i\}$ est une distribution vectorielle de type $(O, m-1)$. Comme $E_iU_i = 0$, T est solution, d'après (5.5) et (5.6), de $x^{m-1}DT = 0$, donc DT est de type (O, s) avec $s \leqslant m-2$. En vertu du lemme III, on peut trouver $\overline{T}$ de même type (O, s) telle que $D\overline{T} = DT$. Ainsi, $T^1 = T - \overline{T}$ est une solution, de type $(O, m-1)$, de $DT = 0$. D'après le lemme II, tout autre système T_i vérifiant (5.3) mène à une distribution proportionnelle à T_1.

b) Soit maintenant $U_\alpha = 0$, $U_1 = 1$, et prenons un système T_i bien déterminé vérifiant (5.3), soit $T_1 = Pf(y_\varepsilon + 1 - y_{-\varepsilon})x^{-m}f_1$, $T_\alpha = f_\alpha f_1^{-1}T_1$. On a toujours $E_iU_i = 0$, et, en raisonnant comme ci-dessus, on voit que

$T = \{T_i\}$, augmentée éventuellement d'une distribution vectorielle de type (O, s) avec $s \leqslant m - 2$ convenablement choisie, satisfait à $DT = 0$. Notons T^2 cette solution.

Si $\overline{T}^2$ est une autre solution obtenue à partir des mêmes U_i, à $\overline{T}^2 - T^2$ correspond le système $U_i^* = 0$, donc $\overline{T}^2 - T^2$ est proportionnel à T_1.

c) L'image réciproque de $U = 0$ est une combinaison linéaire arbitraire de T^1 et T^2. En effet, si T est une solution de $DT = 0$ ayant $U = 0$ pour image, on a $D_i T_i = 0$ et $E_\alpha U_\alpha = 0$, ce qui entraîne $E_1 U_1 = 0$ d'après (5.5) et (5.6), donc $U_1 =$ constante, d'après (5.4), et l'affirmation résulte de a) et b).

d) Soit alors $U = \{U_\alpha\}$ une solution quelconque de $EU = 0$. On a $E_\alpha U_\alpha = 0$; prenons pour U_1 une solution de $E_1 U_1 = 0$. En choisissant un système T_i bien déterminé vérifiant (5.3), on peut construire (cf a)) une solution T de $DT = 0$, d'image U. D'après c), l'image réciproque de U est $T + \lambda T^1 + \mu T^2$ (λ et μ constantes arbitraires).

Démontrons le lemme. Supposons que la solution générale de $EU = 0$ soit une combinaison linéaire de $2p - 2$ distributions vectorielles U^j ($j = 3, \ldots, 2p$) linéairement indépendantes. Soit T^j une solution de $DT = 0$ d'image U^j, et considérons l'ensemble des $2p$ distributions $T^1, T^2, T^3, \ldots, T^{2p}$. Alors:

1. elles sont linéairement indépendantes,
2. toute solution de $DT = 0$ en est une combinaison linéaire.

1. La relation $\sum_{j=1}^{2p} a_j T^j = 0$ entraîne $\sum_{j=3}^{2p} a_j U^j = 0$, donc $a_3 = \ldots = a_{2p} = 0$ par hypothèse. Cette relation se réduit, par conséquent, à $a_1 T^1 + a_2 T^2 = 0$, qui implique $a_1 = a_2 = 0$, T^1 et T^2 étant elles-mêmes linéairement indépendantes (T^1 est de support O, non T^2). Ainsi, tous les a_j doivent être nuls, d'où l'affirmation.

2. Soit T une solution quelconque de $DT = 0$. Son image U est nécessairement une certaine combinaison linéaire des U^j: $U = \sum_{j=3}^{2p} \lambda_j U^j$. Considérons la distribution $\overline{T} = \sum_{j=3}^{2p} \lambda_j T^j$. La différence $T - \overline{T}$ a pour image $U^* = 0$ par construction même, donc, d'après c), c'est une combinaison linéaire de T^1 et T^2.

6. Solution du problème. Prenons d'abord le cas où l'équation différentielle matricielle $DT = 0$ équivalente au n-système (1.1) se réduit à une équation différentielle ordinaire ($n = 1$):

$$DT = x\frac{dT}{dx} + A(x)T = 0 \ .$$

Lemme VII. *La solution générale de* $DT = 0$, *pour* $n = 1$, *dépend de deux constantes arbitraires*[1]).

