Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 34 (1960)

Artikel: Sur les structures fibrées osculatrices d'une surface de RIEMANN.

Autor: Teleman, Costake

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26630

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur les structures fibrées osculatrices d'une surface de RIEMANN

par COSTAKE TELEMAN, Bucarest

En utilisant la théorie des classes des représentations de M. ANDRÉ WEIL [11] et la théorie des connexions infinitésimales (intégrables) de M. EHRESMANN, [2], nous donnons une interprétation géometrique des systèmes homographiques sur une surface de RIEMANN R, que nous avons définis dans [9]. Cette interprétation utilise des structures fibrées généralisant la structure fibrée tangente de R, ayant pour fibres des espaces projectifs.

1. Soit R une surface de RIEMANN fermée, de genre $g > 0$, que nous identifierons à l'ensemble des classes de transitivité z^{Γ} d'un groupe homographique Γ du cercle $|z| < 1$ si $g > 1$ ou du plan fini (z) si $g = 1$. On sait que le groupe Γ est engendré par $2g$ générateurs $S_1, S_1', S_2, S_2', \ldots, S_g, S_g'$ liés par une seule relation

$$S_1 S_1' S_1^{-1} S_1'^{-1} S_2 S_2' S_2^{-1} S_2'^{-1} \ldots S_g S_g' S_g^{-1} S_g'^{-1} = 1 .$$

Le cercle $|z| < 1$ ou le plan (z) joue le rôle de surface universelle de recouvrement de R et nous le désignerons par $\tilde{R}$ ou encore par $(\tilde{R}, R, \Gamma)$, pour mettre en évidence la structure fibrée définie dans $\tilde{R}$ par les classes de transitivité du groupe Γ.

Si $r : \Gamma \to G_{q+1} = GL(q+1, C)$ est une représentation linéaire d'ordre $q+1$ du groupe Γ, nous désignerons par $[r]$ la *représentation projective* de Γ qu'on obtient en composant r avec l'homomorphisme canonique χ_q de G_{q+1} sur le groupe quotient de G_{q+1} et de son centre Z_{q+1}. Le groupe G_{q+1} opère dans l'espace vectoriel complexe V^{q+1} à $q+1$ dimensions, tandis que $H_q = G_{q+1}/Z_{q+1}$ peut être identifié au groupe des homographies de l'espace projectif complexe P^q. Les représentations $r, [r]$ associent à la structure fibrée $(\tilde{R}, R, \Gamma)$ une structure fibrée $(E_r, R, V^{q+1}, G_{q+1})$ de fibre V^{q+1} et une structure fibrée $(E_{[r]}, R, P^q, H_q)$ de fibre P^q. Ces structures fibrées sont algébriques, d'après les résultats de SERRE [8] et ATIYAH [1].

Nous dirons avec M. ANDRÉ WEIL, que *deux représentations r, r' sont équivalentes s'il existe une matrice M, à éléments holomorphes dans $\tilde{R}$, ayant le déterminant $|M| \neq 0$ dans $\tilde{R}$ et subissant les transformations*

$$M^S = r(S)\, M r'(S^{-1}) , \quad S \in \Gamma . \tag{1}$$

En général, si F est une fonction définie dans $\tilde{R}$, nous désignerons par F^S la fonction qu'on obtient en composant F avec la fonction

$$z^S = \frac{\alpha_S z + \beta_S}{\gamma_S z + \delta_S}$$

définissant l'élément S du groupe Γ, donc $F^S(z) = F(z^S)$.

De même, nous dirons que *deux représentations projectives du groupe* Γ; $\varrho, \varrho' : \Gamma \to H_q$, *sont équivalentes, si on peut trouver une matrice* M, *holomorphe dans* $\tilde{R}$ *et ayant* $|M| \neq 0$ *et subissant des transformations de la forme*

$$\mu_S M^S = M_S M M_S'^{-1}, \tag{2}$$

où μ_S sont des fonctions méromorphes dans $\tilde{R}$ et M_S, M_S' sont des éléments de G_{q+1}, appartenant aux classes $\chi_q^{-1} \circ \varrho(S)$, $\chi_q^{-1} \circ \varrho'(S)$.

