Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 44 (1969)

Artikel: Transplantation harmonique, transplantation par modules, et théorèmes isopérimétriques.

Autor: Hersch, Joseph

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33779

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Transplantation harmonique, transplantation par modules, et théorèmes isopérimétriques

par JOSEPH HERSCH (Ecole polytechnique fédérale, Zürich)

§1. Introduction

Des applications bien connues de la représentation conforme à des problèmes plans de physique mathématique reposent sur *l'invariance de l'intégrale de Dirichlet* lors d'une «transplantation conforme» [9]: Soit $\zeta(z)$ une application conforme (univalente) d'un domaine plan G_z sur un autre G_ζ; la transplantée d'une fonction $f(\zeta)$, donnée dans G_ζ, est la fonction $\tilde{f}(z)=f(\zeta(z))$ et l'on a $D(\tilde{f})=D(f)$, où $D(f)=\iint_{G_\zeta} \operatorname{grad}^2 f\, dA_\zeta$ et dA est l'élément d'aire.

Nous allons étudier ici deux extensions de cette transplantation, qui restent applicables à des domaines de types topologiques différents et de dimensions N, $\tilde{N}$ quelconques. La première de ces extensions («transplantation harmonique») a été brièvement annoncée dans une note aux *Comptes rendus* ([7]; voir aussi [3]); elle permet de transplanter une fonction ayant les mêmes surfaces de niveau qu'une fonction harmonique. La seconde en revanche («transplantation par modules») n'est pas soumise à cette restriction; c'est pourquoi elle peut fournir des bornes inférieures pour la fréquence propre fondamentale d'une membrane: nous donnerons une nouvelle démonstration du théorème isopérimétrique de Rayleigh–Faber–Krahn.

Toutes les considérations qui suivent restent valables pour N quelconque; pour faciliter le langage, elles seront exprimées ici pour $N=3$ dimensions.

§2. La «transplantation harmonique»

2.1. Soit G un domaine de l'espace, dont la frontière Γ se compose de trois parties $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_a$. Nous supposons l'existence de la solution $h(x, y, z)=h(X)$ du problème de Dirichlet suivant:

$$h = h_0 = \text{const} \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \qquad h = h_1 = \text{const} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$
$$\partial h/\partial n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a, \qquad \Delta h = 0 \quad \text{dans} \quad G.$$

Soit γ une surface, ou un système de surfaces, séparant Γ_0 de Γ_1 dans G: une «rive» de γ est connexe à Γ_0 dans $G-\gamma$, l'autre «rive» de γ est connexe à Γ_1; soit $\partial/\partial n$ la dérivée normale dirigée vers Γ_1. On sait que le flux $\iint_\gamma \partial h/\partial n\, dS$ est indépendant

de γ, donc

$$\frac{1}{\mu} = 4\pi C = \frac{1}{(h_1 - h_0)^2} D(h)$$

$$= \frac{1}{(h_1 - h_0)^2} \left\{ \iiint_{\Gamma_1} h \frac{\partial h}{\partial n} dS - \iint_{\Gamma_0} h \frac{\partial h}{\partial n} dS \right\} = \frac{1}{h_1 - h_0} \iint_{\gamma} \frac{\partial h}{\partial n} dS,$$

où $\mu = \mu_{\Gamma_0 \Gamma_1}$ est le «module», C la «capacité», $D(h) = \iiint_G \operatorname{grad}^2 h \, d\tau$ l'intégrale de Dirichlet, $d\tau$ l'élément de volume, dS l'élément de surface.

Soit $\psi(h)$ une fonction de classe C^1 dans l'intervalle $h_0 \leqslant h \leqslant h_1$; que vaut l'intégrale de Dirichlet $D(f)$ de la fonction $f(X) = \psi(h(X))$, $X \in G$? Partageons G par toutes les surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}} (h = \hat{h})$ de h; l'élément de volume peut s'écrire $d\tau = dn \, dS$, où dn est la distance entre les surfaces $\gamma_{\hat{h}}$ et $\gamma_{\hat{h}+d\hat{h}}$ au point considéré, et dS est sur $\gamma_{\hat{h}}$;

$$D(f) = \iiint_G \psi'^2 \left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)^2 dn \, dS = \int_{h_0}^{h_1} \psi'^2(\hat{h}) \, d\hat{h} \iint_{\gamma_{\hat{h}}} \frac{\partial h}{\partial n} dS = \frac{D(h)}{h_1 - h_0} \int_{h_0}^{h_1} \psi'^2 \, dh. \tag{1}$$

Le quotient

$$\frac{D(f)}{D(h)} = \frac{1}{h_1 - h_0} \int_{h_0}^{h_1} \psi'^2 \, dh \tag{2}$$

ne dépend donc que des nombres h_0 et h_1 et de la fonction $\psi(h)$.

2.2. Procédons de même pour un autre domaine $\tilde{G}$, *qui n'est pas nécessairement topologiquement équivalent à G* (et peut même avoir une dimension $\tilde{N}$ différente de N). Décomposons sa frontière $\tilde{\Gamma}$ en trois parties $\tilde{\Gamma}_0$, $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_a$; appelons $\tilde{h}$ la fonction harmonique dans $\tilde{G}$ qui vaut h_0 sur $\tilde{\Gamma}_0$, h_1 sur $\tilde{\Gamma}_1$, et dont la dérivée normale s'annule sur $\tilde{\Gamma}_a$.

DÉFINITION. – *La fonction $\tilde{f}(\tilde{X}) = \psi(\tilde{h}(\tilde{X}))$ sera appelée la* **transplantée harmonique** *de la fonction $f(X) = \psi(h(X))$.*

La formule (2) reste valable pour $\tilde{f}$ et $\tilde{h}$, d'où

$$\frac{D(\tilde{f})}{D(\tilde{h})} = \frac{D(f)}{D(h)}. \tag{2'}$$

En particulier, si $D(\tilde{h}) = D(h)$, c'est-à-dire *si* $\tilde{\mu} = \mu$, alors $D(\tilde{f}) = D(f)$ et l'intégrale de Dirichlet est *invariante* par cette transplantation harmonique.

