Über die Darstellung der endlichen Drehgruppen durch Kugelfunktionen.

Autor(en): **Huber, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **45 (1970)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-34672

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über die Darstellung der endlichen Drehgruppen durch Kugelfunktionen

Herrn Andreas Speiser zum 85. Geburtstag von HEINZ HUBER (Basel)

1. Es sei $\mathscr{H}_l$ der Vektorraum über $\mathbf{C}$ der homogenen harmonischen Polynome l-ten Grades des $\mathbf{R}^3$. Jede Drehung $T \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ induziert eine lineare Abbildung $[T]_l : \mathscr{H}_l \to \mathscr{H}_l$, definiert durch

$$[T]_l\, u = u \circ T^{-1}, \qquad u \in \mathscr{H}_l .$$

Es sei nun Γ eine endliche Drehgruppe des $\mathbf{R}^3$. Dann ist die Abbildung

$$T \to [T]_l, \quad T \in \Gamma,$$

eine Darstellung von Γ vom Grade $\dim \mathscr{H}_l = 2l+1$. Wir wollen die Zerlegung dieser Darstellung in irreduzible Komponenten untersuchen. Wir müssen deshalb zuerst ihre Spur

$$\sigma_l(T) = \mathrm{Spur}\,[T]_l$$

berechnen. Dazu führen wir folgende Grösse ein:

$$\vartheta(T) = \operatorname*{Max}_{p \in \Sigma} \varrho(p, Tp);$$

dabei bezeichnet $\varrho(p, q)$ die sphärische Distanz der Punkte p, q auf der Einheitssphäre Σ des $\mathbf{R}^3$. Aus dieser Definition folgt unmittelbar:

$$\vartheta(T^{-1}) = \vartheta(T), \quad \vartheta(S^{-1}TS) = \vartheta(T) \qquad \forall S, T \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{R}).$$

Jetzt zeigen wir:

$$\sigma_l(T^r) = \sum_{k=-l}^{+l} \exp(ikr\vartheta(T)). \tag{1}$$

Beweis: $\mathscr{H}_l$ besitzt bekanntlich folgende ausgezeichnete Basis ([1], ch. IV):

$$\left.\begin{aligned} u_l^{(k)}(x, y, z) = {} & (x+iy)^k (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(|k|-k)} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}(l-|k|)} \\ & \times P_l^{(|k|)}(z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}), \\ & -l \leqslant k \leqslant +l; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dabei ist $P_l^{(|k|)}$ die $|k|$-te Ableitung des l-ten Legendre-Polynoms.

Sei nun $p \in \Sigma$ ein Fixpunkt von T. Dann gibt es ein $S \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ so, dass $\mathrm{Sp} = (0, 0, 1)$. Setzen wir $R = STS^{-1}$, so gilt

$$R : \begin{cases} x + iy \to e^{i\alpha}(x+iy), & 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \\ z \to z \end{cases} \tag{3}$$

$$\vartheta(T) = \vartheta(R) = \mathrm{Min}(\alpha, 2\pi - \alpha). \tag{4}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich sofort

$$[R^r]_l\, u_l^{(k)} = u_l^{(k)} \circ R^{-r} = e^{-irk\alpha} u_l^{(k)}, \; -l \leqslant k \leqslant +l.$$

Somit wird

$$\sigma_l(T^r) = \sigma_l(S^{-1}R^rS) = \operatorname{Spur}[S^{-1}R^rS]_l = \operatorname{Spur}[R^r]_l = \sum_{k=-l}^{l} e^{-irk\alpha}.$$

Daraus und aus (4) folgt die Behauptung (1).

Die Reduktion der Darstellung $T \to [T]_l$ von Γ ist geleistet, wenn es gelingt, für jeden irreduziblen Charakter χ von Γ den Mittelwert

$$n(l, \chi) = M(\sigma_l \bar{\chi}, \Gamma) = \frac{1}{\operatorname{Ord}\Gamma} \sum_{T \in \Gamma} \sigma_l(T)\, \overline{\chi(T)} \tag{5}$$

zu berechnen; nach der Darstellungstheorie ist $n(l, \chi) \geqslant 0$ ganz, und es gilt

$$\sigma_l = \sum_{\chi} n(l, \chi) \cdot \chi,$$

wobei über alle irreduziblen Charaktere von Γ zu summieren ist. Wir leiten nun eine Mittelwertformel für Klassenfunktionen auf Γ her und wenden sie nachher auf die Berechnung von (5) an.