On peut démontrer les propositions suivantes:

Proposition 1. *Les structures fibrées algébriques associées à deux représentations linéaires (projectives) sont équivalentes si et seulement si ces représentations sont équivalentes.*

Proposition 2. *Si deux représentations linéaires* r, r' *sont équivalentes, les représentations projectives* $[r], [r']$ *sont aussi équivalentes.*

Proposition 3. *Si la représentation projective* p' *est équivalente à une représentation de la forme* $[r]$, r *étant une représentation linéaire de* Γ, *alors on peut trouver une représentation linéaire* r', *équivalente à* r, *telle que* $p' = [r']$.

2. Soit $u = (u_0, u_1 \ldots, u_q)$ un système homographique d'ordre q de la surface R [9, page 206]. Ce système définit une représentation projective π_u: $\Gamma \to H_q$. Nous allons démontrer le

Théorème 1. *Les représentations projectives définies par deux systèmes homographiques d'ordre q sont équivalentes.*

Considérons les transformations subies par les fonctions u_i, qui sont de la forme

$$\varrho_S u_i^S = \sum_{j=0}^{q} \underset{S}{c_i^j} u_j, \quad (i = 0, 1, \ldots, q) \tag{3}$$

et que nous écrirons sous forme vectorielle

$$\varrho_S u^S = M_S u, \quad M_S = \underset{S}{(c_i^j)}. \tag{4}$$

D'après la théorie de LAGUERRE et FORSYGHT [9, page 209] on peut trouver deux fonctions analytiques $h(z)$, $\lambda(z)$, telles que l'équation différentielle linéaire d'ordre $q+1$, ayant $\lambda u_0, \lambda u_1, \ldots, \lambda u_q$ pour intégrales et h pour

paramètre indépendant, ait les coefficients de $d^q(\lambda u)/dh^q$, $d^{q-1}(\lambda u)/dh^{q-1}$ nuls. La fonction h n'a pas d'autres singularités dans $\tilde{R}$ que des pôles simples et subit des transformations homographiques

$$h^S = \frac{a_S h + b_S}{c_S h + d_S} .$$

De plus, dh/dz ne s'annule en aucun point de $\tilde{R}$.

Les fonctions λu_i forment un système homographique définissant la même représentation projective du groupe Γ que le système u. Nous supposons qu'on a remplacé de l'avance le système u par λu. Dans ce cas, on peut prendre dans (4),

$$\varrho_S = \left(\frac{dh^S}{dh}\right)^{-\frac{q}{2}}, \tag{5}$$

donc ϱ_S est défini au signe près. De la formule (5) on déduit qu'on a $\varrho_{S'}(\varrho_S)^{S'} = \pm\, \varrho_{SS'}$, $(S, S' \in \Gamma)$ et on peut choisir les signes des ϱ_S tel que le signe $-$ soit exclu. En appliquant alors l'opérateur S' aux deux membres de l'égalité (4), on obtient, en tenant compte que le wronskien W des fonctions u_i n'est pas nul, [9, page 206],

$$M_{SS'} = M_S M_{S'} ,$$

donc on a la représentation linéaire de Γ,

$$r : S \to M_S \tag{5'}$$

et $\pi_u = [r]$.

Soit ω une différentielle abélienne de première espèce de la surface R, n'ayant que des zéros simples. On a donc $\omega^S = \omega$, $(S \in \Gamma)$.