2.3. Soit G un domaine de l'espace, de frontière Γ décomposée en Γ_0 et Γ_a. Nous supposons l'existence d'une *fonction de Green* $g(X, Q)$ (X, point variable; Q, point

fixe dans G), définie par $g=0$ pour $X\in\Gamma_0$, $\partial g/\partial n_X=0$ pour $X\in\Gamma_a$, et $-\Delta_X g=\delta_Q$ (mesure de Dirac au point Q). Cette fonction de Green $g(X, Q)=h(X)$, harmonique dans $G-Q$, jouera le même rôle que la fonction h de 2.1. Soit γ une surface, ou un système de surfaces, séparant Q de Γ_0 dans G, nous avons ici $\iint_\gamma \partial h/\partial n\, dS=1$, d'où par (1), pour une fonction $f(X)=\psi(h(X))$,

$$D(f)=\int_0^\infty \psi'^2\, dh. \tag{1'}$$

Soit $\tilde{h}(\tilde{X})=\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Q})$ une fonction de Green dans un autre domaine $\tilde{G}$ avec $\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}_0+\tilde{\Gamma}_a$, nous pouvons «transplanter» f de G sur $\tilde{G}$ en définissant $\tilde{f}(\tilde{X})=\psi(\tilde{h}(\tilde{X}))$. Alors $D(\tilde{f})=D(f)$.

2.4. Pour généraliser la notion de «rayon conforme», nous définissons (grâce à la fonction de Green) le «*rayon harmonique*» $R_Q(G; \Gamma_0, \Gamma_a)$ d'un domaine G en un point $Q\in G$, relatif à Γ_0 et Γ_a ($\Gamma_0+\Gamma_a=\Gamma$ frontière de G); $R_Q(G; \Gamma_0, \Gamma_a)$ est le rayon de la boule sphérique B_N de même dimension N (par exemple $N=3$) que G, de centre $\tilde{Q}$, et telle que, avec $\tilde{\Gamma}_0=\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_a$ vide, $g_B(\tilde{X}, \tilde{Q})-g_{G;\Gamma_0,\Gamma_a}(X, Q)\to 0$ lorsque ($\tilde{Q}$ et Q restant fixes) $|\tilde{X}\tilde{Q}|=|XQ|\to 0$. (Définition voisine de celle de la constante de Robin.) – Pour $N=3$, on a $4\pi g(X, Q)=|XQ|^{-1}-R_Q^{-1}+o(1)$.

Le *rayon harmonique maximum* $\dot{R}(G; \Gamma_0, \Gamma_a)$ est défini par

$$\dot{R}(G; \Gamma_0, \Gamma_a)=\max_{Q\in G} R_Q(G; \Gamma_0, \Gamma_a).$$

Si G est un domaine plan simplement connexe et si $\Gamma_0=\Gamma$ (Γ_a vide), alors $\dot{R}(G)$ est égal au rayon conforme maximum $\dot{r}(G)$ [9].

2.5. Un LEMME (cf. Carleman [1] et Szegö [11]):

Soit G un domaine borné de l'espace, dont la frontière est formée de n surfaces fermées $\Gamma_1^{(1)}+\Gamma_1^{(2)}+\cdots+\Gamma_1^{(n)}=\Gamma_1$ *intérieures* et d'une frontière *extérieure* Γ_0 (Γ_a vide); soient V_G le volume de G et V_0 ($>V_G$) le volume de tout le domaine borné délimité par Γ_0; *de tous ces domaines G ayant mêmes V_0 et V_G, le domaine limité par deux sphères concentriques réalise le Maximum du module $\mu=\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}$.*

Remarque – Il est bien connu (conséquence immédiate du principe de Dirichlet) que le module est une fonctionnelle de domaine monotone; la proposition suivante est donc équivalente au lemme:

V_0 et μ étant donnés, V_G est un Minimum pour le domaine compris entre deux sphères concentriques.

Démonstration du lemme. – Nous considérons la fonction h harmonique dans G,

qui vaut 0 sur Γ_0 et 1 sur Γ_1, et nous partageons G par toutes les surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}}$ $(h=\hat{h})$ de h.

$$\mu^{-1} = D(h) = \iint_{\Gamma_1} h \frac{\partial h}{\partial n}\, dS - \iint_{\Gamma_0} h \frac{\partial h}{\partial n}\, dS = \iint_{\Gamma_1} \frac{\partial h}{\partial n}\, dS = \iint_{\gamma_{\hat{h}}} |\operatorname{grad} h|\, dS$$

pour tout $0 \leqslant \hat{h} \leqslant 1$. – D'autre part, le volume infinitésimal compris entre $\gamma_{\hat{h}}$ et $\gamma_{\hat{h}+d\hat{h}}$ vaut $|dV| = \iint_{\gamma_{\hat{h}}} dn\, dS = d\hat{h} \iint_{\gamma_{\hat{h}}} |\operatorname{grad} h|^{-1}\, dS$; donc, par l'inégalité de Schwarz puis l'inégalité isopérimétrique géométrique dans l'espace,

$$\mu^{-1}\, |dV| \geqslant d\hat{h} \cdot \left(\iint_{\gamma_{\hat{h}}} dS \right)^2 \geqslant d\hat{h} \cdot (36\pi)^{2/3}\, V(\hat{h})^{4/3}, \tag{3}$$

où $V(\hat{h})$ est le volume de tout le domaine borné délimité par $\gamma_{\hat{h}}$; $V(0)=V_0$; $V(1)= =V_0-V_G$; $|dV| = -(dV/d\hat{h})\, d\hat{h}$; donc, par (3), $-V^{-4/3}\, dV \geqslant (36\pi)^{2/3}\, \mu\, d\hat{h}$; d'où en intégrant ($\hat{h}$ va de 0 à 1):

$$(V_0 - V_G)^{-1/3} - V_0^{-1/3} \geqslant \tfrac{1}{3}(36\pi)^{2/3}\, \mu = (48\pi^2)^{1/3}\, \mu .$$

On a l'égalité dans le cas de deux sphères concentriques Γ_0 (rayon R_0, $V_0 = 4\pi R_0^3/3$) et Γ_1 (rayon R_1, $V_0 - V_G = 4\pi R_1^3/3$): *alors* $(48\pi^2)^{-1/3}\, [(V_0-V_G)^{-1/3} - V_0^{-1/3}] = =(4\pi R_1)^{-1} - (4\pi R_0)^{-1} = \mu$.