En effet, l'équation caractéristique s'écrit $r + A(0) = 0$. Si $A(0)$ n'est pas un entier $\geqslant 1$, le résultat n'est qu'un cas particulier de ce qui a été démontré au paragraphe 4.

Soit alors $A(0) = m$ (m entier $\geqslant 1$). La solution usuelle, y, pourra s'écrire $x^{-m}f(x)$ au voisinage de 0, avec $f(x)$ analytique. Posons $T^+ = Pfy_\varepsilon y$, $T^- = Pf(1 - y_{-\varepsilon})y$.

a) On a $DT^+ = -DT^- = S$, S étant une certaine distribution de type $(O, m-1)$, car on peut écrire (§ 4):

$$DT^+ = Pf\varepsilon^{-m+1}f(\varepsilon)\delta_\varepsilon = \sum_{j=0}^{m-1} a_j\delta^{(j)},$$

$$DT^- = Pf\ -(-\varepsilon)^{-m+1}f(-\varepsilon)\delta_{-\varepsilon} = \sum_{j=0}^{m-1} -a_j\delta^{(j)},$$

avec des coefficients a_j faciles à expliciter.

b) En vertu du lemme II, il existe une solution T^* de $DT = 0$ de type $(O, m-1)$, et c'est l'unique solution (à un facteur près) de support O.

c) L'équation $DT = U$, avec U de type $(O, m-1)$, n'admet aucune solution T de support O. En effet, $x\dfrac{d}{dx}\delta^{(k)} + A(x)\delta^{(k)}$ est de type (O, k), avec $A(0) - (k+1)$ comme coefficient de $\delta^{(k)}$. T devrait donc être d'ordre $\geqslant m-1$.

Posons $U = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j\delta^{(j)}$, $\quad T = \sum_{j=0}^{m-1+k} \alpha_j\delta^{(j)}$.

Si $k = 0$, on doit avoir, d'après ce qui précède, $\alpha_{m-1}(A(0) - m) = \beta_{m-1}$, ce qui est impossible puisque $A(0) = m$.

Si $k > 0$, on aura $\alpha_{m-1+k}(A(0) - m - k) = 0$, d'où $\alpha_{m-1+k} = 0$, et on sera ramené, de proche en proche, au cas où $k = 0$.

d) Soit alors T une solution quelconque de $DT = 0$. Elle est de la forme (cf. (4.1))

$$T = \lambda T^+ + \mu T^- + V,$$

avec V de support O. La condition $DT = 0$ entraîne, d'après a), $DV = (\mu - \lambda)S$. D'après c), il faut que $\lambda = \mu$, et alors V est proportionnelle à T^* en vertu de b). D'où

$$T = \lambda(T^+ + T^-) + \nu T^*,$$

λ et ν étant arbitraires, ce qui achève de démontrer le lemme.

Considérons maintenant l'équation différentielle matricielle $DT = 0$ dans le cas général (n quelconque).

---

[1]) Cf. S, I, 132 (cas où $A(x)$ est une constante λ).

Théorème. *L'équation différentielle matricielle* $DT = 0$, *équivalente au* n-*système différentiel* (1.1), *linéaire et du type de* FUCHS *à l'origine, a pour solution générale une combinaison linéaire de* $2n$ *distributions vectorielles linéairement indépendantes.*

En effet, si l'équation caractéristique n'a pas de racines entières négatives, c'est l'énoncé du lemme IV. S'il en existe, soit $-m$ la plus grande; on utilise le procédé d'abaissement exposé dans le paragraphe précédent, autant de fois qu'il le faut. Deux cas sont alors possibles.

Ou l'on est ramené à une équation différentielle matricielle équivalente à un p-système $(p > 1)$ dont l'équation caractéristique n'a plus de racine entière négative. On applique les lemmes IV et VI, et le théorème en résulte.

Ou l'on est ramené à une équation différentielle ordinaire du premier ordre. L'affirmation du théorème se déduit des lemmes VII et VI.

BIBLIOGRAPHIE

K: E. KAMKE, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler Kom.-Ges., Leipzig 1942.

M: P.-D. METHÉE, Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de LORENTZ (thèse). Comment. Math. Helv. 28 (1954), 225–269.

S I: L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, tome I (seconde édition). Actualités scientifiques et industrielles, n° 1245, Hermann, Paris 1957.

(Reçu le 27 mai 1958)