Les formules (4), (5) montrent que le vecteur

$$v = \left(\frac{\omega}{dh}\right)^{\frac{q}{2}} u , \quad (i = 0, 1, \ldots, q) \tag{6}$$

qui est définit dans $\tilde{R}$, au signe près, subit les transformations

$$v^S = \pm M_S v . \tag{7}$$

Si l'on considère la matrice carrée

$$\Phi = \left(\frac{d^j v_i}{\omega^j}\right), \quad \left(\frac{d}{\omega} = \frac{dz}{\omega}\frac{d}{dz}\right) \tag{8}$$

on a

$$\Phi^S = \pm M_S \Phi . \tag{9}$$

Notons qu'on a

$$|\Phi| = \pm 1 . \tag{10}$$

Considérons un second système homographique u', du même ordre q, et associons-lui une représentation $r' : S \to M'_S$ et une matrice Φ', par des formules analogues à (4) et (8).

Les matrices Φ, Φ' ont en chaque point deux déterminations, qui se permutent quand on entoure un zéro de ω, si q est un nombre impair. Par contre, la matrice

$$M = \Phi\Phi'^{-1} \tag{11}$$

est uniforme dans $\tilde{R}$ et a le module du déterminant égal à 1. Montrons que les éléments de la matrice M sont holomorphes dans $\tilde{R}$. En effet, Φ et Φ' sont régulières en chaque point de $\tilde{R}$ où $\omega \neq 0$. Dans le voisinage d'un zéro de ω, on peut trouver un uniformisateur ζ tel qu'on ait $\omega = \zeta d\zeta$ et en considérant le vecteur

$$t = \left(\frac{d\zeta}{dh}\right)^{\frac{q}{2}} u$$

on montre par recurrence qu'on a les formules

$$\frac{d^j v}{\omega^j} = \sum_{s=0}^{j} c_s^j \, \zeta^{\frac{q}{2} - 2j + s} \frac{d^s t}{d\zeta^s} , \tag{12}$$

où les c_s^j sont des constantes définies par

$$c_s^{j+1} = c_{s-1}^j + \left(\frac{q}{2} - 2j + s\right) c_s^j ; \quad c_s^j = 0 \; (j < s) .$$

Si l'on introduit la matrice

$$Z = (\zeta_s^j) , \quad \zeta_s^j = c_s^j \, \zeta^{\frac{q}{2} - 2j + s} ,$$

on peut écrire les formules (12) sous la forme

$$\Phi = TZ , \quad T = \left(\frac{d^s t_i}{d\zeta^s}\right)$$

et on a une formule analogue pour Φ', $\Phi' = T'Z$. On a donc dans le voisinage du point $\zeta = 0$, $M = TT'^{-1}$; or les éléments des matrices T, T' sont holomorphes dans le voisinage considéré et on a de plus $|T'| \neq 0$, ce qui prouve que M est une matrice régulière dans $\tilde{R}$.

La formule (11) et la formule (9), ainsi que la formule analogue à (9), con-

cernant la matrice Φ', montrent qu'on a des formules de la forme

$$\varepsilon_S M^S = M_S\, M\, M_S'^{-1}\,, \qquad (\varepsilon_S = \pm 1)$$

qui démontrent le théorème 1.

4. Si l'on remplace les fonctions u_i d'un système homographique d'ordre q, par $q+1$ combinaisons linéaires des u_i, linéairement indépendantes, on obtient un nouveau système et les systèmes qu'on obtient de cette manière forment une *structure homographique* de la surface R [9]. Nous avons montré que les structures homographiques d'ordre q de la surface R forment une multiplicité linéaire de dimension complexe $(q^2+2q)(g-1)$, si $g>1$. Il en résulte que les systèmes homographiques d'ordre q de R forment une multiplicité à $(q^2+2q)(g-1)+(q+1)^2$ dimensions complexes, donc les représentations projectives π_u, définies par ces systèmes forment une multiplicité à $(q^2+2q)g$ dimensions.

Théorème 2. *Toute représentation projective Γ, équivalente à une représentation π_u, est de la forme $\pi_{u'}$, u' étant un système homographique de R du même ordre que u, si le genre g de R est >1.*

Démonstration. D'après la Proposition 3, toute représentation projective $p:\Gamma\to H_q$, équivalente aux représentations π_u, est de la forme $p=[r']$, r' étant une représentation linéaire d'ordre $q+1$, équivalente à la représentation (5').