Remarque. – Le lemme et sa démonstration restent valables si l'on admet que Γ_0 soit formée de plusieurs surfaces fermées (dont l'une est la frontière extérieure); les volumes séparés de G par les composantes intérieures de Γ_0 ne doivent alors *pas* être comptés dans V_0. (Ce cas peut être considéré comme cas limite du précédent: on peut relier entre elles les diverses composantes de Γ_0 par des «tuyaux» minces.)

2.6. Le LEMME analogue, relatif au rayon harmonique maximum:

De tous les domaines G de l'espace, de volume V_G donné et dont la frontière Γ_0 consiste en une ou plusieurs surfaces fermées, la sphère a le plus grand rayon harmonique maximum $\dot{R}$.

En d'autres termes: $V_G \geqslant (4/3)\, \pi \dot{R}(G)^3$.

Remarque heuristique. – Ce lemme peut être considéré comme un cas limite du précédent, Γ_1 étant une sphère infinitésimale.

Démonstration. – Soit $Q \in G$ tel que $R_Q(G) = \dot{R}$; lorsque $X \to Q$, la fonction de Green $g(X, Q)$ est de la forme $4\pi g(X, Q) = |XQ|^{-1} - \dot{R}^{-1} + o(1)$. Soit V_K le volume du sous-domaine $G_K = \{X \in G \mid 0 < g(X, Q) < K\}$; le module de G_K vaut K; donc, par le lemme de 2.5, V_K est au moins égal au volume compris entre deux sphères concentriques de

rayons R_0 et $R_K < R_0$, la sphère extérieure ayant le volume V_G et le module étant K: $(4/3)\,\pi R_0^3 = V_G$, $(4\pi R_K)^{-1} - (4\pi R_0)^{-1} = K$; $V_G - V_K \leqslant 4\pi R_K^3/3$, donc *il existe un point X tel que $|XQ| \leqslant R_K$ et $g(X, Q) \leqslant K$.*

Par la définition de $\dot{R} = R_Q(G)$,

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{r}{\exists}\ \underset{\substack{X \\ |XQ|<r}}{\forall}\ g(X, Q) > \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|XQ|} - \frac{1}{\dot{R}}\right) - \varepsilon;$$

choisissons $K = (4\pi r)^{-1} - (48\pi^2 V_G)^{-1/3}$, alors $R_K = r$; $\exists X$ tel que $|XQ| \leqslant r$ et $g(X, Q) \leqslant K$;

$$K \geqslant g(X, Q) > \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|XQ|} - \frac{1}{\dot{R}}\right) - \varepsilon \geqslant \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\dot{R}}\right) - \varepsilon$$
$$= K + (48\pi^2 V_G)^{-1/3} - (4\pi\dot{R})^{-1} - \varepsilon;$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $(4\pi\dot{R})^{-1} > (48\pi^2 V_G)^{-1/3} - \varepsilon$, donc $V_G \geqslant 4\pi\dot{R}^3/3$.

2.7. *Extension du théorème isopérimétrique $\lambda_1 \dot{r}^2 \leqslant j_0^2$ de Pólya–Szegö* [9].

Nous considérons le problème de la «membrane vibrante à N dimensions»: $\Delta u + \lambda^G u = 0$ dans le domaine G et $u = 0$ sur la frontière Γ.

THÉORÈME. – *Parmi tous les domaines G à N dimensions admettant une fonction de Green, la boule sphérique B_N réalise le Maximum de $\lambda_1^G \dot{R}(G)^2$.*

Démonstration (exprimée ici pour $N = 3$). – Soient $\tilde{Q}$ le centre d'une boule sphérique $B = B_N$ de rayon $R = \dot{R}(G)$; Q un point de G où $R_Q(G) = \dot{R}(G)$; $\tilde{u}_1(\tilde{X}) = \psi(\tilde{g}_B(\tilde{X}, \tilde{Q}))$ la fonction propre fondamentale de B; sa «transplantée» $U(X) = \psi(g_G(X, Q))$ s'annule sur Γ, elle est admissible pour le principe de Rayleigh dans G:

$$\lambda_1^G \leqslant R[U] = D(U) \Big/ \iiint_G U^2\, d\tau;$$

on va montrer que ce quotient de Rayleigh est

$$\leqslant D(\tilde{u}_1) \Big/ \iiint_B \tilde{u}_1^2\, d\tilde{\tau} = \lambda_1^B.$$

En effet, $D(U) = D(\tilde{u}_1)$ (cf. 2.3); d'autre part, le sous-domaine $\hat{G} = \{X \mid g_G(X, Q) > \hat{g}\}$ a la fonction de Green $g_{\hat{G}}(X, Q) = g_G(X, Q) - \hat{g}$, donc le rayon conforme maximum $\dot{R}(\hat{G}) \geqslant R_Q(\hat{G})$, où (cf. 2.4) $R_Q(\hat{G})^{-1} = \dot{R}(G)^{-1} + 4\pi\hat{g}$, $\dot{R}(\hat{G})^{-1} \leqslant \dot{R}(G)^{-1} + 4\pi\hat{g}$; en vertu du lemme 2.6 (cas $N = 3$), son volume $V_{\hat{G}} \geqslant (4/3)\,\pi\dot{R}(\hat{G})^3 \geqslant (4/3)\,\pi[\dot{R}(G)^{-1} + 4\pi\hat{g}]^{-3} = V_{\hat{B}}$, où $\hat{B}$ est la boule de rayon $\hat{R}$ dans laquelle $\tilde{g}_B(\tilde{X}, \tilde{Q}) > \hat{g}$; en effet, $\hat{R}$ est déterminée par $4\pi\hat{g} = \hat{R}^{-1} - \dot{R}(G)^{-1}$.

