Über ein vollständiges System konformer Invarianten von dreifach-zusammenhängenden Gebieten

Autor(en): **Schnyder, Adolf Theophil**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **34 (1960)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26626

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über ein vollständiges System konformer Invarianten von dreifach-zusammenhängenden Gebieten

von ADOLF THEOPHIL SCHNYDER, Basel

§ 1. Problemstellung und Ergebnisse

1.1. Unter einem *numerierten Gebiet* verstehen wir im folgenden ein dreifach-zusammenhängendes Gebiet der komplexen Ebene, dessen nicht punktförmige Randkomponenten mit den Nummern 1, 2, 3 versehen sind. Zwei numerierte Gebiete G und G^* sollen *konform äquivalent* heißen, wenn es eine konforme Abbildung von G auf G^* gibt, welche jede Randkomponente von G in die Randkomponente mit gleicher Nummer von G^* überführt. In der vorliegenden Arbeit stellen wir uns die Aufgabe, die Äquivalenzklassen numerierter Gebiete durch ein vollständiges System von Invarianten zu charakterisieren. Dazu verwenden wir den von AHLFORS und BEURLING[1]) eingeführten Begriff der Extremallänge von Kurvenscharen.

1.2. Es sei G ein numeriertes Gebiet und Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ die Schar der rektifizierbaren geschlossenen JORDANkurven in G, welche die Randkomponenten mit den Nummern k und l voneinander trennen. Wir bezeichnen die Extremallänge der Schar Γ_i in bezug auf G mit $\lambda[\Gamma_i, G]$ und nennen die drei Zahlen

$$\mu_i(G) = \lambda^{-1}[\Gamma_i, G] \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

die Moduln des numerierten Gebietes G[2]). Es wird sich zeigen, daß diese Moduln ein vollständiges System konformer Invarianten bilden; wir beweisen nämlich

Satz 1. *Zwei numerierte Gebiete G und G^* sind dann und nur dann konform äquivalent, wenn $\mu_i(G) = \mu_i(G^*)$ gilt für $i = 1, 2, 3$.*

Ein solches Äquivalenzkriterium wurde früher von J. A. JENKINS[3]) bewiesen unter Zugrundelegung eines Modulsystems, das aus unserem System (1) hervorgeht, wenn darin die Kurvenschar Γ_i ersetzt wird durch die Schar θ_i derjenigen Kurven in G, welche zur i-ten Randkomponente homotop sind. Das Modulsystem (1) hat nun aber die schöne Eigenschaft, daß sich der Variabilitätsbereich des Punktes $(\mu_1(G), \mu_2(G), \mu_3(G))$ im dreidimensionalen Raum vollständig und sehr einfach charakterisieren läßt. Wir beweisen nämlich

---

[1]) Siehe Literaturverzeichnis Seite 16: AHLFORS und BEURLING [1].

[2]) Vgl. die ausführliche Definition in 2.1.

[3]) Siehe JENKINS [3], [4], [5].

Satz 2. *Für jede Permutation* (i, k, l) *der Ziffern* $1, 2, 3$ *gilt*

$$0 < \mu_i(G) < \mu_k(G) + \mu_l(G).$$

Satz 3. *Sind* $\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*$ *drei positive Zahlen und gilt* $\mu_i^* < \mu_k^* + \mu_l^*$ *für jede Permutation* (i, k, l) *der Ziffern* $1, 2, 3$, *so gibt es ein numeriertes Gebiet* G *mit* $\mu_i(G) = \mu_i^*$ *für* $i = 1, 2, 3$.

Der Verfasser möchte Herrn Prof. HEINZ HUBER, unter dessen Leitung diese Arbeit entstanden ist, für die vielen guten Ratschläge herzlich danken.

§ 2. Moduln von Ringschlitzgebieten

2.1. Definition von Modul und Extremalmetrik[4]). Es sei G ein Gebiet der $z = x + iy$-Ebene und $\Gamma = \{\gamma\}$ eine Schar rektifizierbarer JORDANkurven γ in G. Es sei $M = M[\Gamma, G]$ die Menge aller in G nichtnegativen und stetigen Funktionen $\varrho(z)$, für die $1 \leqq \int_\gamma \varrho(z) \mid dz \mid$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt. $M[\Gamma, G]$ heißt die Menge der bezüglich Γ und G zulässigen Funktionen oder Metriken. Das Integral $\int_\gamma \varrho(z) \mid dz \mid$ ist die Länge der Kurve γ in der Metrik $ds = \varrho(z) \mid dz \mid$ und $A[\Gamma, G] = \iint_G \varrho^2(z) dx dy$ der Flächeninhalt von G in dieser Metrik. Man nennt $\inf_{\varrho \in M[\Gamma, G]} A[\varrho, G] = \mu[\Gamma, G]$ den Modul von Γ und G und $\lambda[\Gamma, G] = \mu^{-1}[\Gamma, G]$ die Extremallänge von Γ und G. Gibt es eine Metrik $\varrho_0(z)$, für die $A[\varrho_0, G] = \mu[\Gamma, G]$ ist, so heißt sie Extremalmetrik bezüglich Γ und G.