Soit $r':S\to M_S'=r'(S)$ une représentation équivalente à (5') et M une matrice vérifiant les formules (1), régulière dans $\tilde{R}$ et ayant $|M|\neq 0$. La matrice différentielle régulière [11]

$$\Omega = dM\cdot M^{-1} \tag{13}$$

subira les transformations

$$\Omega^S = M_S\,\Omega\, M_S^{-1} \tag{14}$$

et la matrice différentielle

$$\theta = \Phi^{-1}\Omega\Phi \tag{15}$$

est uniforme dans $\tilde{R}$ et est invariante pour le groupe Γ, donc les éléments de θ sont des fonctions rationnelles sur R. Ces fonctions sont régulières en chaque point de $\tilde{R}$ où $\omega\neq 0$ et satisfont à la condition que $Z\theta Z^{-1}$ soit une matrice régulière dans le voisinage d'un zéro $\zeta=0$ de ω. Cette dernière condition s'exprime par les formules

$$\theta_s^k + \sum_{\substack{s\leqslant j,\, r\leqslant k\\ r-j<k-s}}^{r,j} \zeta^{2(r-j+s-k)} c_s^j\, \tilde{c}_r^k\, \theta_j^r = \zeta^{s-k}\alpha_s^k\,, \tag{16}$$

où $\tilde{c}$ est la matrice inverse de (c_s^j) et α_s sont des formes différentielles régulières en $\zeta = 0$.

De ces conditions on déduit, en utilisant l'induction, qu'on a, si $g > 1$,

$$\theta_s^k = 0, (k < s - 1)\,; \quad \theta_s^{s-1} = c_s \omega, (c_s = \text{const.})\,.$$

En écrivant alors la formule (16) pour $k = s$, on voit que θ_s^s a des pôles simples aux zéros de ω, avec les résidus égaux à $\sum\limits_{j=s,s+1} c_s^j \tilde{c}_{j-1}^s c_j$; comme la somme de ces résidus doit être nulle, on doit avoir $\sum\limits_{j=s,s+1} c_s^j \tilde{c}_{j-1}^s c_j = 0$. Pour $s = q$ on obtient $c_q = 0$ et en posant ensuite $s = q - 1, \ldots 1$ on trouve qu'on a $c_{q-1} = \ldots = c_1 = 0$, donc $\theta_s^{s-1} = 0$, $(s = 1, \ldots, q)$. Les formules (16) montrent alors que pour $k \geqslant s$, θ_s^k a des pôles, d'ordre $2(k - s)$ au plus, aux zéros de ω.

La matrice M est définie à une transformation de la forme [11]

$$M' = \Lambda M \tag{16'}$$

près, Λ étant une matrice régulière dans $\tilde{R}$, satisfaisant aux conditions

$$|\Lambda| \neq 0\,, \qquad \Lambda^S = M_S \Lambda M_S^{-1}\,, \tag{17}$$

d'où il en résulte que les éléments de la matrice

$$U = \Phi^{-1} \Lambda \Phi \tag{18}$$

sont des fonctions rationnelles sur R, devenant infinies seulement aux zéros de ω. La condition que ZUZ^{-1} soit régulière dans le voisinage d'un zéro de ω donne

$$u_s^k + \sum_{\substack{s \leqslant j,\, r \leqslant k \\ r - j < k - s}}^{r,j} \zeta^{2(r-j+s-k)} c_s^j \tilde{c}_r^k u_j^r = \zeta^{s-k} \beta_s^k\,, \tag{19}$$