La fonction ψ étant monotone croissante,

$$\iiint_G U^2\,d\tau = \int_{\hat{g}=0}^{\infty} V_{\hat{G}}\,d[\psi^2(\hat{g})] \geqslant \int_{\hat{g}=0}^{\infty} V_{\hat{B}}\,d[\psi^2(\hat{g})] = \iiint_B \tilde{u}_1^2\,d\tilde{\tau}.$$

Ainsi s'achève la démonstration (ici pour $N=3$) de l'inégalité isopérimétrique $\lambda_1^G \leqslant \lambda_1^{B_N}$.

Remarque. – Nous avons utilisé ci-dessus $\dot{R}(\hat{G}) \geqslant R_Q(\hat{G})$; en fait, *on a l'égalité*, ce qui est un corollaire de la suradditivité des modules.

Pour $N=3$ dimensions, on a $\lambda_1^{B_3} = \pi^2/R^2$, donc

$$\lambda_1^G \dot{R}^2(G) \leqslant \pi^2. \tag{4}$$

2.8. Application de (4) à quelques domaines dont on connaît λ_1:

(a) Parallélépipède rectangle de côtés a, b, c: $\lambda_1 = \pi^2(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})$, d'où $\dot{R}^{-2} \geqslant a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}$, soit $\dot{R} \leqslant 3^{-1/2}\mathfrak{M}_{-2}(a; b; c)$. ([4], pp. 12 ss.)

Comparaison: le lemme 2.6 donne $\dot{R}^3 \leqslant 3abc/4\pi$, soit $\dot{R} \leqslant (3/4\pi)^{1/3}\,\mathfrak{M}_0(a; b; c)$, qui est plus faible car $(3/4\pi)^{1/3} \simeq 0{,}620 > 0{,}577 \simeq 3^{-1/2}$ et $\mathfrak{M}_0 \geqslant \mathfrak{M}_{-2}$.

(b) Cas particulier $a=b=c$ (cube): $\lambda_1 = 3\pi^2/a^2$, d'où $\dot{R} \leqslant a/\sqrt{3} \simeq 0{,}57735a$. [Comparaisons: l'inégalité grossière de monotonie donne $\dot{R} > 0{,}5a$; le lemme 2.6 donne $\dot{R} \leqslant (3/4\pi)^{1/3}\,a \simeq 0{,}620a$.]

(c) Cas limite $b=c=\infty$: G est le domaine compris entre deux plans parallèles, de distance a; $\lambda_1 = \pi^2/a^2$, (4) donne $\dot{R} \leqslant a$; la valeur exacte est $\dot{R} = a/\ln 4 \simeq 0{,}72135a$. On a donc ici $\lambda_1 \dot{R}^2 = (\pi/\ln 4)^2 \simeq 0{,}52034\pi^2$. On a lieu de *conjecturer* que c'est, pour les domaines convexes à trois dimensions, la plus petite valeur possible de $\lambda_1 \dot{R}^2$. [De façon analogue, Pólya et Szegö ([9], p. 17) ont conjecturé que, parmi les domaines convexes plans, la bande infinie réalise le Minimum de $\lambda_1 \dot{r}^2$ ($\dot{r}$=rayon conforme maximum).]

(d) Cylindre de révolution infini, de rayon R: $\lambda_1 = j_0^2/R^2$, (4) donne donc $\dot{R} \leqslant \pi R/j_0 \simeq$ $\simeq 1{,}3064R$.

(e) Cylindre de révolution tronqué (rayon R, hauteur H): $\lambda_1 = j_0^2/R^2 + \pi^2/H^2$, d'où $\dot{R}^{-2} \geqslant j_0^2\pi^{-2}R^{-2} + H^{-2}$, soit $\dot{R} \leqslant 3^{-1/2}\mathfrak{M}_{-2}(\sqrt{2}\pi R/j_0; \sqrt{2}\pi R/j_0; H)$.

Comparaison: le lemme 2.6 donne $\dot{R}^3 \leqslant 3R^2H/4$, soit $\dot{R} \leqslant (3j_0^2/8\pi^2)^{1/3}\,\mathfrak{M}_0(\sqrt{2}\pi R/j_0;$ $\sqrt{2}\pi R/j_0; H)$ qui est plus faible, car $(3j_0^2/8\pi^2)^{1/3} \simeq 0{,}603 > 0{,}577 \simeq 3^{-1/2}$ et $\mathfrak{M}_0 \geqslant \mathfrak{M}_{-2}$. ([4], pp. 12 ss.)

(f) Cas particulier $H=2R$: Nous obtenons $\dot{R} \leqslant (j_0^2\pi^{-2}+0{,}25)^{-1/2}R \simeq 1{,}094R$. [Comparaisons: l'inégalité grossière de monotonie donne $\dot{R} > R$; le lemme 2.6 donne $\dot{R} \leqslant (3/2)^{1/3}\,R \simeq 1{,}145R$.] [Par le théorème de Rayleigh–Faber–Krahn, le lemme 2.6 est *toujours* plus faible que (4).]

Inversement, la connaissance de $\dot{R}$ (ou d'une borne inférieure) fournira une borne supérieure pour λ_1.