2.2[5]). Γ sei eine Schar rektifizierbarer Kurven γ im Gebiet G, Γ^* eine Schar im Gebiet G^*. Es sei φ eine eineindeutige und konforme Abbildung von G^* auf G und es sei $\Gamma = \varphi(\Gamma^*)$. Definieren wir

$$\varrho^\varphi(z) = \varrho(\varphi(z)) \cdot \mid \varphi'(z) \mid, \qquad \varrho(z) \in M[\Gamma, G], \tag{1}$$

so gilt offenbar

$$\int_{\gamma^*} \varrho^\varphi(z) \mid dz \mid = \int_{\varphi(\gamma^*)} \varrho(z) \mid dz \mid, \qquad \gamma^* \in \Gamma^*.$$

Daher (und wegen $\mid \varphi'(z) \mid \neq 0$ in G) ist die durch (1) definierte Zuordnung $\varrho \to \varrho^\varphi$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $M[\Gamma, G]$ auf $M[\Gamma^*, G^*]$, und es gilt $A[\varrho, G] = A[\varrho^\varphi, G^*]$. Daraus ergibt sich

$$\mu[\Gamma^*, G^*] = \inf_{\varrho \in M[\Gamma^*, G^*]} A[\varrho, G^*] = \inf_{\varrho \in M[\Gamma, G]} A[\varrho^\varphi, G^*] = \inf_{\varrho \in M[\Gamma, G]} A[\varrho, G] = \mu[\Gamma, G].$$

Gibt es ferner genau eine Extremalmetrik ϱ_0 zu Γ und G, so gibt es auch genau eine Extremalmetrik zu Γ^* und G^*, nämlich ϱ_0^φ.

---

[4]) Vgl. dazu: AHLFORS und BEURLING [1].
[5]) Vgl. dazu: JENKINS [6].

2.3. Unter einem normierten Ringschlitzgebiet

$$S[r, R, \alpha], \quad 1 < r < R, \quad 0 < \alpha < 2\pi$$

in der $z = x + iy$-Ebene verstehen wir das Gebiet, das entsteht, wenn aus dem Kreisringgebiet $\{z \mid 1 < |z| < R\}$ der Schlitz $\{re^{i\varphi} \mid 0 \leqq \varphi \leqq \alpha\}$ entfernt wird.

2.4. Γ sei die Schar aller rektifizierbaren geschlossenen JORDANkurven in $S[r, R, \alpha]$, welche den innern Randkreis vom äußern trennen. Dann gilt $\mu[\Gamma, S] = \frac{1}{2\pi} \log R$ und es gibt genau eine Extremalmetrik, nämlich $\varrho_0(z) = \frac{1}{2\pi |z|}$.

2.5. Beweis: a). Offensichtlich gilt für jedes $\gamma \in \Gamma$

$$\int_\gamma \varrho_0(z) \, |dz| = \int_\gamma \frac{|dz|}{2\pi |z|} \geqq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{dz}{z} \right| = 1 ,$$

daher ist $\varrho_0(z) \in M[\Gamma, S]$. Ferner ergibt sich sofort

$$A[\varrho_0, S] = \iint_S \frac{dx\,dy}{4\pi^2 |z|^2} = \frac{1}{2\pi} \log R .$$

b). Sei γ_τ eine Kreislinie vom Radius τ um den Ursprung. Wegen $\gamma_\tau \in \Gamma$ für $1 < \tau < R$, $\tau \neq r$, gilt für jedes $\varrho \in M[\Gamma, S]$

$$1 \leqq \int_{\gamma_\tau} \varrho(z) \, |dz| = \int_0^{2\pi} \varrho(\tau e^{i\varphi}) \tau \, d\varphi , \quad 1 < \tau < R , \quad \tau \neq r ,$$

und folglich

$$\iint_S \varrho_0(z) \varrho(z) \, dx\,dy = \frac{1}{2\pi} \int_1^R \frac{d\tau}{\tau} \int_0^{2\pi} \varrho(\tau e^{i\varphi}) \tau \, d\varphi \geqq \frac{1}{2\pi} \int_1^R \frac{d\tau}{\tau} = A[\varrho_0, S] ,$$

somit ist

$$0 \leqq \iint_S (\varrho(z) - \varrho_0(z))^2 dx\,dy = A[\varrho, S] - 2 \iint_S \varrho_0(z) \varrho(z) \, dx\,dy + A[\varrho_0, S] \leqq$$
$$\leqq A[\varrho, S] - A[\varrho_0, S] .$$

Also ist in der Tat $A[\varrho, S] \geqq A[\varrho_0, S] = \frac{1}{2\pi} \log R$ für alle $\varrho \in M[\Gamma, S]$, und das Gleichheitszeichen gilt nur für $\varrho(z) = \varrho_0(z)$.

2.6. Jedes dreifach-zusammenhängende Gebiet kann bekanntlich auf ein normiertes Ringschlitzgebiet konform so abgebildet werden, daß irgend zwei

vorgeschriebene Randkomponenten in die Randkreise übergehen. Daher folgt aus 2.4 und 2.2:

2.7. Ist G ein beliebiges dreifach-zusammenhängendes Gebiet und Γ die Schar aller rektifizierbaren geschlossenen JORDANkurven in G, die irgend zwei vorgeschriebene Randkomponenten voneinander trennen, so existiert zu Γ und G genau eine Extremalmetrik, und diese ist stetig in G.

