Zur Störungstheorie linearer Operatoren: Relative Beschränktheit und relative Kompaktheit von Operatoren in Banachräumen.

Autor(en): **Hess, Peter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **44 (1969)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-33769

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zur Störungstheorie linearer Operatoren: Relative Beschränktheit und relative Kompaktheit von Operatoren in Banachräumen

von PETER HESS (Zürich)

1. S. GOLDBERG zeigt in seinem Buch [2], dass jeder lineare Operator A, der bezüglich eines linearen Operators T kompakt ist, T-beschränkt ist mit T-Schranke null (p. 123, Korollar V.3.8.i). Dabei wird vorausgesetzt, dass der Operator A abgeschlossen – oder jedenfalls abschliessbar – ist, was im Rahmen der Störungstheorie linearer Operatoren eher fremd wirkt. Wird doch meist von einem leicht diskutierbaren Operator T ausgegangen und – für bezüglich T genügend kleine Störoperatoren A – die Abgeschlossenheit von $T+A$ aus derjenigen von T gefolgert, selbst wenn A nicht abschliessbar ist.

In der vorliegenden Arbeit leiten wir das erwähnte Resultat unter Bedingungen her, die der Fragestellung der Störungstheorie besser entsprechen: anstelle der Abschliessbarkeit von A fordern wir diejenige von T.

Zunächst zeigen wir also, dass die T-Beschränktheit mit T-Schranke null eine notwendige Bedingung für die T-Kompaktheit eines Operators ist (Satz 1). Anschliessend untersuchen wir, wann diese Bedingung auch hinreichend ist: Falls die Resolventenmenge $\varrho(T)$ nicht leer ist, folgt aus der T-Beschränktheit mit T-Schranke null die T-Kompaktheit genau dann, wenn T eine kompakte Resolvente besitzt (Satz 3). Dieses Resultat ergibt sich durch Spezialisierung aus einer allgemeineren Aussage (Satz 2).

2. Es seien $(X_1, \| \ \|_1)$ und $(X_2, \| \ \|_2)$ zwei Banachräume, d.h. lineare Räume X_1 und X_2 mit den Normen $\| \ \|_1$ bzw. $\| \ \|_2$. Ferner bezeichnen T und A lineare Operatoren mit den Definitionsmengen $D(T)$ und $D(A)$ in X_1 und mit Werten in X_2. Der Operator A heisst T-beschränkt, falls $D(A) \supset D(T)$ und Zahlen $a \geqq 0$, $b(a) \geqq 0$ so existieren, dass

$$\|Au\|_2 \leqq a\,\|Tu\|_2 + b(a)\,\|u\|_1$$

für alle $u \in D(T)$. Die untere Grenze der möglichen Werte $a \geqq 0$ wird T-Schranke von A genannt.

Für Vektoren $u \in D(T)$ definieren wir die T-Norm von u durch

$$\|u\|_T = \|Tu\|_2 + \|u\|_1 .$$

Der Operator A heisst T-kompakt, wenn $D(A) \supset D(T)$ und A jede beschränkte Menge des normierten Raumes $(D(T), \| \ \|_T)$ auf eine in $(X_2, \| \ \|_2)$ relativ kompakte Menge abbildet. Ist T abgeschlossen, so ist $(D(T), \| \ \|_T)$ ein Banachscher Raum.

Für die schwache Konvergenz einer Vektorfolge $\{u_n\}$ gegen ein Element u des betreffenden Raumes verwenden wir das Symbol $u_n \rightharpoonup u$.

3. Wir beginnen mit einem Lemma, das für Operatoren in Hilberträumen bereits bekannt ist, und dessen Beweis sich leicht auf den Fall von Banachräumen übertragen lässt:

LEMMA 1 ([3], p. 356). *Es sei A ein T-beschränkter Operator. Für jede in $(X_1, \| \ \|_1)$ schwach gegen null konvergierende Folge $\{u_n\} \subset D(T)$ mit $Tu_n \rightharpoonup 0$ gilt dann $Au_n \rightharpoonup 0$.*

SATZ 1. *Der Bildraum $(X_2, \| \ \|_2)$ sei reflexiv, und es sei T abgeschlossen. Notwendig für die T-Kompaktheit des Operators A ist dann die T-Beschränktheit von A mit T-Schranke null.*

Beweis. Sei der Operator A T-kompakt. Als kompakter Operator $(D(T), \| \ \|_T) \to (X_2, \| \ \|_2)$ ist A T-beschränkt. Es bleibt zu zeigen, dass die T-Schranke null ist. Nehmen wir an, diese Aussage sei falsch. Dann existieren ein $\delta > 0$ und eine Folge $\{u_n\} \subset D(T)$ mit der Eigenschaft, dass für alle natürlichen Zahlen n

$$\|Au_n\|_2 > \delta \|Tu_n\|_2 + n \|u_n\|_1 .$$

Sei $v_n = u_n / \|u_n\|_T$. Es gilt

$$\|Av_n\|_2 > \delta \|Tv_n\|_2 + n \|v_n\|_1 . \tag{1}$$

Da A ein T-beschränkter Operator ist und

$$\|v_n\|_T = 1 \tag{2}$$

für alle n, ist die Folge $\{Av_n\}$ beschränkt, und aus der Ungleichung

$$\|v_n\|_1 < \frac{1}{n} \|Av_n\|_2$$

folgt die Konvergenz $v_n \to 0$ in $(X_1, \| \ \|_1)$.