2.9. *Extension d'une propriété isopérimétrique des membranes rectangulaires* [5, 6]. Considérons un domaine G (dimension N quelconque) de frontière $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1+\Gamma_a$ (Γ_0, Γ_1, Γ_a disjointes). Nous supposons qu'il existe une fonction harmonique h dans G telle que $h=0$ sur Γ_0, $h=1$ sur Γ_1, $\partial h/\partial n=0$ sur Γ_a, et que $1/\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}=D(h)<\infty$. – Soit donnée dans G une «répartition de masses» $\varrho(x_1,\ldots,x_N)=\varrho(X)$; masse totale $M=\int_G \varrho\, d\tau$. – Considérons dans G deux problèmes de «membranes vibrantes inhomogènes»:

$\Delta u+\lambda\varrho u=0$ dans G, avec

0) $u=0$ sur Γ_0, $\partial u/\partial n=0$ sur Γ_1 et Γ_a; première valeur propre λ_{Γ_0};

1) $u=0$ sur Γ_1, $\partial u/\partial n=0$ sur Γ_0 et Γ_a; première valeur propre λ_{Γ_1}.

Alors

$$\lambda_{\Gamma_0}^{-1}+\lambda_{\Gamma_1}^{-1}\geqslant 8M\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}/\pi^2. \tag{5}$$

Cette inégalité est *isopérimétrique*: on a l'égalité notamment avec $\varrho=\text{const}$ pour tout cylindre (ou prisme) tronqué droit, de faces opposées Γ_0 et Γ_1. – Elle a d'abord été démontrée à l'aide de la représentation conforme [5, 6] pour les «quadrilatères» et les domaines doublement connexes dans le plan.

Démonstration de (5). – La fonction $f_0(X)=\sin[\pi h(X)/2]$ est admissible pour le principe de Rayleigh caractérisant λ_{Γ_0}; $f_1(X)=\cos[\pi h(X)/2]$ pour celui caractérisant λ_{Γ_1}; partageons G par les surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}}(h=\hat{h})$ de h, nous obtenons

$$D(f_0)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_G \cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right)\operatorname{grad}^2 h\, d\tau$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_{\hat{h}=0}^{1}\cos^2\left(\frac{\pi\hat{h}}{2}\right)d\hat{h}\int_{\gamma_{\hat{h}}}\frac{\partial h}{\partial n}\,dS=\frac{\pi^2}{8\mu}=D(f_1);$$

$$\frac{1}{\lambda_{\Gamma_0}}+\frac{1}{\lambda_{\Gamma_1}}\geqslant\frac{1}{R[f_0]}+\frac{1}{R[f_1]}=\frac{8\mu}{\pi^2}\int_G\varrho\cdot(f_0^2+f_1^2)\,d\tau=\frac{8\mu}{\pi^2}M.$$

Remarque. – Pour les problèmes correspondants à 1 dimension dans l'intervalle $0<\tilde{x}<1$, nous avons la fonction harmonique $\tilde{h}=\tilde{x}$ et les fonctions propres fondamentales $\tilde{u}_0=\sin(\pi\tilde{x}/2)=\sin(\pi\tilde{h}/2)$ et $\tilde{u}_1=\cos(\pi\tilde{x}/2)=\cos(\pi\tilde{h}/2)$; les fonctions f_0 et f_1

utilisées dans la démonstration sont précisément les *transplantées harmoniques* de $\tilde{u}_0$ et $\tilde{u}_1$ (cf. 2.2).

§3. La «transplantation par modules»

3.1. La transplantation harmonique (§ 2) s'applique à des fonctions ayant les mêmes lignes de niveau qu'une fonction harmonique, ce qui est une forte restriction. Pour transplanter des fonctions n'ayant *pas* cette propriété, nous remarquons que *nous n'avons pas utilisé complètement l'harmonicité de h*! Nous avons utilisé (en 2.1) que le flux $\iint \partial h/\partial n\, dS$ est le même pour toutes les surfaces *de niveau* $\gamma_{\hat{h}}$ de h; tandis que l'harmonicité de h est équivalente à cette propriété pour *toute* surface γ. – On voit donc que, à l'aide de 2.1 et 2.2, nous saurons transplanter une fonction $f(X)$ (de classe C^1) dans G, constante sur Γ_0, constante sur Γ_1, et de dérivée normale nulle sur Γ_a, pourvu que nous sachions *construire une fonction $h(X)$ dans G, ayant les mêmes surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}}$ $(h=\hat{h})$ que $f(X)$ et dont le flux $\iint_{\gamma_{\hat{h}}} \partial h(X)/\partial n\, dS$ soit indépendant de $\hat{h}$.* – Le problème de 2.1 est donc modifié ainsi: On donne de nouveau h_0 et h_1, mais *on impose*, en lieu et place de l'harmonicité, *toutes les surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}}$ de h*, et la condition $\iint_{\gamma_{\hat{h}}} \partial h/\partial n\, dS = \text{const}$. Appelons k cette constante. La fonction h est complètement déterminée: c'est le potentiel électrostatique *en présence des «conducteurs parfaits»* $\gamma_{\hat{h}}$. Il est clair que la différence $d\hat{h}$ des valeurs de h sur deux conducteurs voisins $\gamma_{\hat{h}}$ et $\gamma_{\hat{h}+d\hat{h}}$ est proportionnelle au module infinitésimal (résistance électrique)

$$d\mu = \mu(dG) = [4\pi C(dG)]^{-1} = \left[\frac{1}{(d\hat{h})^2} D_{dG}(h)\right]^{-1} = \left[\frac{1}{d\hat{h}} \iint_{\gamma_{\hat{h}}} \frac{\partial h}{\partial n}\, dS\right]^{-1}$$

$$= \left[\iint_{\gamma_{\hat{h}}} \frac{1}{dn}\, dS\right]^{-1} = \left(\frac{k}{d\hat{h}}\right)^{-1} = \frac{d\hat{h}}{k}, \qquad d\hat{h} = k\, d\mu.$$

On peut imposer *deux* des trois nombres h_0, h_1, k, la constante k (l'intensité) est proportionnelle à la différence $h_1 - h_0$. Sans aucune restriction essentielle, *nous choisirons dans ce travail $h_0 = 0$ et $k = 1$, ce qui détermine h_1.*

Nous avons donc

$$dh = d\mu$$

et, en désignant par γ_X la ligne de niveau passant par le point X,

$$h(X) = \int_{\Gamma_0}^{\gamma_X} d\mu = \mu^-(X);$$

nous introduisons la notation $\mu^-(X)$ (au lieu de $h(X)$), et nous dirons «le module au

point X» pour désigner cette fonction ainsi définie dans G. Le signe – dans μ^- veut rappeler que, par suite de la *suradditivité des modules*, $\mu^-(X)=\mu^-(\gamma_X)\leqslant\mu_{\Gamma_0\gamma_X}$: il ne faut pas confondre $\mu^-=\int d\mu$ et μ.