2.8. Ist S^* ein normiertes Ringschlitzgebiet und Γ^* die Schar der rektifizierbaren geschlossenen JORDANkurven in S^*, die den Schlitz vom äußern Randkreis trennen, so strebt die zu Γ^* und S^* gehörige Extremalmetrik gegen unendlich, wenn $z \in S^*$ gegen einen der Endpunkte des Schlitzes strebt.

2.9. Beweis: Es gibt eine umkehrbar-eindeutige und konforme Abbildung φ von S^* auf ein normiertes Ringschlitzgebiet S, welche den Schlitz von S^* in den innern Randkreis von S und den äußern Randkreis von S^* in den äußern Randkreis von S überführt. Dann ist $\varphi(\Gamma^*) = \Gamma$ die Schar der rektifizierbaren geschlossenen JORDANkurven in S, welche die Randkreise von S voneinander trennen. Daher ist nach 2.2 und 2.4

$$\varrho_0^\varphi(z) = \frac{|\varphi'(z)|}{2\pi\,|\varphi(z)|}$$

die zu Γ^* und S^* gehörige Extremalmetrik. Ist z_0 einer der beiden Endpunkte des Schlitzes von S^*, so liegt sein Bildpunkt $\varphi(z_0)$ auf dem innern Randkreis von S, also ist $|\varphi(z_0)| = 1$. Da durch die Abbildung φ der Schlitz von S^* in den Endpunkten auseinander gebogen wird, ist $|\varphi'(z)| \sim c\,|z - z_0|^{-\frac{1}{2}}$ mit $c \neq 0$ für $z \to z_0$ und $z \in S^*$. Daraus folgt $\varrho_0^\varphi(z) \to \infty$ für $z \to z_0$ und $z \in S^*$.

§ 3. Zusammenhang zwischen den Moduln und den harmonischen Maßen bei Gebieten mit stückweise analytischen Randkomponenten

3.1. Es sei G^* ein numeriertes Gebiet mit den stückweise analytischen Randzyklen C_i $(i = 1, 2, 3)$. Diese seien so orientiert, daß $C_1 + C_2 + C_3$ das Gebiet G^* positiv berandet. Es sei $\omega_i(z)$ das harmonische Maß von C_i bezüglich G^*, das ist diejenige in G^* harmonische Funktion, welche auf C_i die Randwerte 1 hat, und deren übrige Randwerte 0 sind. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{3} \omega_i(z) \equiv 1\,. \tag{1}$$

Es sei ferner

$$*d\omega_i = -\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\,dx + \frac{\partial \omega_i}{dx}\,dy\,.$$

das zu $d\omega_i$ konjugierte Differential. Die Matrix (a_{ik}) der Periodizitätsmoduln

$$a_{ik} = \int\limits_{C_i} *d\omega_k = \iint\limits_{G} \left\{\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\,\frac{\partial \omega_k}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y}\,\frac{\partial \omega_k}{\partial y}\right\} dx\,dy \tag{2}$$

ist symmetrisch und wegen (1) gilt

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{3}$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen setzen wir

$$p_i = a_{ii} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{4}$$

dann folgt aus (2)

$$p_i > 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{5}$$

Ferner setzen wir, unter (i, k, l) irgendeine Permutation der Ziffern $1, 2, 3$ verstanden,

$$x_i = a_{kl} = a_{lk}\,. \tag{6}$$

Dann folgt aus (3)

$$p_i = -(x_k + x_l) \quad \text{und} \quad x_i = \tfrac{1}{2}(p_i - p_k - p_l)\,. \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich zunächst

$$p_k p_l - x_i^2 = D(p_1, p_2, p_3)\,, \tag{8}$$

wobei

$$D = D(p_1, p_2, p_3) = \tfrac{1}{4}[(p_1 + p_2 + p_3)^2 - 2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)] \tag{9}$$

ist. Als zweireihige Unterdeterminante der Periodenmatrix (a_{ik}) ist aber bekanntlich $p_k p_l - x_i^2 \neq 0$, somit ist

$$D = D(p_1, p_2, p_3) \neq 0\,. \tag{10}$$

3.2. In

$$\Omega_{ikl} = c_{ikl}\,\omega_k + d_{ikl}\,\omega_l \tag{11}$$

bestimmen wir die Konstanten c_{ikl} und d_{ikl} derart, daß

$$\int\limits_{C_k} *d\Omega_{ikl} = 0 \quad \text{und} \quad \int\limits_{C_l} *d\Omega_{ikl} = 2\pi \tag{12}$$

wird. Das gibt wegen (2), (4), (6) das System der linearen Gleichungen

$$p_k c_{ikl} + x_i d_{ikl} = 0$$
$$x_i c_{ikl} + p_l d_{ikl} = 2\pi .$$

Hieraus findet man unter Berücksichtigung von (8), (10) und (7)

$$\begin{aligned} c_{ikl} &= \frac{-2\pi}{D(p_1, p_2, p_3)} x_i = \frac{\pi}{D(p_1, p_2, p_3)} (p_k + p_l - p_i) \\ d_{ikl} &= \frac{2\pi}{D(p_1, p_2, p_3)} p_k . \end{aligned} \tag{13}$$

Aus (11), (12) und (13) folgt[6]: Die Funktion

$$f_{ikl}(z) = \exp\,(\Omega_{ikl} + i\int^* d\Omega_{ikl})$$

bildet das Gebiet G^* eineindeutig und konform auf einen geschlitzten Kreisring ab, und zwar geht dabei über:

C_l in den äußern Randkreis des Ringes mit dem Radius $e^{d_{ikl}}$,
C_k in den Schlitz mit dem Radius $e^{c_{ikl}}$ und
C_i in den innern Randkreis mit dem Radius 1.