β_s^k étant une fonction holomorphe dans le voisinage du point $\zeta = 0$. Un raisonnement analogue à celui indiqué plus haut montre qu'on a $u_s^k = 0$ pour $k < s$, $u_0^0 = u_1^1 = \ldots = u_q^q = c$, $(c = \text{const.})$ et que pour $k > s$, $(u_s^k)^{-1}$ s'annule aux zéros de ω, avec l'ordre $2(k - s) - 1$ au plus, si $g > 1$. De plus, il faut remarquer que les formules (19) permettent de calculer, en chaque zéro de ω, pour u_s^k, les coefficients de $\zeta^{1-2(k-s)}$, $\zeta^{2-2(k-s)}, \ldots, \zeta^{1-(k-s)}$, en fonctions des coefficients analogues des u_j^r $(s \leqslant j \leqslant r \leqslant k,\ r - j < k - s)$. Les équations qui expriment que la fonction u_s^k, donnée par la formule (19), est rationnelle, donc que la somme des résidus $\oint u_s^k \omega_\alpha$ est nulle, quelque soit la différentielle de première espèce ω_α, n'imposent aucune relation entre les coefficients des fonctions u_s^k, elles permettent seulement de calculer certains des coefficients de ζ^{-1}, ζ^{-2} des fonctions $\zeta^{s-k}\beta_s^k$. Il en résulte la

Proposition 4. *Si on a des fonctions rationnelles* u_s^k *pour tous les indices* k, s *vérifiant* $k - s < \alpha$, *ou* $k - s = \alpha$, $s < \beta$, *vérifiant les conditions* (19) *pour ces indices, on peut completer ces fonctions à une matrice* U *vérifiant toutes les conditions* (19).

Si l'on désigne par $\Omega' = \Phi\theta'\Phi^{-1}$ la matrice différentielle $dM' \cdot M'^{-1}$ associée à la matrice (16'), on a

$$\theta' U = (HU - UH)\omega + dU + U\theta\,, \tag{20}$$

où $H\omega$ est la matrice $\Phi^{-1}d\Phi$ et a la forme

$$H\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{q-1} & 0 \end{pmatrix} \omega\,.$$

L'équation (20) donne les relations

$$u_j^{s+1}\omega = -\sum_{i=j,j+1,\dots,s} \theta_j'^i u_i^s + du_j^s + \sum_{i=j,j+1,\dots,s} \theta_i^s u_j^i + u_{j-1}^s\omega\,,\ (s < q)\,. \tag{21}$$

Supposons qu'on a $\theta_i^s = 0$ pour $s - i < \alpha (\alpha < q)$, $s < q$. Pour qu'on ait aussi $\theta_i'^s = 0\,(s - i < \alpha, s < q)$, il faut qu'on ait $u_j^s = 0$ pour $0 < s - j \leqslant \alpha$. Dans ce cas, la formule (21) pour $j = 0$, $s = \alpha$ donne

$$u_0^{\alpha+1}\omega = -\theta_0'^\alpha u_\alpha^\alpha + \theta_0^\alpha u_0^0\,;$$

donc si l'on prend $u_0^0 = u_1^1 = \dots = u_q^q = 1$ et

$$u_0^{\alpha+1} = \frac{\theta_0^\alpha}{\omega} \tag{22}$$

on aura $\theta_0'^\alpha = 0$. D'après la Proposition 4, on peut compléter les fonctions $u_j^s = 0$ $(0 < s - j \leqslant \alpha, s < q)$ et (22) à une matrice U et on obtient de (21) une matrice θ' ayant $\theta_i'^s = 0$ pour $s - i < \alpha, s < q$ et $s = \alpha$, $i = 0$.

Supposons que pour la matrice θ on a $\theta_i^s = 0$ pour $s - i < \alpha$, $s < q$ et pour $s - i = \alpha$, $i = 0, 1, \dots, \beta - 1$. On aura les mêmes conditions pour la matrice θ' si $u_j^s = 0$ pour $0 < s - j \leqslant \alpha$ et pour $s - j = \alpha + 1$, $j = 0, 1, \dots, \beta - 1$. L'équation (21) donne alors pour $j = \beta$, $s = \alpha + \beta$, $u_0^0 = \dots = u_q^q = 1$,

$$u_\beta^{\alpha+\beta+1}\omega = -\theta_\beta'^{\alpha+\beta} + \theta_\beta^{\alpha+\beta}$$

et on a $\theta_\beta'^{\alpha+\beta} = 0$ si $u_\beta^{\alpha+\beta+1}$ est choisi égal à $\theta_\beta^{\alpha+\beta}/\omega$. Il en résulte qu'on peut toujours supposer que la matrice θ vérifie les conditions

$$\theta_j^i = 0\,,\quad (i = 0, 1, \dots, q-1;\ \ j = 0, 1, \dots, q)\,. \tag{23}$$