2. Es sei $\nu = \operatorname{Ord}\Gamma \geqslant 2$ und F die Fixpunktmenge der Gruppe Γ auf Σ. Γ wirkt als Permutationsgruppe auf F. Zwei Punkte $p, q \in F$ sollen aequivalent heissen, wenn es ein $T \in \Gamma$ gibt, sodass $q = Tp$. F zerfällt dann in h Aequivalenzklassen $F_1, \ldots, F_h$. Wir wählen in jeder Fixpunktklasse F_j einen festen Repräsentanten p_j und definieren:

$$\Gamma_j = \{T \in \Gamma \mid Tp_j = p_j\}, \qquad \nu_j = \operatorname{Ord}\Gamma_j \geqslant 2, \qquad (j = 1, \ldots, h).$$

Nun ist $F_j = \{Tp_j \mid T \in \Gamma\}$, und zwar gilt $Tp_j = \mathrm{Sp}_j$ genau dann, wenn $S^{-1}T \in \Gamma_j$. Folglich ergibt sich für die Anzahl f_j der Fixpunkte der Klasse F_j die Gleichung

$$f_j = \nu/\nu_j. \tag{1}$$

Nun beweisen wir folgenden

MITTELWERTSATZ: *Für jede Klassenfunktion φ auf Γ gilt:*

$$2M(\varphi, \Gamma) = \sum_{j=1}^{h} M(\varphi, \Gamma_j) - (h-2)\,\varphi(E).$$

Beweis: F enthält mit jedem Punkt p auch den Antipoden $\bar{p}$. Deshalb gibt es eine Zerlegung

$$F = F_0 \cup \bar{F}_0, \qquad F_0 \cap \bar{F}_0 = \emptyset.$$

Setzen wir

$$\Gamma_p = \{T \in \Gamma \mid Tp = p\}, \quad \Gamma'_p = \Gamma_p - \{E\}, \qquad p \in F,$$

so sind offenbar

$$\Gamma' = \bigcup_{p \in F_0} \Gamma'_p, \qquad \Gamma' = \bigcup_{p \in F_0} \Gamma'_p$$

zwei Zerlegungen von $\Gamma' = \Gamma - \{E\}$ in disjunkte Teilmengen. Somit wird

$$\begin{aligned} M(\varphi, \Gamma) &= v^{-1}\varphi(E) + v^{-1} \sum_{p \in F_0} \sum_{T \in \Gamma'_p} \varphi(T) \\ &= v^{-1}\varphi(E) + v^{-1} \sum_{p \in F_0} \sum_{T \in \Gamma'_p} \varphi(T). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} 2M(\varphi, \Gamma) &= 2v^{-1}\varphi(E) + v^{-1} \sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma'_p} \varphi(T) = \\ &= v^{-1}\varphi(E)\Big(2 - \sum_{j=1}^{h} f_j\Big) + v^{-1} \sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nun gibt es zu jedem $p \in F_j$ ein $S \in \Gamma$, sodass $\mathrm{Sp} = p_j$. Dann ist $\Gamma_p = S^{-1}\Gamma_j S$ und somit

$$\sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{T \in \Gamma_j} \varphi(T) = v_j M(\varphi, \Gamma_j) \qquad \forall p \in F_j.$$

Daher wird

$$\sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{j=1}^{h} \sum_{p \in F_j} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{j=1}^{h} f_j v_j M(\varphi, \Gamma_j),$$

also wegen (1):

$$v^{-1} \sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{j=1}^{h} M(\varphi, \Gamma_j).$$

Somit folgt aus (2):

$$2M(\varphi, \Gamma) = v^{-1}\varphi(E)\Big(2 - \sum_{j=1}^{h} f_j\Big) + \sum_{j=1}^{h} M(\varphi, \Gamma_j). \tag{3}$$

Wählen wir speziell $\varphi = 1$, so kommt:

$$2 = v^{-1}\Big(2 - \sum_{j=1}^{h} f_j\Big) + h. \tag{4}$$

Daraus und aus (3) ergibt sich der Mittelwertsatz.