La fonction cherchée est ainsi simplement le «module» $h(X)=\mu^-(X)$. On va *vérifier* qu'elle a bien la propriété voulue.

3.2. THÉORÈME. – *Le flux du «module» à travers chaque surface de niveau vaut* 1.

Démonstration. – Considérons deux surfaces de niveau voisines $\check{\gamma}$ et $\hat{\gamma}$; $\mu_{\check{\gamma}\hat{\gamma}}=d\mu=d\mu^-$; $dn(X)$ est la distance d'un point $X\in\hat{\gamma}$ à $\check{\gamma}$; par 3.1, nous avons

$$\iint_{\hat{\gamma}} \frac{\partial\mu^-}{\partial n}\,dS = d\mu \iint_{\hat{\gamma}} \frac{1}{dn}\,dS = d\mu\cdot\frac{1}{d\mu} = 1\,.$$

Remarque. – Si Γ_1 se réduit à un point, le «module» $\mu^-(X)$ varie en général de 0 à $+\infty$. Ce n'est pas une fonction harmonique, mais son flux vaut 1 à travers chaque ligne de niveau: *c'est une extension naturelle de la notion de fonction de Green.*

3.3. Le «module» $\mu^-(X)$ ayant les mêmes lignes de niveau que $f(X)$, on peut écrire $f(X)=\psi(\mu^-(X))$, d'où (analogue à 2.1 et 2.3):

$$\begin{aligned} D(f) &= \iiint_G \psi'^2(\mu^-)\left(\frac{\partial\mu^-}{\partial n}\right)^2 dn\,dS = \int_{\mu^-=0}^{\mu^-_{\max}} \psi'^2(\mu^-)\,d\mu^- \iint_{\gamma_{\mu^-}} \frac{\partial\mu^-}{\partial n}\,dS \\ &= \int_{\mu^-=0}^{\mu^-_{\max}} \psi'^2(\mu^-)\,d\mu^-\,. \end{aligned} \tag{1''}$$

Dans le cas $0<\mu^-<\infty$ (cf. remarque ci-dessus), nous avons

$$D(f) = \int_{\mu^-=0}^{\infty} \psi'^2(\mu^-)\,d\mu^-\,. \tag{1'''}$$

3.4. Etant donnés: (a) deux domaines G, $\tilde{G}$ (dont les dimensions N et $\tilde{N}$ ne sont même pas nécessairement égales), de frontières $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1+\Gamma_a$ et $\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}_0+\tilde{\Gamma}_1+\tilde{\Gamma}_a$;

(b) une fonction f dans G, constante sur Γ_0, constante sur Γ_1, et de dérivée normale nulle sur Γ_a;

(c) une fonction F dans $\tilde{G}$, jouissant des propriétés analogues;

alors nous définissons la **transplantée par modules** $\tilde{f}(\tilde{X})$ *de* $f(X)$ comme suit:

$\mu^-(X)$ est définie dans G comme en 3.1, à l'aide des lignes de niveau de f; $\tilde{\mu}^-(\tilde{X})$ de même dans $\tilde{G}$ à l'aide des lignes de niveau de F; alors $f(X)$ est de la forme $f(X)=$ $=\psi(\mu^-(X))$. [Souvent $\mu^-_{\max}=\mu^-(\Gamma_1)$, $\tilde{\mu}^-_{\max}=\tilde{\mu}^-(\tilde{\Gamma}_1)$.]

DÉFINITION:

$$\tilde{f}(\tilde{X})=\psi\left(\frac{\mu^-_{\max}}{\tilde{\mu}^-_{\max}}\tilde{\mu}^-(\tilde{X})\right). \tag{6}$$

On a alors, par 3.3,

$$D(\tilde{f})=\left(\frac{\mu^-_{\max}}{\tilde{\mu}^-_{\max}}\right)^2\int_{\mu^-=0}^{\mu^-\max}\psi'^2(\mu^-)\,d\left(\frac{\tilde{\mu}^-_{\max}}{\mu^-_{\max}}\mu^-\right)=\frac{\mu^-_{\max}}{\tilde{\mu}^-_{\max}}D(f),$$

$$\tilde{\mu}^-_{\max}D(\tilde{f})=\mu^-_{\max}D(f). \tag{2''}$$

En particulier, *si* $\tilde{\mu}^-_{\max}=\mu^-_{\max}$, *et également ici si tous deux sont infinis, nous définissons*

$$\tilde{f}(\tilde{X})=\psi(\tilde{\mu}^-(\tilde{X})), \tag{6'}$$

d'où

$$D(\tilde{f})=D(f). \tag{2'''}$$

3.5. *Une autre démonstration du théorème de Rayleigh–Faber–Krahn* [10, 2, 8, 9]

Ni la transplantation conforme, ni la transplantation harmonique (§ 2) ne peuvent servir à démontrer ce théorème $\lambda_1 A\geqslant\pi j_0^2$. ($A$ est l'aire du domaine, $j_0\simeq 2{,}4048$ le premier zéro de la fonction de Bessel $J_0(x)$; on a l'égalité pour la membrane circulaire.) En effet, la fonction propre fondamentale $u_1(X)$ du domaine plan considéré G ($u_1=0$ sur la frontière Γ) n'a en général *pas* les mêmes lignes de niveau qu'une fonction harmonique. Quand on compare G à une membrane circulaire K, une transplantation conforme ou harmonique ne peut donc avoir lieu que de K sur G, le principe de Rayleigh est alors appliqué (à la fonction transplantée) *dans* G: il ne peut fournir que des bornes *supérieures* pour λ_1.