Nach Voraussetzung ist der Raum $(X_2, \| \ \|_2)$ reflexiv, und die Folge $\{Tv_n\}$ ist konstruktionsgemäss beschränkt; folglich existiert eine schwach konvergente Teilfolge $\{Tw_n\}$, $\{w_n\} \subset \{v_n\}$. Aus der schwachen Abgeschlossenheit des Operators T ergibt sich $Tw_n \rightharpoonup 0$ (vgl. [4], p. 165, Problem 5.12). Auf Grund von Lemma 1 gilt also $Aw_n \rightharpoonup 0$.

Wegen der T-Kompaktheit von A und der Beziehung (2) besitzt $\{Aw_n\}$ eine stark konvergente Teilfolge $Aw_{n_k} \to 0$. Aus (1) folgt $Tw_{n_k} \to 0$, was aber im Widerspruch steht zur Relation (2),

w.z.b.w.

4. Wir untersuchen nun, wann die T-Beschränktheit eines Operators mit T-Schranke null hinreichend ist für die T-Kompaktheit. Dazu setzen wir voraus, dass es

einen topologischen Isomorphismus E von $(D(T), \| \|_1)$ in $(X_2, \| \|_2)$ gibt. (Ein solcher existiert z.B. immer, wenn die Räume $(X_1, \| \|_1)$ und $(X_2, \| \|_2)$ topologisch äquivalent sind.) Mit E^{-1} bezeichnen wir den auf der Wertemenge von E definierten beschränkten inversen Operator.

SATZ 2. *Dafür, dass jeder T-beschränkte Operator mit T-Schranke null T-kompakt ist, ist notwendig und hinreichend, dass der Isomorphismus E T-kompakt ist*[1]).

Beweis. 1. *Notwendigkeit.* Da E offenbar ein T-beschränkter Operator mit T-Schranke null ist, muss E T-kompakt sein.

2. *Hinlänglichkeit.* Sei A ein T-beschränkter Operator mit T-Schranke null. Zu beliebigem $\delta > 0$ existiert also eine Zahl $b(\delta)$ derart, dass

$$\|A u\|_2 \leqq \delta \|T u\|_2 + b(\delta) \|u\|_1$$

für alle $u \in D(T)$ gilt. Es sei $\{u_n\}$ eine beschränkte Folge aus $(D(T), \| \|_T)$: $\|u_n\|_T \leqq K$ für alle n. Da der Operator E T-kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\{v_n\} \subset \{u_n\}$ mit konvergenter Bildfolge $\{E v_n\}$.

Wir zeigen, dass auch die Folge $\{A v_n\}$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir setzen $\delta_1 = \varepsilon/4K$ und wählen die Zahl N so, dass

$$\|E v_m - E v_n\|_2 \leqq \varepsilon/2 b(\delta_1) \|E^{-1}\|$$

für alle $m, n > N$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|A v_m - A v_n\|_2 &\leqq \delta_1 \|T(v_m - v_n)\|_2 + b(\delta_1) \|v_m - v_n\|_1 \\ &\leqq \delta_1 (\|T v_m\|_2 + \|T v_n\|_2) + b(\delta_1) \|E^{-1}\| \, \|E v_m - E v_n\|_2 < \varepsilon\end{aligned}$$

für $m, n > N$,

w.z.b.w.

5. Unter der Voraussetzung

$$(X_1, \| \|_1) = (X_2, \| \|_2) = (X, \| \|)$$

können wir eine weitere notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, dass jeder T-beschränkte Operator mit T-Schranke null T-kompakt ist. Das folgende Lemma ist wohlbekannt (vgl. z.B. [1], p. 201):

LEMMA 2. *Sei T abgeschlossen, und sei λ in der Resolventenmenge $\varrho(T)$. Der Operator A ist T-kompakt dann und nur dann, wenn $D(A) \supset D(T)$ und $A(T-\lambda)^{-1}$ ein kompakter Operator des Raumes $(X, \| \|)$ ist.*

Der Einheitsoperator 1 ist unter den getroffenen Annahmen ein zulässiger topologischer Isomorphismus E. Aus Satz 2 und Lemma 2 folgt deshalb

---

[1]) Der Operator T braucht hier nicht abschliessbar zu sein.

SATZ 3. *Sei der Operator T abgeschlossen, und sei λ in der Resolventenmenge $\varrho(T)$. Der Operator $(T-\lambda)^{-1}$ ist genau dann kompakt im Raume $(X, \| \ \|)$, wenn jeder T-beschränkte Operator mit T-Schranke null T-kompakt ist.*

6. BEMERKUNG (20. März 1969). Wir haben in Satz 1 vorausgesetzt, dass der Operator T abgeschlossen ist. Der Beweis muss nur unbedeutend modifiziert werden, wenn wir bloss annehmen, dass T abschliessbar ist. Dass man diese Voraussetzung jedoch nicht weglassen kann, zeigt das folgende

Beispiel. Sei X_2 endlich dimensional, und sei der Operator T unbeschränkt. Dann ist T nicht abschliessbar ([4], p. 166, Problem 5.18). Der Operator $A = T$ ist T-kompakt, aber offensichtlich ist die T-Schranke von A nicht null.

LITERATUR

[1] I. C. GOHBERG, und M. G. KREIN, *The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators.* A. M. S. Translations, Serie 2, Vol. 13, p. 185–264.
[2] S. GOLDBERG, *Unbounded linear operators*, Mac Graw Hill series in higher mathematics (1966).
[3] K. JÖRGENS, *Zur Spektraltheorie der Schrödinger-Operatoren.* Math. Z., *96* (1967), 355–372.
[4] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators* (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1966).

Eingegangen, 31.5.68