3. Aus (**2.**1) und (**2.**4) folgt noch die Gleichung

$$2(1 - 1/v) = \sum_{j=1}^{h} (1 - 1/v_j). \tag{1}$$

Daraus und aus den Nebenbedingungen $2 \leqslant \nu_j \leqslant \nu$ ergibt sich sofort die wohlbekannte Tatsache, dass nur die folgenden Fälle auftreten können:

I: $h=2$, $\nu_1=\nu_2=\nu \geqslant 2$ (zyklische Gruppe)
II: $h=3$, $2=\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \nu_3$, $\nu_2 \leqslant 3$:
1) $\nu_1=\nu_2=2$, $\nu_3=\nu/2$, $\nu \equiv 0 \bmod 2$ (Diedergruppe)
2) $\nu_1=2$, $\nu_2=\nu_3=3$, $\nu=12$ (Tetraedergruppe)
3) $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=4$, $\nu=24$ (Oktaedergruppe)
4) $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=5$, $\nu=60$ (Ikosaedergruppe).

4. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes können wir nun den gesuchten Mittelwert $n(l, \chi)=M(\sigma_l\bar{\chi}, \Gamma)$ in eine aufschlussreichere Gestalt bringen:

SATZ 1: (a) *Zu jedem irreduziblen Charakter χ von Γ gibt es ein System von h Funktionen auf* $\mathbf{Z}$:

$$k \in \mathbf{Z} \to m(j, k, \chi), \qquad (j = 1, \ldots, h),$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) $2n(l, \chi) = \sum_{j=1}^{h} \sum_{k=-l}^{l} m(j, k, \chi) - (h-2)(2l+1)\chi(E)$,

2) $m(j, k, \chi) \geqslant 0$ *ganz*, $m(j, k, \chi) = m(j, k', \chi)$ *für* $k \equiv k' \bmod \nu_j$,

3) $\sum_{k \bmod \nu_j} m(j, k, \chi) = \chi(E)$

4) $\sum_{j=1}^{h} \sum_{k \bmod \nu_j} m^2(j, k, \chi) = 2 + (h-2)\chi^2(E)$.

(b) *Zum Hauptcharakter χ_0 gehört insbesondere folgendes System:*

$$m(j, k, \chi_0) = \begin{cases} 1 & \textit{für } k \equiv 0 \bmod \nu_j, \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Beweis: Wir wenden den Mittelwertsatz auf die Klassenfunktion $\varphi=\sigma_l\bar{\chi}$ an und erhalten

$$2n(l, \chi) = 2M(\sigma_l\bar{\chi}, \Gamma) = \sum_{j=1}^{h} M(\sigma_l\bar{\chi}, \Gamma_j) - (h-2)(2l+1)\chi(E). \tag{1}$$

Nun ist Γ_j eine zyklische Drehgruppe der Ordnung ν_j; sie besitzt daher eine Erzeugende T_j mit $\vartheta(T_j)=2\pi/\nu_j$. Somit wird nach (**1.1**):

$$M(\sigma_l\bar{\chi}, \Gamma_j) = \nu_j^{-1} \sum_{r \bmod \nu_j} \sigma_l(T_j^r)\overline{\chi(T_j^r)} = \nu_j^{-1} \sum_{r \bmod \nu_j} \left(\sum_{k=-l}^{l} \exp(kr \cdot 2\pi i/\nu_j)\right) \overline{\chi(T_j^r)} =$$

$$= \sum_{k=-l}^{l} \nu_j^{-1} \sum_{r \bmod \nu_j} \chi(T_j^r) \exp(-kr \cdot 2\pi i/\nu_j).$$