En revanche, la «transplantation par modules» permet d'utiliser les lignes de niveau de u_1 *dans* G *et de transplanter* u_1 *de* G *sur* K.

Le théorème pour N dimensions est bien connu: *De tous les domaines de dimension* N *et de* N*-volume* V *donnés, la boule sphérique donne la plus petite valeur propre fondamentale* λ_1. – La démonstration suivante sera, elle aussi, exprimée pour $N=3$ dimensions, mais elle reste valable pour tout N.

Nous avons ici $\Gamma_0=\Gamma$, Γ_a est vide, Γ_1 est formée par le point (ou les points) où u_1 atteint son maximum. – Dans le domaine G considéré, nous définissons la fonction $\mu^-(X)$, comme en 3.1, à partir des surfaces de niveau de $u_1(X)$. La fonction ψ est définie par $u_1(X)=\psi(\mu^-(X))$. – Soit K une sphère de centre $\tilde{Q}$ et de volume V_G égal

à celui de G: son rayon R est donné par $4\pi R^3/3 = V_G$. Le «module» $\tilde{\mu}^-(\tilde{X})$ dans K sera défini relativement aux sphères concentriques, d'où $\tilde{\mu}^-(\tilde{X}) = \tilde{\mu}(\tilde{X}) = (4\pi)^{-1}(|\tilde{X}\tilde{Q}|^{-1} - R^{-1})$. [Il est égal à $\tilde{g}_{\tilde{X}\tilde{Q}}$; on a *ici l'additivité* des modules.] La transplantée de $u_1(X)$ est $\tilde{u}(\tilde{X}) = \psi(\tilde{\mu}(\tilde{X}))$; $\tilde{u} = 0$ sur la frontière sphérique $\tilde{\Gamma}$ de K. Par (2‴),

$$D_K(\tilde{u}) = \int_{\mu^-=0}^{\infty} \psi'^2(\mu^-)\, d\mu^- = D_G(u_1) = \lambda_1^G \iiint_G u_1^2\, d\tau = \lambda_1^G \int_{\mu^-=0}^{\infty} \psi^2(\mu^-) \frac{dV}{d\mu^-}\, d\mu^-, \tag{7}$$

où dV est le volume compris entre les surfaces de niveau γ_{μ^-} et $\gamma_{\mu^- + d\mu^-}$; soit $V(\xi)$ le volume du sous-domaine de G où $\mu^- < \xi$; $dV/d\mu^- = dV/d\xi$; il suit du lemme 2.5 (Carleman, Szegö) que la dérivée $dV/d\xi$ est, pour chaque ξ, plus grande que pour une sphère de volume $V_G - V(\xi)$; donc, avec $4\pi r^3/3 = V_G - V(\xi)$,

$$\frac{dV}{d\xi} \geqslant \frac{-4\pi r^2\, dr}{-dr/4\pi r^2} = (4\pi r^2)^2 = (36\pi)^{2/3}\,(V_G - V(\xi))^{4/3};$$

d'où, en intégrant et en tenant compte de $V(\xi = 0) = 0$,

$$[V_G - V(\xi)]^{-1/3} \geqslant (48\pi^2)^{1/3}\,\xi + V_G^{-1/3} = [V_G - \tilde{V}(\xi)]^{-1/3}$$

pour tout ξ (analogue: 2.5), c'est-à-dire $V(\xi) \geqslant \tilde{V}(\xi)$; $V(\xi = \infty) = V_G = V_K = \tilde{V}(\xi = \infty)$.

La fonction $\psi(\xi)$ étant monotone croissante, on a par (7):

$$D_K(\tilde{u}) = \lambda_1^G \int_{\xi=0}^{\infty} \psi^2(\xi)\, dV(\xi) = \lambda_1^G \int_{\xi=0}^{\infty} [V_G - V(\xi)]\, d[\psi^2(\xi)]$$

$$\leqslant \lambda_1^G \int_{\xi=0}^{\infty} [V_K - \tilde{V}(\xi)]\, d[\psi^2(\xi)] = \lambda_1^G \int_{\xi=0}^{\infty} \psi^2(\xi)\, d\tilde{V}(\xi) = \lambda_1^G \iiint_K \tilde{u}^2\, d\tau;$$

nous appliquons le principe de Rayleigh à la fonction $\tilde{u}(\tilde{X})$ *dans K:*

$$\lambda_1^K \leqslant R[\tilde{u}] = \frac{D_K(\tilde{u})}{\iiint_K \tilde{u}^2\, d\tau} \leqslant \lambda_1^G.$$

§4. Une interprétation-démonstration des théorèmes de Rayleigh–Faber–Krahn et de Pólya–Szegö: comparaison de cordes vibrantes inhomogènes de longueur infinie

4.1. Si nous considérons comme connues les surfaces de niveau de la fonction propre fondamentale $u_1(X)$ d'un domaine G (membrane à N dimensions, à frontière fixée), le problème de la vibration fondamentale devient équivalent à celui d'une corde inhomogène de longueur infinie, fixée à son extrémité gauche.

En effet, le quotient de Rayleigh (avec lignes de niveau γ_{μ^-} connues) est, par (1‴),

$$R[f] = \frac{D(f)}{\int_G f^2\, d\tau} = \frac{\int_{\mu^-=0}^{\infty} \left(\frac{d\psi}{d\mu^-}\right)^2 d\mu^-}{\int_{\mu^-=0}^{\infty} \frac{dV}{d\mu^-}\psi^2\, d\mu^-};$$

c'est le quotient de Rayleigh d'une telle corde inhomogène, avec la masse spécifique $\varrho(\mu^-) = dV/d\mu^-$, μ^- *étant simplement l'abcisse.* – La *masse totale* de la corde est $M = \int_{\mu^-=0}^{\infty} \varrho\, d\mu^- = V_G$. – La première valeur propre λ_1 et la première fonction propre $\psi(\mu^-)$ sont les mêmes pour la membrane et pour la corde.