Folglich muß gelten $0 < c_{ikl} < d_{ikl}$. Hieraus folgt unter Benützung von (5), (10), (13):

3.3. (a) Es gilt $D(p_1, p_2, p_3) > 0$ und $p_i < p_k + p_l$ für jede Permutation (i, k, l) der Ziffern 1, 2, 3.

(b) Das numerierte Gebiet G^* läßt sich auf ein normiertes Ringschlitzgebiet

$$S_{ikl}[r_{ikl}, R_{ikl}, \alpha_{ikl}]$$

$$\text{mit } r_{ikl} = \exp\left(\frac{\pi}{D(p_1, p_2, p_3)} (p_k + p_l - p_i)\right)$$

$$R_{ikl} = \exp\left(\frac{2\pi}{D(p_1, p_2, p_3)} p_k\right)$$

so abbilden, daß C_i in den innern Randkreis, C_k in den Schlitz und C_l in den äußern Randkreis übergeht.

3.4. Aus 3.3 (b) folgt jetzt nach 2.2 und 2.4

$$\mu_k(G^*) = \frac{\log R_{ikl}}{2\pi} = \frac{p_k}{D(p_1, p_2, p_3)} \quad \text{für } k = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Daraus und aus 3.3 folgt endlich:

3.5. Es sei G^* ein numeriertes Gebiet mit stückweise analytischen Randkomponenten und es sei $\mu_k(G^*) = \mu_k$ gesetzt.

[6]) Vgl. etwa: AHLFORS [2].

(a) Es gilt $\mu_i < \mu_k + \mu_l$ für jede Permutation (i, k, l) der Ziffern $1, 2, 3$.

(b) G^* läßt sich auf ein normiertes Ringschlitzgebiet $S[e^{\pi(\mu_2+\mu_3-\mu_1)}, e^{2\pi\mu_2}, \alpha]$ so abbilden, daß die erste Randkomponente von G^* in den innern Randkreis von S, die zweite Randkomponente von G^* in den Schlitz von S und die dritte in den äußern Randkreis von S übergeht.

§ 4. Beweis von Satz 1 und 2

4.1. Erste Hälfte von Satz 1: Die numerierten Gebiete G und G^* seien konform äquivalent. Dann ist $\mu_i(G) = \mu_i(G^*)$ für $i = 1, 2, 3$.

4.2. Beweis: Es sei φ die Funktion, welche das numerierte Gebiet G^* konform auf das numerierte Gebiet G abbildet. Γ_i bzw. Γ_i^* sei die Schar der rektifizierbaren geschlossenen JORDANkurven in G bzw. G^*, welche die Randkomponenten mit den Nummern k und l voneinander trennen. Dann gilt offensichtlich $\Gamma_i = \varphi(\Gamma_i^*)$ und daher nach 2.2 $\mu[\Gamma_i, G] = \mu[\Gamma_i^*, G^*]$, also $\mu_i(G) = \mu_i(G^*)$ für $i = 1, 2, 3$.

4.3. Es sei G ein beliebiges numeriertes Gebiet und es sei $\mu_i(G) = \mu_i$ gesetzt.

(a) Dann ist $\mu_i < \mu_k + \mu_l$ für jede Permutation (i, k, l) der Ziffern $1, 2, 3$.

(b) G läßt sich auf ein normiertes Ringschlitzgebiet $S[e^{\pi(\mu_2+\mu_3-\mu_1)}, e^{2\pi\mu_2}, \alpha]$ konform so abbilden, daß die Randkomponenten $1, 2, 3$ von G der Reihe nach übergehen in den innern Randkreis, den Schlitz und den äußern Randkreis von S.

4.4. Beweis: Es gibt immer ein numeriertes Gebiet G^* mit analytischen Randkomponenten, das zum numerierten Gebiet G konform äquivalent ist. Daraus und aus 4.1 und 3.5 folgt aber die Behauptung. Mit 4.3 (a) ist Satz 2 bewiesen.

4.5. Zweite Hälfte von Satz 1: Es seien G und G^* numerierte Gebiete und es sei $\mu_i(G) = \mu_i(G^*) = \mu_i$ für $i = 1, 2, 3$. Dann sind die numerierten Gebiete G und G^* konform äquivalent.

4.6. Beweis: Nach 4.3 (b) gibt es konforme Abbildungen

$$\varphi: G \to S[r, R, \alpha] = S$$
$$\varphi^*: G^* \to S[r, R, \alpha^*] = S^*$$

mit $r = e^{\pi(\mu_2+\mu_3-\mu_1)}$ und $R = e^{2\pi\mu_2}$, welche die Randkomponenten $1, 2, 3$ von G bzw. G^* der Reihe nach überführen in den innern Randkreis, den

Schlitz und den äußern Randkreis von S bzw. S^*. Die Behauptung 4.5 wird also bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß $\alpha = \alpha^*$ gilt.