Somit folgt aus (1):

$$2n(l,\chi)=\sum_{j=1}^{h}\sum_{k=-l}^{l} m(j,k,\chi)-(h-2)(2l+1)\,\chi(E) \tag{2}$$

mit

$$m(j,k,\chi)=v_j^{-1}\sum_{r \bmod v_j}\chi(T_j^r)\exp(-kr\cdot 2\pi i/v_j). \tag{3}$$

Die zyklische Gruppe Γ_j besitzt genau die folgenden v_j irreduziblen Charaktere:

$$\chi_{jk}\colon T_j^r\to\varepsilon_j^{kr},\qquad \varepsilon_j=\exp(2\pi i/v_j),\qquad (k \bmod v_j).$$

Damit können wir (3) folgendermassen schreiben:

$$m(j,k,\chi)=M(\chi\bar{\chi}_{jk},\Gamma_j). \tag{4}$$

Nun ist aber die Restriktion von χ auf Γ_j die Spur einer (i.a. reduziblen) Darstellung von Γ_j; daher folgt aus (4) nach der Darstellungstheorie:

$$\begin{aligned}&m(j,k,\chi)\geqslant 0 \text{ ganz},\\ &\chi=\sum_{k \bmod v_j} m(j,k,\chi)\cdot\chi_{jk} \text{ auf } \Gamma_j,\end{aligned} \tag{5}$$

also insbesondere

$$\chi(E)=\sum_{k \bmod v_j} m(j,k,\chi).$$

Weiter folgt aus (5):

$$\chi\bar{\chi}=\sum_{k,k' \bmod v_j} m(j,k,\chi)\,m(j,k',\chi)\,\chi_{jk}\bar{\chi}_{jk'} \text{ auf } \Gamma_j,$$

und somit

$$M(\chi\bar{\chi},\Gamma_j)=\sum_{k \bmod v_j} m^2(j,k,\chi). \tag{6}$$

Andererseits ist aber $M(\chi\bar{\chi},\Gamma)=1$. Daraus und aus (6) folgt nach dem Mittelwertsatz

$$\sum_{j=1}^{h}\sum_{k \bmod v_j} m^2(j,k,\chi)=2+(h-2)\,\chi^2(E).$$

Endlich folgt aus (4) noch

$$m(j,k,\chi_0)=\begin{cases}1 & \text{für } k\equiv 0 \bmod v_j,\\ 0 & \text{sonst}.\end{cases}$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

5. Wir wollen jetzt einige unmittelbare Folgerungen aus Satz 1 besprechen. Zunächst ergibt sich sofort

SATZ 2: *Für den Hauptcharakter χ_0 von Γ gilt*

$$n(l, \chi_0) = 1 + \sum_{j=1}^{h} [l/v_j] - (h-2)\, l.$$

Ferner zeigen wir

SATZ 3: *Es sei v_0 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $v_1, \ldots, v_h$. Dann gilt*

$$n(l + v_0, \chi) = n(l, \chi) + 2\frac{v_0}{v}\chi(E).$$

In der Tat folgt aus Satz 1:

$$2n(l + v_0, \chi) - 2n(l, \chi) = \sum_{j=1}^{h} 2\frac{v_0}{v_j}\chi(E) - 2(h-2)\, v_0\chi(E)$$
$$= 2v_0\chi(E)\left(2 - \sum_{j=1}^{h}(1 - 1/v_j)\right).$$

Daraus und aus (**3.1**) folgt aber die Behauptung.

Es bezeichne nun $\bar{l}$ den kleinsten nichtnegativen Rest von $l \bmod v_0$. Dann folgt aus Satz 3:

$$n(l, \chi) = n(\bar{l}, \chi) + 2\frac{v_0}{v}\chi(E)\frac{l - \bar{l}}{v_0} = \frac{2}{v}\chi(E)\, l + 0(1).$$

Somit haben wir

SATZ 4: *Für jeden irreduziblen Charakter χ von Γ gilt*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{n(l, \chi)}{l} = \frac{2}{v}\chi(E).$$

Das Überraschendste ist nun aber, dass man mit dem ersten Satz $n(l, \chi)$ tatsächlich vollständig berechnen kann, und zwar *ohne die irreduziblen Charaktere von Γ a priori zu kennen*; diese lassen sich vielmehr ebenfalls mit Hilfe von Satz 1 auffinden und beschreiben. Wir werden das im folgenden für die Ikosaedergruppe zeigen; die übrigen endlichen Drehgruppen können ganz analog behandelt werden.