4.2. *Interprétation du théorème de Rayleigh–Faber–Krahn.*

La comparaison entre une membrane G à N dimensions et une membrane dans une boule sphérique B_V (N dimensions aussi) de même N-volume V_G se ramène à la comparaison entre deux cordes inhomogènes (cf. 4.1) d'abcisse μ^-, de masses spécifiques $\varrho(\mu^-)$ et $\tilde{\varrho}(\mu^-)$ respectivement, mais *d'égale masse totale* $M = V_G$: $\lambda_1^G = \lambda_1^\varrho$, $\lambda_1^{B_V} = \lambda_1^{\tilde{\varrho}}$.

La démonstration donnée en 3.5 peut être interprétée ainsi: en vertu du lemme 2.5 (Carleman, Szegö), on a pour toute abcisse ξ:

$$\int_{\mu^-=0}^{\xi} \varrho\, d\mu^- \geqslant \int_{\mu^-=0}^{\xi} \tilde{\varrho}\, d\mu^-, \quad \text{donc aussi} \quad m(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \varrho\, d\mu^- \leqslant \int_{\xi}^{\infty} \tilde{\varrho}\, d\mu^- = \tilde{m}(\xi);$$

$m(0) = M = \tilde{m}(0)$: *on passe de* ϱ *à* $\tilde{\varrho}$ *en déplaçant des masses vers la droite. (Il est intuitif que cela abaisse* λ_1.*)* – On peut, sans modifier le Minimum du quotient de Rayleigh, se restreindre aux fonctions $\psi(\mu^-)$ positives, *monotones* croissantes (le quotient de Rayleigh diminue si l'on remplace partout $d\psi$ par $|d\psi|$); pour chaque telle fonction ψ,

$$\int_{\mu^-=0}^{\infty} \varrho\psi^2\, d\mu^- = \int_{\xi=0}^{\infty} m(\xi)\, d[\psi^2(\xi)] \leqslant \int_{\xi=0}^{\infty} \tilde{m}(\xi)\, d[\psi^2(\xi)] = \int_{\mu^-=0}^{\infty} \tilde{\varrho}\psi^2\, d\mu^-,$$

$$R[\psi] = \frac{\int_0^{\infty} \psi'^2\, d\mu^-}{\int_0^{\infty} \varrho\psi^2\, d\mu^-} \geqslant \frac{\int_0^{\infty} \psi'^2\, d\mu^-}{\int_0^{\infty} \tilde{\varrho}\psi^2\, d\mu^-} = \tilde{R}[\psi]; \quad \text{d'où} \quad \lambda_1^G = \lambda_1^\varrho \geqslant \lambda_1^{\tilde{\varrho}} = \lambda_1^{B_V}.$$

4.3. *Interprétation du théorème de Pólya–Szegö.*

Soit $Q \in G$ tel que $R_Q(G) = \dot{R}$; on compare la membrane à N dimensions dans G, *modifiée par l'imposition des lignes de niveau de* $g(X, Q)$, *ce qui fait augmenter* λ_1, avec la boule sphérique $B_{\dot{R}}$ de rayon $\dot{R}$; cela revient à comparer deux cordes infinies de masses spécifiques ϱ et $\tilde{\varrho}$; la démonstration donnée en 2.7 peut être interprétée ainsi: par le lemme 2.6, on a ici $m(\xi) \geqslant \tilde{m}(\xi)$ (voir 4.2), d'où $\lambda_1^G \leqslant \lambda_1^\varrho \leqslant \lambda_1^{\tilde{\varrho}} = \lambda_1^{B_{\dot{R}}}$.

Conclusion

La transplantation harmonique permet de suppléer, dans certains cas, à la transplantation conforme lorsque celle-ci n'est plus à disposition; tandis que la transplantation par modules, plus souple, ramène l'étude de fonctionnelles de domaines à celle des modules déterminés par les surfaces de niveau des solutions inconnues. – L'idée de la transplantation harmonique est voisine de la méthode de Pólya et Szegö ([9], pp. 100–105) consistant à imposer les lignes de niveau.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Carleman, *Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik*, Math. Z. *1*, 208–212 (1918)
[2] G Faber, *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*, Sitzungsberichte der Bayrischen Akad. der Wiss. *1923*, 169–172.
[3] T. Gasser et J. Hersch, *Über Eigenfrequenzen einer mehrfach zusammenhängenden Membran: Erweiterung von isoperimetrischen Sätzen von Pólya und Szegö*, Z. Angew. Math. Phys. *19*, 672–675 (1968).
[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Pólya, *Inequalities* (Cambridge Univ. Press, 1959).
[5] J. Hersch, *Deux propriétés isopérimétriques des membranes homogènes rectangulaires*, C.R. Acad. Sci. Paris *261*, 2299 (1965).
[6] J. Hersch, *Anwendungen der konformen Abbildung auf isoperimetrische Sätze für Eigenwerte*, Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna (Springer-Verlag, 1966), 25–34.
[7] J. Hersch, «*Transplantation harmonique*» *et extension de théorèmes isopérimétriques*, C.R. Acad. Sci. Paris *266*, 690 (1968).
[8] E. Krahn, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Annalen *94*, 97–100 (1924).
[9] G. Pólya et G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics* (Princeton Univ. Press, 1951).
[10] Lord Rayleigh, *The theory of sound*, 2nd edition (London 1894/96).
[11] G. Szegö, *Über einige Extremalaufgaben der Potentialtheorie*, Math. Z. *31*, 583–593 (1930).

Summary

The "harmonic transplantation" allows to extend some isoperimetric theorems, so far proved by conformal mapping, to higher connectivity and to higher dimensions; for the first eigenvalue λ_1 of a membrane, it again can give only upper bounds. – The "transplantation by moduli" is much more flexible; for example, it leads to a simple one-dimensional interpretation of the Rayleigh–Faber–Krahn theorem.

Reçu le 16 octobre 1968