Es sei Γ bzw. Γ^* die Schar der in S bzw. S^* verlaufenden rektifizierbaren geschlossenen JORDANkurven, welche die Schlitze von den äußern Randkreisen trennen. Dann ist nach 2.2 $\mu_1(G) = \mu[\Gamma, S]$, $\mu_1(G^*) = \mu[\Gamma^*, S^*]$, also nach Voraussetzung

$$\mu[\Gamma, S] = \mu[\Gamma^*, S^*]\,. \tag{1}$$

Nehmen wir an, es wäre etwa $\alpha < \alpha^*$. Dann wäre

$$S^* \subset S \quad \text{und} \quad \Gamma^* \subset \Gamma\,. \tag{2}$$

Es sei $\varrho_0(z) \in M[\Gamma, S]$ die nach 2.7 eindeutig existierende Extremalmetrik, welche zu Γ und S gehört:

$$A[\varrho_0, S] = \mu[\Gamma, S]\,. \tag{3}$$

Es sei $\hat{\varrho}_0(z)$ die Restriktion von $\varrho_0(z)$ auf $S^* \subset S$. Wegen (2) gilt dann für jede Kurve $\gamma \in \Gamma^*$

$$\int_\gamma \hat{\varrho}_0(z)\,|\,dz\,| = \int_\gamma \varrho_0(z)\,|\,dz\,| \geqq 1\,, \qquad \text{also ist}$$

$$\hat{\varrho}_0(z) \in M[\Gamma^*, S^*]\,. \tag{4}$$

Ferner ist offensichtlich $A[\hat{\varrho}_0, S^*] = A[\varrho_0, S]$, also wegen (3) und (1) $A[\hat{\varrho}_0, S^*] = \mu[\Gamma^*, S^*]$. Daraus, aus (4) und 2.7 folgt aber, daß $\hat{\varrho}_0(z)$ die Extremalmetrik zu Γ^* und S^* ist. Daher ist nach 2.8 $\lim\limits_{\substack{z \in S^* \\ z \to re^{i\alpha^*}}} \hat{\varrho}_0(z) = +\infty$, oder was dasselbe ist, $\lim\limits_{\substack{z \in S^* \\ z \to re^{i\alpha^*}}} \varrho_0(z) = +\infty$. Das kann aber nicht sein, da $re^{i\alpha^*}$ ein innerer Punkt von S ist, in welchem die Extremalmetrik $\varrho_0(z)$ zu Γ und S nach 2.7 stetig ist.

§ 5. Beweis von Satz 3

5.1. Es seien drei *positive* Zahlen $\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*$ gegeben und für jede Permutation (i, k, l) der Ziffern 1, 2, 3 gelte

$$\mu_i^* < \mu_k^* + \mu_l^*\,. \tag{1}$$

5.2. Definieren wir

$$D(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*) = \tfrac{1}{4}[(\mu_1^* + \mu_2^* + \mu_3^*)^2 - 2(\mu_1^{*2} + \mu_2^{*2} + \mu_3^{*2})]\,, \tag{2}$$

so folgt aus (1)

$$D(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*) > 0\,. \tag{3}$$

Definieren wir weiter

$$p_i^* = \frac{\mu_i^*}{D(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*)} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

so ergibt sich

$$p_i^* > 0 \quad \text{und} \quad p_i^* < p_k^* + p_l^* \tag{5}$$

für jede Permutation (i, k, l) der Ziffern 1, 2, 3. Weil $D(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*)$ ein homogenes Polynom 2. Grades ist, erhält man

$$D^* = D(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \frac{1}{D(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*)} > 0 . \tag{6}$$

Daraus und aus (4) folgt

$$\mu_i^* = \frac{p_i^*}{D^*} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 . \tag{7}$$

Definieren wir ferner

$$x_i^* = \tfrac{1}{2}(p_i^* - p_k^* - p_l^*) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

so folgt

$$p_i^* = -(x_k^* + x_l^*) \tag{9}$$

für jede Permutation (i, k, l) der Ziffern 1, 2, 3,

$$D^* = x_1^* x_2^* + x_2^* x_3^* + x_3^* x_1^* \tag{10}$$

und aus (5)

$$x_i^* < 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 . \tag{11}$$

Schließlich setzen wir

$$\begin{aligned} r &= e^{\pi(\mu_2^* + \mu_3^* - \mu_1^*)} \\ R &= e^{2\pi\mu_2^*} . \end{aligned} \tag{12}$$

Aus (1) folgt

$$1 < r < R . \tag{13}$$

5.3. Wir betrachten nun das Ringschlitzgebiet $S_\alpha = S[r, R, \alpha]$ mit $0 < \alpha < 2\pi$ und bezeichnen den innern Randkreis von S_α mit C_1, den äußern mit C_3 und den Schlitz mit $C_2(\alpha)$. Diese Randkurven seien so orientiert, daß $C_1 + C_2(\alpha) + C_3$ das Gebiet S_α positiv berandet. Da S_α stückweise analytische Randzyklen besitzt, existieren in S_α die harmonischen Maße $\omega_i(z, \alpha)$ und die Periodizitätsmoduln $p_i(\alpha)$ und $x_i(\alpha)$ gemäß 3.1. Es sei $\mu_i(S_\alpha) = \mu_i(\alpha)$ gesetzt. Satz 3 ist bewiesen, wenn gezeigt ist, daß es einen Winkel α mit $0 < \alpha < 2\pi$ gibt, so daß gilt $\mu_i(\alpha) = \mu_i^*$ für $i = 1, 2, 3$.

