Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1970)

Artikel: Zur Störungstheorie linearer Operatoren in Banachräumen.
Autor: Hess, Peter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34655

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Störungstheorie linearer Operatoren in Banachräumen

PETER HESS

I. Einleitung und Resultate

1. Es bezeichne T einen selbstadjungierten Operator eines Hilbertraumes H und A einen bezüglich T relativ kompakten Operator. Gohberg und Krein beweisen in ihrem Übersichtsartikel [3], dass das nichtreelle Spektrum von $T+A$ aus isolierten Eigenwerten endlicher algebraischer Vielfachheit besteht (Satz 5.1). Im Beweis dieses Satzes wird wesentlich verwendet, dass ein kompakter Operator eines Hilbertraumes beliebig genau durch degenerierte Operatoren approximiert werden kann.

Die Autoren verallgemeinern ferner dieses Resultat, indem sie von der Möglichkeit gebrauch machen, einen symmetrischen Operator zu einem selbstadjungierten Operator in einem eventuell grösseren Hilbertraum erweitern zu können:

Es sei T ein symmetrischer Operator eines Hilbertraumes H, und es sei A T-kompakt. Dann sind alle nichtreellen Zahlen, mit Ausnahme eventueller isolierter Eigenwerte, Punkte regulären Typs von $T+A$, und die Defektzahlen von T und $T+A$ stimmen (ausser in diesen isolierten Punkten) überein (Satz 9.4).

2. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, entsprechende Sätze für Operatoren in Banachräumen zu formulieren. Wir untersuchen, wann eine unbeschränkte Komponente der Resolventenmenge (bzw. des Regularitätsgebietes) eines abgeschlossenen linearen Operators T eines Banachraumes X bis auf isolierte Punkte invariant ist unter relativ kompakten Störungen. Mit $\mathscr{C}(X)$ bezeichnen wir die Menge der abgeschlossenen linearen Operatoren T des Banachraumes X und mit $\varrho(T)$ die Resolventenmenge von T.

DEFINITION. Eine Folge $\{\lambda_n\}\subset\varrho(T)$ mit $|\lambda_u|\nearrow+\infty$ heisst *Folge minimalen Wachstums* für die Resolvente des Operators $T\in\mathscr{C}(X)$, falls mit einer gewissen Konstanten K für $n=1, 2, \ldots$ gilt

$$\|(T-\lambda_n)^{-1}\| \leqq \frac{K}{|\lambda_n|}. \tag{1}$$

Agmon hat gezeigt, dass die Resolvente für $|\lambda|\nearrow+\infty$ nicht stärker abklingen kann ([1], p. 182, Satz 12.5).

Eine Kombination bekannter Beweismethoden [(3], Satz 5.1, und [6], p. 250) ergibt folgendes Resultat:

Es sei X ein Banachscher Raum derart, dass jeder kompakte Operator in der

Operatornorm beliebig genau durch degenerierte Operatoren approximiert werden kann. Der Operator $T \in \mathscr{C}(X)$ und sein adjungierter Operator T^* seien in X bzw. X^* dicht definiert. Falls eine Komponente der Resolventenmenge $\varrho(T)$ eine Folge minimalen Wachstums enthält, so ist sie bis auf isolierte Punkte eine Komponente von $\varrho(T+A)$, wo A ein T-kompakter Operator ist.

Die Frage, ob in einem beliebigen (oder reflexiven) Banachraum kompakte Operatoren durch degenerierte approximiert werden können, ist unseres Wissens offen[1]). Mit Hilfe einer neuen Beweisidee erhalten wir jedoch Aussagen für *beliebige reflexive* Banachräume. Unser Hauptresultat ist

SATZ 1. *Es sei X ein reflexiver Banachraum und $T \in \mathscr{C}(X)$. Eine Komponente der Resolventenmenge $\varrho(T)$, welche eine Folge minimalen Wachstums enthält, ist bis auf isolierte Punkte eine Komponente von $\varrho(T+A)$, wo A T-kompakt ist. Die isolierten Punkte sind Eigenwerte endlicher algebraischer Vielfachheit des Operators $T+A$.*