Supposons que la matrice (15) satisfait aux relations (23). L'équation (13) définit alors la matrice M [11]. Considérons la matrice $\Psi = M^{-1}\Phi$ qui subit les substitutions

$$\Psi^S = \pm M'_S \Psi . \tag{24}$$

On obtient d'autre part, par un calcul simple

$$d\Psi = \Psi(H\omega - \theta) ,$$

donc

$$d\Psi^i_j = \Psi^{i+1}_j \omega , (i < q); \; d\Psi^q_j = \sum_{i=0}^{q} (\alpha_i - \theta^q_i) \Psi^i_j .$$

De ces formules on déduit qu'on a $d \mid \Psi \mid = - \theta^q_q \mid \Psi \mid$, donc $\mid \Psi \mid = e^{-\int \theta^q_q}$. Il en résulte que les fonctions $\Psi^0_0, \Psi^0_1, \ldots, \Psi^0_q$ forment un système homographique u' de la surface R et la formule (24) montre que la représentation projective $\pi_{u'}$ coïncide avec la représentation $[r']$. Le théorème 2 est ainsi démontré; pour $g = 1$, la propriété n'est plus vérifiée. Dans le cas $g = 1$, la représentation triviale de Γ dans H_q est équivalente aux représentations π_u et ne correspond à aucun système homographique u de la surface R.

5. Les fonctions $1, z, \ldots, z^q$ forment un système homographique d'ordre q de R. La représentation projective π_0 définie par ce système est la restriction à Γ de la représentation irréductible du groupe homographique H_1 dans H_q.

6. Les résultats obtenus précédemment montrent que les structures fibrées (E_{π_u}, R, P^q, H_q) associées aux représentations projectives π_u du groupe Γ, définies par les systèmes homographiques u de la surface R, sont isomorphes à une même structure (analytique), que nous désignérons par (E_q, R, P^q, H_q).

Les représentations π_u définissent des connexions intégrables dans la structure (E_q, R, P^q, H_q), [2, page 37]. Réciproquement, comme toute connexion intégrable de cette structure est définie par une représentation du groupe Γ dans H_q, équivalente aux représentations π_u, il en résulte, d'après le théorème 2, que toute connexion intégrable de la structure (E_q, R, P^q, H_q) est définie par un système homographique u de R si le genre de R est > 1.

La structure fibrée (E_{π_u}, R, P^q, H_q) étant définie comme l'ensemble des classes de transitivité du groupe G des transformations $(z, y) \to (z^S, M_S y)$ de $\tilde{R} \times P^q$ en lui-même, avec la projection $p_u : (z, y)^G \to z^\Gamma$, on voit que cette structure admet la section $z^\Gamma \to (z, y)^G$, $(z, y)^G = \bigcup_{S \in \Gamma} \{(z^S, M_S y)\}$.

La connexion donnée par la représentation π_u est définie dans (E_{π_u}, R, P^q, H_q) par l'équation $dy = 0$ et le système u définit le développement de la surface R dans la fibre P^q, par les formules

$$y_i = u_i(z) , \qquad (i = 0, 1, \ldots, q) ,$$

y_i étant des coordonnées homogènes dans P^q.

Par analogie avec la structure fibrée tangente à une variété, nous dirons que (E_q, R, P^q, H_q) est la structure fibrée, projective, osculatrice d'ordre q, de la surface R. On peut alors résumer les résultats obtenus dans cette Note:

Les connexions intégrables de la structure fibrée projective, osculatrice d'ordre q, de la surface fermée R, de genre $g > 1$, sont associées aux représentations projectives définies par les systèmes homographiques u, d'ordre q, de R. Les systèmes u définissent les développements de R dans la fibre P^q, suivant ces connexions.