Wir zeigen zunächst:

5.4. Ist $p_2(\alpha) = p_2^*$ für ein gewisses α mit $0 < \alpha < 2\pi$, so folgt $\mu_i(\alpha) = \mu_i^*$ für $i = 1, 2, 3$.

5.5. Beweis: Da $\log|z|$ in S_α harmonisch und auf den Rändern konstant ist, muß eine lineare Relation $\sum_{i=1}^{3} a_i \omega_i(z, \alpha) = \log|z|$ mit konstanten Koeffizienten a_i bestehen. Man findet unter Berücksichtigung von (12), (7) und (8)

$$\omega_3(z, \alpha) = \frac{D^*}{2\pi p_2^*} \log|z| + \frac{x_1^*}{p_2^*} \omega_2(z, \alpha) .$$

Daraus ergibt sich

$$x_2(\alpha) = \int_{C_1} {}^*d\omega_3(z, \alpha) = \frac{D^*}{2\pi p_2^*} \int_{C_1} {}^*d \log|z| + \frac{x_1^*}{p_2^*} \int_{C_1} {}^*d\omega_2(z, \alpha)$$

das heißt

$$x_2(\alpha) = -\frac{D^*}{p_2^*} + \frac{x_1^*}{p_2^*} x_3(\alpha) = \frac{-D^* + x_1^* x_3(\alpha)}{p_2^*} , \tag{14}$$

$$x_1(\alpha) = \int_{C_2(\alpha)} {}^*d\omega_3(z, \alpha) = \frac{D^*}{2\pi p_2^*} \int_{C_2(\alpha)} {}^*d \log|z| + \frac{x_1^*}{p_2^*} \int_{C_2(\alpha)} {}^*d\omega_2(z, \alpha)$$

das heißt

$$x_1(\alpha) = \frac{x_1^*}{p_2^*} p_2(\alpha) . \tag{15}$$

Ist nun $p_2(\alpha) = p_2^*$, so folgt aus (15) $x_1(\alpha) = x_1^*$. Durch Vergleich von (9) mit Formel (7) in 3.1 erhält man $x_3(\alpha) = x_3^*$. Daraus und aus (14) ergibt sich unter Benützung von (10) und (9)

$$x_2(\alpha) = \frac{-D^* + x_1^* x_3^*}{p_2^*} = \frac{x_2^*(-x_1^* - x_3^*)}{p_2^*} = x_2^* .$$

Also folgt wegen (9) auch $p_1(\alpha) = p_1^*$ und $p_3(\alpha) = p_3^*$. Somit bekommt man nach Formel (14) von 3.4 unter Berücksichtigung von (7) schließlich

$$\mu_i(\alpha) = \frac{p_i(\alpha)}{D(p_1(\alpha), p_2(\alpha), p_3(\alpha))} = \frac{p_i^*}{D(p_1^*, p_2^*, p_3^*)} = \mu_i^* \quad \text{für } i = 1, 2, 3 .$$

5.6. Nach (5) ist $0 < p_2^* < p_1^* + p_3^*$. Wegen 5.4 folgt offensichtlich Satz 3 nun aus dem folgenden

Hilfssatz: $p_2(\alpha) = \int_{C_2(\alpha)} {}^*d\omega_2(z, \alpha)$ ist für $0 < \alpha < 2\pi$ eine stetige Funktion von α und es gilt $\lim_{\alpha \downarrow 0} p_2(\alpha) = 0$ und $\liminf_{\alpha \uparrow 2\pi} p_2(\alpha) > p_1^* + p_3^*$.

§ 6. Beweis des Hilfssatzes 5.6

6.1. Wir setzen $S_0 = \lim_{\alpha \downarrow 0} S_\alpha = \{z \mid 1 < |z| < R,\ z \neq r\}$ und $\omega_2(z, \alpha) = \omega(z, \alpha)$. Dann gilt $\omega(z, \alpha) \Rightarrow 0$ für $\alpha \downarrow 0$ auf jeder kompakten Teilmenge von S_0.