Eine Zahl λ heisst *Punkt regulären Typs* des Operators T, falls mit einer Konstanten $c>0$ die Ungleichung $\|(T-\lambda)\,u\| \geqq c\|u\|$ für alle $u \in D(T)$ gilt. Die Menge der Punkte regulären Typs wird *Regularitätsgebiet* von T genannt. Eine Verallgemeinerung von Satz 1 ist

SATZ 2. *Sei X reflexiv, und sei $T \in \mathscr{C}(X)$. Enthält eine Komponente des Regularitätsgebietes von T eine Folge $\{\lambda_n\}$ mit $|\lambda_n| \nearrow +\infty$ und mit der Eigenschaft, dass*

$$\|(T-\lambda_n)u\| \geqq K^{-1}|\lambda_n|\,\|u\| \qquad (K>0) \tag{2}$$

für alle u der Definitionsmenge $D(T)$, so bleibt diese Komponente (bis auf isolierte Punkte) eine Komponente des Regularitätsgebietes von $T+A$, wo A T-kompakt ist. Die Defektzahlen von $T-\lambda$ und $T+A-\lambda$ stimmen überein, falls λ in der gemeinsamen Komponente der Regularitätsgebiete liegt.

BEMERKUNG 1. Falls die betrachtete Komponente des Regularitätsgebietes zur Resolventenmenge gehört, ist eine Folge mit der Eigenschaft (2) Folge minimalen Wachstums für die Resolvente.

BEMERKUNG 2. Beispiele von abgeschlossenen Operatoren im Banachräumen, die Folgen minimalen Wachstums besitzen, findet man z.B. in [6], p. 483–484. Wir führen zwei Kriterien an, wann eine Punktfolge minimalen Wachstums für die Resolvente eines Operators eines *Hilbertraumes H* ist:

---

[1]) Vergleiche dazu die Arbeiten von Maddaus [7] und Phillips [8], in denen gezeigt wird, dass diese Approximation jedenfalls in den Räumen $C[K]$, L^p $(L \leqq p \leqq +\infty)$, L^p $(1 \leqq p \leqq +\infty)$ möglich ist.

(i) Die (konvexe) numerische Wertemenge $\Theta(T)$ des Operators $T \in \mathscr{C}(H)$ sei echte Teilmenge der komplexen Ebene, und im Komplement von $\Theta(T)$ existiere ein regulärer Punkt z von T. Dann gehört jede ausserhalb von $\Theta(T)$ gelegene und z enthaltende offene Halbebene zu $\varrho(T)$. Eine Punktfolge $\{\lambda_n\}$, die auf einem in einer solchen Halbebene enthaltenen und nicht zu deren Berandung parallelen Halbstrahl liegt, ist Folge minimalen Wachstums.

(ii) Es sei $T \in \mathscr{C}(H)$ *normal.* Eine unbeschränkte Folge $\{\lambda_n\} \subset \varrho(T)$ ist Folge minimalen Wachstums für die Resolvente dann und nur dann, wenn es eine positive Konstante c gibt derart, dass alle Kreisscheiben $\{z: |z-\lambda_n| < c|\lambda_n|\}$ in $\varrho(T)$ enthalten sind.

3. Der Beweis der Sätze 1 und 2 beruht wesentlich auf dem vom Autor in [4] aufgestellten

SATZ (A). *Sei X ein reflexiver Banachraum, sei T ein abschliessbarer Operator in X, und sei A T-kompakt. Dann ist A T-beschränkt mit T-Schranke null.*

Dass Satz (A) für nichtabschliessbare Operatoren T nicht richtig sein muss, sieht man, wenn man einem unbeschränkten Operator T mit endlichdimensionaler Wertemenge betrachtet: der Operator $A = T$ ist zwar T-kompakt, hat aber T-Schranke eins. Das folgende Beispiel zeigt, dass im Allgemeinen auch nicht auf die Reflexivität von X verzichtet werden kann:

Es sei $X = C[0, 1]$, $T = d^2/dx^2$ mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \text{i.e.} \quad D(T) = \{u \in X : u(0) = u(1) = 0, \quad u'' \in X\},$$

und es sei

$$A: u \in D(T) \to Au = u''(0).$$

Der Operator A ist T-kompakt mit T-Schranke eins. Der erste Teil dieser Behauptung folgt unmittelbar; für die Abschätzung der T-Schranke verwendet man z.B. die Funktionenfolge $\{u_n(x) = \sin^2(n\pi x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Satz 1 ergibt sich auf Grund der Invarianz der Defektzahlen in Fredholmgebieten ([3], § 3 und Satz 4.2) und unter Verwendung von Satz (A) unmittelbar aus

PROPOSITION 1. *Der abgeschlossene lineare Operator T des Banachraumes X besitze eine Folge $\{\lambda_n\}$ minimalen Wachstums für die Resolvente, d.h. es sei $\|(T-\lambda_n)^{-1}\| \leq K/|\lambda_n|$ für alle n. Ferner sei A ein T-beschränkter Operator mit T-Schranke kleiner $(1+K)^{-1}$. Dann existiert eine Zahl n_0 derart, dass $\{\lambda_n\}_{n>n_0}$ in der Resolventenmenge von $T+A$ enthalten ist.*

Entsprechend genügt es gemäss [3], § 3 oder § 8 für den Beweis von Satz 2, die folgende leichte Verallgemeinerung von Proposition 1 zu zeigen:

PROPOSITION 2. *Es sei* $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_n| \nearrow +\infty$, *eine Folge von Punkten regulären Typs des Operators* $T \in \mathscr{C}(X)$ *derart, dass* $\|(T-\lambda_n)\,u\| \geqq K^{-1}|\lambda_n|\,\|u\|$ *für alle* $u \in D(T)$, *mit einer positiven Konstanten* K. *Falls der Operator* A *T-beschränkt ist mit T-Schranke kleiner* $(1+K)^{-1}$, *so existiert eine Zahl* n_0 *mit der Eigenschaft, dass* $\{\lambda_n\}_{n>n_0}$ *im Regularitätsgebiet von* $T+A$ *liegt.*

4. Im Folgenden untersuchen wir Satz 1 eingehender. Dazu beweisen wir

PROPOSITION 3. *Sei* X *ein Banachraum, und sei* $T \in \mathscr{C}(X)$. *Falls die Resolventenmenge* $\varrho(T+A)$ *nichtleer ist für alle T-kompakten Operatoren* A, *so ist* T *dicht definiert in* X.

Durch Kombination von Satz (A) mit den Propositionen 1 und 3 erhalten wir auf andere Art ein Resultat von Kato [5], das in der Theorie der infinitesimalen Erzeugenden von Halbgruppen von Bedeutung ist:

Es sei X *reflexiv. Der Operator* $T \in \mathscr{C}(X)$ *besitze eine Folge minimalen Wachstums für die Resolvente. Dann ist* T *dicht definiert.*

Satz 1 ist in nichtreflexiven Räumen nicht allgemein richtig, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei $X = C[0, 1]$, $T = d^2/dx^2$ mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$. Das Spektrum von T besteht aus den isolierten Eigenwerten $\mu_n = -\pi^2 n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Jede positive Folge $\lambda_n \to +\infty$ ist Folge minimalen Wachstums für die Resolvente. Der Operator T ist nicht dicht definiert, so dass gemäss Proposition 3 ein T-kompakter Operator A existiert derart, dass $\varrho(T+A)$ leer ist. Ein solcher ist z.B. der Operator, welcher der Funktion $u \in D(T)$ die konstante Funktion $Au = -u''(0)$ zuordnet (vgl. das Beispiel nach dem Beweis von Proposition 3).

Man könnte sich fragen, ob nicht jede unbeschränkte Komponente der Resolventenmenge eines dicht definierten Operators eines reflexiven Raumes invariant ist unter relativ kompakten Störungen. In [2] wurde vom Verfasser folgendes Beispiel konstruiert: ein in einem separablen Hilbertraum dicht definierter Operator T mit kompakter Resolvente und ein T-kompakter Operator A derart, dass $\varrho(T+A)$ leer ist.