On a ainsi l'interprétation géométrique des systèmes u.

7. Dans la structure fibrée (E_{π_u}, R, P^q, H_q), associons à chaque point $\xi = z^\Gamma$ de R l'espace projectif $P_\xi^{q'}$ engendré dans la fibre $p_u^{-1}(\xi)$ par les points $y^0 = u$, $y^1 = du/dz, \ldots, y^{q'} = d^{q'}u/dz^{q'}$, $(q' < q)$. La somme topologique des espaces $P_\xi^{q'}$ forme, avec la projection $p' : P_\xi^{q'} \to \xi$ une structure fibrée isomorphe à $(E_{q'}, R, P^{q'}, H_{q'})$. On a donc, pour chaque $q' < q$, un isomorphisme analytique $i_{q'q}$ de $(E_{q'}, R, P^{q'}, H_{q'})$ avec un sous-espace de (E_q, R, P^q, H_q), permutable avec les projections canoniques $E_{q'} \to R$, $E_q \to R$.

8. Notons ce théorème:

L'espace fibré sur R formé par les hyperquadriques non dégénérées des fibres de (E_q, R, P^q, H_q) admet une infinité de sections. Les éléments de ces sections sont des quadriques contenant les images par $i_{q'q}$ des fibres de $(E_{q'}, R, P^{q'}, H_{q'})$ pour $2q' \leqslant q$ ou les transformées par polarité de ces images.

9. *On peut montrer qu'aucune des représentations π_u ne peut être unitaire, donc en particulier, π_u n'est jamais finie.* En effet, si la représentation (5′) serait unitaire, la surface posséderait la métrique riemannienne partout régulière

$$ds = (|u_0|^2 + |u_1|^2 + \ldots + |u_q|^2)^{-\frac{1}{q}} |dh|,$$

ayant la courbure de GAUSS

$$K = (|u_0|^2 + \ldots + |u_q|^2)^{\frac{2}{q}-2}\left[(\Sigma u_i \bar{u}_i)\left(\Sigma \frac{du_i}{dh}\frac{d\bar{u}_i}{d\bar{h}}\right) - \left|\Sigma u_i \frac{d\bar{u}_i}{d\bar{h}}\right|^2\right] > 0$$

ce qui est impossible, d'après la formule de GAUSS-BONNET.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH M. F., *Vector bundles over an elliptic curve.* Proc. London Math. Soc. III, 7 (1957), 414–452.

[2] EHRESMANN CH., *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable.* Colloque de Topologie (Espaces fibrés), Bruxelles 1950.

[3] EICHLER M., *Verallgemeinerung der* ABEL*schen Integrale.* Math. Z., 67 (1957), 267–298.

[4] GROTHENDIECK A., *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de* RIEMANN. Amer. J. of Math., (1957), 121–138.

[5] GOURSAT E., APPELL P., *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.* Tome I (1929), Tomme II, Paris.

[6] POINCARÉ H., Oeuvres, T. II. (1916), 402–462.

[7] SERRE J. P., *Faisceaux algébriques cohérents.* Ann. of Math. 61 (1955), 197–278.

[8] SERRE J. P., *Géométrie algébrique et Géométrie analytique.* Ann. Inst. Fourier, vol. VI (1956), 1–42.

[9] TELEMAN C., *Sur les structures homographiques d'une surface de* RIEMANN. Comment. Math. Helv. *33* (1959), 206–211.

[10] WASHNITZER G., *The characteristic classes of an algebraic fibre bundle.* Proc. Nat. Ac. of Sci. *42* (1956), 433–435.

[11] WEIL A., *Généralisation des fonctions abéliennes.* J. Math. pures et appliquées, 17 (1938), 47–87.

[12] WEIL A., *Fibre Spaces in Algebraic Geometry.* (Notes by Wallace), University of Chicago, 1952.

(Reçu le 8 octobre 1959)