6.2. Beweis: Sei $0 < \alpha' < \alpha < 2\pi$. Dann nimmt die in S_α harmonische Funktion $\omega(z, \alpha) - \omega(z, \alpha')$ überall auf dem Rande von S_α nichtnegative Werte an. Somit gilt

$$0 < \omega(z, \alpha') \leqq \omega(z, \alpha) < 1 \quad \text{für} \quad z \in S_\alpha,\ 0 < \alpha' < \alpha < 2\pi\,. \tag{1}$$

Daraus folgt aber nach dem Satze von Harnack: Es gibt eine in S_0 definierte Funktion $\omega_0(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\omega_0(z) \quad \text{harmonisch in } S_0\,, \tag{2}$$

$$0 \leqq \omega_0(z) \leqq 1 \quad \text{in } S_0\,, \tag{3}$$

$$\omega(z, \alpha) \Rightarrow \omega_0(z) \quad \text{für } \alpha \downarrow 0 \text{ auf jeder kompakten Teilmenge von } S_0\,. \tag{4}$$

Da $\omega(z, \alpha)$ auf den Kreisen $|z| = 1$ und $|z| = R$ die Randwerte 0 besitzt, folgt aus (1), daß auch $\omega_0(z)$ auf diesen Kreisen die Randwerte 0 annimmt. Wegen (2) und (3) kann aber $\omega_0(z)$ zu einer im ganzen Kreisring $1 < |z| < R$ harmonischen Funktion fortgesetzt werden. Folglich ist $\omega_0(z) \equiv 0$ in S_0. Wegen (4) ist damit die Behauptung bewiesen.

6.2. Es sei $0 < \alpha < 2\pi$. Dann gilt $\omega(z, \alpha - \delta) \Rightarrow \omega(z, \alpha)$ für $\delta \downarrow 0$ auf jeder kompakten Teilmenge von S_α.

6.3. Beweis: Es sei $\delta > 0$ und $\alpha - \delta > 0$. Die in S_α harmonischen Funktionen $u(z) = \omega(z, \alpha) - \omega(z, \alpha - \delta)$ und $v(z) = \omega(e^{-i(\alpha-\delta)}z, \delta) - \omega(z, \alpha) + \omega(z, \alpha - \delta)$ nehmen auf dem Rande von S_α überall nichtnegative Werte an. Somit ist $u(z),\ v(z) \geqq 0$ in S_α, das heißt

$$0 \leqq \omega(z, \alpha) - \omega(z, \alpha - \delta) \leqq \omega(e^{-i(\alpha-\delta)}z, \delta) \quad \text{für } z \in S_\alpha\,. \tag{5}$$

Sei nun K eine kompakte Teilmenge von S_α. Dann gibt es offenbar ein $\delta_0 > 0$ und ein Kompaktum $K_0 \subset S_0$ derart, daß

$$e^{-i(\alpha-\delta)}K \subset K_0 \subset S_0 \quad \text{für} \quad 0 < \delta < \delta_0\,.$$

Daher folgt aus (5) nach 6.1

$$\omega(z, \alpha - \delta) \Rightarrow \omega(z, \alpha) \quad \text{auf } K \text{ für } \delta \downarrow 0\,.$$

6.4. Es sei $0 < \alpha < 2\pi$. Dann gilt $\omega(z, \alpha + \delta) \Rightarrow \omega(z, \alpha)$ für $\delta \downarrow 0$ auf jeder kompakten Teilmenge von S_α.

6.5. Beweis: Der Beweis könnte analog wie in 6.3 geführt werden; es geht aber sogar noch einfacher: Es sei $\delta > 0$ und $\alpha + \delta < 2\pi$. Durch Anwendung des Maximumprinzips auf die in $S_{\alpha+\delta}$ harmonische Funktion $\omega(z, \alpha + \delta) - \omega(z, \alpha)$ ergibt sich

$$0 \leqq \omega(z, \alpha + \delta) - \omega(z, \alpha) \leqq \operatorname*{Max}_{\alpha \leqq \varphi \leqq \alpha+\delta} \{1 - \omega(re^{i\varphi}, \alpha)\} = M(\delta)$$

für $z \in S_{\alpha+\delta}$, weil aber $\omega(z, \alpha)$ im Punkte $re^{i\alpha}$ den Randwert 1 annimmt, ist $M(\delta) \to 0$ für $\delta \downarrow 0$, woraus die Behauptung offensichtlich folgt.

6.6. Wir setzen $S_{2\pi} = \lim\limits_{\alpha \uparrow 2\pi} S_\alpha = \{z \mid 1 < |z| < r\} \cup \{z \mid r < |z| < R\}$. ($S_{2\pi}$ zerfällt also in zwei Kreisringe.) Wir definieren

$$\omega(z) = \begin{cases} \dfrac{\log |z|}{\log r} & \text{für } 1 < |z| < r \\[2ex] \dfrac{\log |z| - \log R}{\log r - \log R} & \text{für } r < |z| < R\,. \end{cases} \tag{6}$$

(Die Funktion $\omega(z)$ ist also harmonisch in $S_{2\pi}$ und nimmt auf den Kreisen $|z| = 1$ und $|z| = R$ die Randwerte 0, auf $|z| = r$ die Randwerte 1 an.) Dann gilt $\omega(z, 2\pi - \delta) \Rightarrow \omega(z)$ für $\delta \downarrow 0$ auf jeder kompakten Teilmenge von $S_{2\pi}$.