BEMERKUNG 3. Nachdem der Autor diese Arbeit zur Publikation eingereicht hatte, teilte ihm R. Beals folgende Variante von Proposition 1 mit:

Der Operator $T \in \mathscr{C}(X)$ *sei dicht definiert und besitze eine Folge* $\{\lambda_n\}$ *minimaler Wachstums für die Resolvente, und der Operator* A *sei T-kompakt. Dann ist* $\{\lambda_n\}_{n>n_0}$ *für geeignetes* n_0 *in der Resolventenmenge von* $T+A$ *enthalten.*

Dieses Resultat verallgemeinert Proposition 1 insofern, als es in beliebigen Banachräumen Gültigkeit hat, währenddem Proposition 1 (in Verbindung mit Satz (A)) nur für T-kompakte Operatoren in reflexiven Räumen Aussagen macht (wobei dann allerdings nicht a priori vorausgesetzt wird, dass T dicht definiert sei). Jedoch lässt sich Beals' Beweismethode nicht auf den Fall von Proposition 2 verallgemeinern.

II. Beweise

5. *Beweis von Proposition* 1. Da

$$T + A - \lambda_n = [1 + A(T - \lambda_n)^{-1}](T - \lambda_n),$$

genügt es, die Existenz einer Zahl n_0 mit $\|A(T-\lambda_n)^{-1}\|<1$ für $n>n_0$ zu beweisen. Nach Voraussetzung ist der Operator A T-beschränkt mit T-Schranke kleiner $(1+K)^{-1}$. Es gibt also Zahlen $a<(1+K)^{-1}$ und $b(a)$ derart, dass $\|Av\|\leq a\|Tv\|+$ $+b(a)\|v\|$ für alle $v\in D(T)$. Für festes n setzen wir $v=(T-\lambda_n)^{-1}u$, $u\in X$. Dann wird

$$\begin{aligned}\|A(T-\lambda_n)^{-1}u\| &\leqq a\|T(T-\lambda_n)^{-1}u\| + b(a)\|(T-\lambda_n)^{-1}u\| \\ &\leqq \|u\|\,[a + a|\lambda_n|\,\|(T-\lambda_n)^{-1}\| + b(a)\,\|(T-\lambda_n)^{-1}\|] \\ &\leqq \|u\|\left[a(1+K) + \frac{b(a)K}{|\lambda_n|}\right]\end{aligned}$$

für alle $u\in X$. Folglich ist

$$\|A(T-\lambda_n)^{-1}\| \leqq a(1+K) + \frac{b(a)K}{|\lambda_n|}.$$

Da $a(1+K)<1$ und $|\lambda_n|\nearrow+\infty$, gibt es eine Zahl n_0 mit der Eigenschaft, dass $\|A(T-\lambda_n)^{-1}\|<1$ für $n>n_0$, q.e.d.

Beweis von Proposition 2. Wir setzen[2]) $R(T-\lambda_n)=X_n$ und erhalten so eine Folge $\{X_n\}$ von Unterräumen von X. Der Operator $T-\lambda_n$, aufgefasst als Abbildung $D(T)\subset X\to X_n$, ist invertierbar, und es gilt

$$T + A - \lambda_n = [j_n + A(T-\lambda_n)^{-1}](T-\lambda_n).$$

Dabei bezeichnet j_n die Einbettung von X_n in X. Wie vorher beweist man, dass die Operatoren $A(T-\lambda_n)^{-1}:X_n\to X$, für grosse n beschränkt sind mit Norm kleiner eins. Für diese n existiert folglich kein von 0 verschiedener Vektor $u\in X_n$ mit $u+A(T-\lambda_n)^{-1}$ $u=0$. Damit ist gezeigt, dass die Operatoren $T+A-\lambda_n$ $(n>n_0)$ invertierbar sind. Da die Wertemenge von $T+A-\lambda_n$ für $n>n_0$ abgeschlossen ist, ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen λ_n $(n>n_0)$ Punkt regulären Typs von $T+A$, q.e.d.