6.7. Beweis: Sei $0 < \delta < 2\pi$. Die in $S_{2\pi}$ harmonischen Funktionen $u(z) = \omega(z) - \omega(z, 2\pi - \delta)$ und $v(z) = \omega(\bar{z}, \delta) - \omega(z) + \omega(z, 2\pi - \delta)$ nehmen überall auf dem Rande von $S_{2\pi}$ nichtnegative Werte an, somit gilt

$$0 \leqq \omega(z) - \omega(z, 2\pi - \delta) \leqq \omega(\bar{z}, \delta)\,. \tag{7}$$

Sei nun K eine kompakte Teilmenge von $S_{2\pi}$. Dann ist offenbar $\overline{K}$ eine kompakte Teilmenge von S_0. Daher folgt aus (7) nach 6.1

$$\omega(z, 2\pi - \delta) \Rightarrow \omega(z) \text{ auf } K \text{ für } \delta \downarrow 0\,.$$

6.8. (a) $\lim\limits_{\delta \to 0} p_2(\alpha + \delta) = p_2(\alpha)$ für $0 < \alpha < 2\pi$

(b) $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} p_2(\alpha) = 0$.

6.9. Beweis: Es sei C_α ein ganz in S_α liegender Zyklus derart, daß C_α homolog $-C_1 - C_3 \bmod S_\alpha$ ist. Dann gilt für ein gewisses $\delta_0 > 0$: C_α homolog $-C_1 - C_3 \bmod S_{\alpha+\delta}$ für alle $|\delta| < \delta_0$ und daher

$$p_2(\alpha + \delta) = \int_{C_\alpha} {}^*d\omega(z, \alpha + \delta) \quad \text{für} \quad |\delta| < \delta_0\,.$$

Da nun C_α eine kompakte Teilmenge von S_α ist, folgt aus 6.2 und 6.4

$*d\omega(z, \alpha + \delta) \Rightarrow *d\omega(z, \alpha)$ auf C_α für $\delta \to 0$ und somit

$$p_2(\alpha + \delta) \to \int_{C_\alpha} *d\omega(z, \alpha) = p_2(\alpha) .$$

In derselben Weise beweist man (b) unter Benützung von 6.1.

6.10. $\liminf_{\delta \downarrow 0} p_2(2\pi - \delta) > p_1^* + p_3^*$.

6.11. Beweis: Sei K eine kompakte Teilmenge von $S_{2\pi}$. Dann gilt für ein gewisses $\delta_0 > 0$: $K \subset S_{2\pi-\delta}$ für $0 \leqq \delta < \delta_0$ und daher

$$p_2(2\pi - \delta) = \int\int_{S_{2\pi-\delta}} |\operatorname{grad} \omega(z, 2\pi - \delta)|^2 dx dy \geqq \iint_K |\operatorname{grad} \omega(z, 2\pi - \delta)|^2 dx dy$$

für $0 \leqq \delta < \delta_0$, somit

$$\liminf_{\delta \downarrow 0} p_2(2\pi - \delta) \geqq \liminf_{\delta \downarrow 0} \iint_K |\operatorname{grad} \omega(z, 2\pi - \delta)|^2 dx dy . \tag{8}$$

Nach 6.6 gilt aber $\operatorname{grad} \omega(z, 2\pi - \delta) \Rightarrow \operatorname{grad} \omega(z)$ auf K für $\delta \downarrow 0$, daher folgt aus (8)

$$\liminf_{\delta \downarrow 0} p_2(2\pi - \delta) \geqq \iint_K |\operatorname{grad} \omega(z)|^2 dx dy .$$

Da dies für jede kompakte Teilmenge $K \subset S_{2\pi}$ gilt, folgt

$$\liminf_{\delta \downarrow 0} p_2(2\pi - \delta) \geqq \int\int_{S_{2\pi}} |\operatorname{grad} \omega(z)|^2 dx dy = J .$$

Aus Definition (6) von $\omega(z)$ berechnet man leicht

$$J = \frac{2\pi}{\log r} + \frac{2\pi}{\log R - \log r} .$$

Aus den Formeln (12), (7) und (8) in 5.2 ergibt sich

$$\log r = -\frac{2\pi}{D^*} x_1^* \quad \text{und} \quad \log R - \log r = -\frac{2\pi}{D^*} x_3^* .$$

Unter Benützung von Formel (10) in 5.2 erhält man

$$J = \frac{p_2^* D^*}{x_1^* x_3^*} = p_1^* + p_3^* - \frac{x_1^* x_2^*}{x_3^*} - \frac{x_2^* x_3^*}{x_1^*}$$

und mit (11) aus 5.2 folgt

$$J > p_1^* + p_3^* .$$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. AHLFORS und A. BEURLING, *Invariants conformes et problèmes extrémaux.* 10. Skand. Mathem. Kongr., Kopenhagen 1946.

[2] L. AHLFORS, *Complex analysis.* McGraw-Hill, New York 1953.

[3] J. A. JENKINS, *Some problems in conformal mapping.* Trans. Amer. Math. Soc. 67, 327–350 (1949).

[4] J. A. JENKINS, *Remarks on "Some problems in conformal mapping".* Proc. Amer. Math. Soc. 3, 147–151 (1952).

[5] J. A. JENKINS, *Another remark on "Some problems in conformal mapping".* Proc. Amer. Math. Soc. 4, 978–981 (1953).

[6] J. A. JENKINS, *Univalent functions and conformal mapping.* Ergebn. d. Mathem., neue Folge, Heft 18, Springer 1958.

(Eingegangen den 23. Juli 1959)