6. Der Beweis von Proposition 3 stützt sich auf das folgende

LEMMA ([3], p. 201, 2°). *Sei X ein Banachraum, $T\in\mathscr{C}(X)$, und $\lambda\in\varrho(T)$. Es sei ferner A ein Operator in X mit $D(A)\supset D(T)$. Dann ist notwendig und hinreichend für die T-Kompaktheit von A, dass der Operator $A(T-\lambda)^{-1}$ kompakt ist.*

---

[2]) $R(T)$ bezeichnet die Wertemenge des Operators T.

Beweis von Proposition 3. Nach Voraussetzung ist die Resolventenmenge $\varrho(T)$ nichtleer. Es sei $\lambda \in \varrho(T)$. Wir nehmen an, dass der Operator T nicht dicht definiert ist und zeigen, dass dann ein T-kompakter Operator A so gefunden werden kann, dass $\varrho(T+A)$ leer ist. Dazu wählen wir einen kompakten Operator B so, dass -1 Punkt des Spektrums von B ist, und dass $R(1+B) \supset D(T)$[3]). Wir setzen $A = B(T-\lambda)$. Gemäss Lemma ist A T-kompakt. Aus der Beziehung

$$T + A - \mu = [1 + A(T-\lambda)^{-1} + (\lambda - \mu)(T-\lambda)^{-1}](T-\lambda)$$

und unserer Wahl von B folgt $R(T+A-\mu) \subset R(1+B)$. Da die Wertemenge $R(1+B)$ echte Teilmenge von X ist, liegen alle Zahlen μ im Spektrum des Operators $T+A$, q.e.d.

BEMERKUNG 4. Es soll noch ein kompakter Operator B mit den im Beweis von Proposition 3 geforderten Eigenschaften konstruiert werden. Der Unterraum $M = \overline{D(T)}$ sei echter Teilraum von X, und es sei $M^{\perp} = \{f \in X^* : (f, u) = 0$ für alle $u \in M\}$. Dann gilt $M = \{u \in X : (f, u) = 0$ für alle $f \in M^{\perp}\}$. Wir wählen ein Funktional $f_1 \in M^{\perp}, f_1 \neq 0$, und setzen $X_1 = \{u \in X : (f_1, u) = 0\}$. Der Unterraum X_1 enthält M und hat Codimension 1, i.e. $X = X_1 \dotplus \{\lambda x_2\}$ mit $x_2 \neq 0$. Es bezeichne P den Projektor auf den eindimensionalen Unterraum $\{\lambda x_2\}$ in Richtung von X_1. Der Operator $B = -P$ genügt nun den gewünschten Bedingungen.

Beispiel. Zum Operator $T = d^2/dx^2$ mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ im Raume $X = C[0, 1]$ konstruieren wir einen T-kompakten Operator A so, dass die Resolventenmenge $\varrho(T+A)$ leer ist. Der Operator $B: u(x) \in X \to -u(0) \in X$ ist kompakt, hat den Eigenwert -1, und erfüllt die Beziehung $R(1+B) \supset D(T)$. Da $0 \in \varrho(T)$, ist somit nach dem Beweis von Proposition 3 $A = BT: u \in D(T) \to -u''(0)$ ein gesuchter Operator.

LITERATUR

[1] Agmon, S., *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand Mathematical Studies Nr. 2, 1965.

[2] Beals, R., *Correction to "Classes of compact operators and eigenvalue distributions for elliptic operators"*, Amer. J. Math. *91* (1969), 200–202.

[3] Gohberg, I. C., und M. G. Krein, *The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators*, Am. Math. Soc. Transl., Serie 2, *13*, 185–264.

[4] Hess, P., *Zur Störungstheorie linearer Operatoren: Relative Beschränktheit und relative Kompaktheit von Operatoren in Banachräumen*, Comment. Math. Helv. *44* (1969), 245–248.

[5] Kato, T., *Remarks on pseudo-resolvents and infinitesimal generators of semi-groups*. Proc. Japan. Acad. *35* (1959), 467–468.

[3]) vgl. die nachstehende Bemerkung 4.

[6] —— *Perturbation theory* (Springer-Verlag, 1966).
[7] MADDAUS, I., *On completely continuous linear transformations*, Bull. Amer. Math. Soc. *44* (1938), 279–282.
[8] PHILLIPS, R. S., *On linear transformations*. Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 516–541.

Eingegangen den 25. September 1969