6. Es sei jetzt Γ die Ikosaedergruppe. Dann gilt nach **3**: $h=3$, $v_1=2$, $v_2=3$, $v_3=5$, und Satz 1 liefert folgende Aussagen:

$$2n(l, \chi) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=-l}^{l} m(j, k, \chi) - (2l+1)\,\chi(E) \tag{1}$$

$$\sum_{k \bmod 2} m(1, k, \chi) = \sum_{k \bmod 3} m(2, k, \chi) = \sum_{k \bmod 5} m(3, k, \chi) = \chi(E),$$

$$m(j, k, \chi) \geqslant 0 \text{ ganz}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k \bmod v_j} m^2(j, k, \chi) = 2 + \chi^2(E). \tag{3}$$

	$l\equiv 0(2)$	$l\equiv 1(2)$
$\sum_{k=-l}^{l} m(1,k,\chi)$	$l\chi(E)$ $+m(1,0,\chi)$	$(l+1)\chi(E)$ $-m(1,0,\chi)$

	$l\equiv 0(3)$	$l\equiv 1(3)$	$l\equiv 2(3)$
$\sum_{k=-l}^{l} m(2,k,\chi)$	$\frac{2}{3}l\chi(E)$ $+m(2,0,\chi)$	$\frac{1}{3}(2l+1)\chi(E)$	$\frac{2}{3}(l+1)\chi(E)$ $-m(2,0,\chi)$

	$l\equiv 0(5)$	$l\equiv 1(5)$	$l\equiv 2(5)$	$l\equiv 3(5)$	$l\equiv 4(5)$
$\sum_{k=-l}^{l} m(3,k,\chi)$	$\frac{2}{5}l\chi(E)$ $+m(3,0,\chi)$	$\frac{2}{5}(l-1)\chi(E)$ $+\sum_{k=-1}^{1} m(3,k,\chi)$	$\frac{1}{5}(2l+1)\chi(E)$	$\frac{2}{5}(l+2)\chi(E)$ $-\sum_{k=-1}^{1} m(3,k,\chi)$	$\frac{2}{5}(l+1)\chi(E)$ $-m(3,0,\chi)$

Aus (2) ergeben sich zunächst die Tabellen auf Seite 38.

Somit folgt aus (1), dass $n(l, \chi)$ für alle l berechnet werden kann, sobald die fünf Grössen $\chi(E)$, $m(j, 0, \chi)$, $\sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi)$ bekannt sind.

Wir werden nun zeigen:

SATZ 5: (a) Die Ikosaedergruppe besitzt ausser dem Hauptcharakter χ_0 genau vier irreduzible Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_4$, die folgendermassen beschrieben werden können:

1. χ_1 ist Charakter der irreduziblen Darstellung $T \to [T]_1 : \chi_1 = \sigma_1$
2. χ_2 ist Charakter der irreduziblen Darstellung $T \to [T]_2 : \chi_2 = \sigma_2$
3. Die Darstellung $T \to [T]_3$ zerfällt in zwei irreduzible Komponenten mit den Charakteren $\chi_3, \chi_4 : \sigma_3 = \chi_3 + \chi_4$.

(b) Für diese Charaktere gilt folgende Tabelle:

	$\chi(E)$	$m(1, 0, \chi)$	$m(2, 0, \chi)$	$m(3, 0, \chi)$	$\sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi)$
χ_1	3	1	1	1	3
χ_2	5	3	1	1	3
χ_3	3	1	1	1	1
χ_4	4	2	2	0	2

Beweis: 0.) Für $l=0$ folgt aus (1):

$$2n(0, \chi) = \sum_{j=1}^{3} m(j, 0, \chi) - \chi(E). \tag{4}$$

Die Darstellung $T \to [T]_0$ ist aber die Einsdarstellung von Γ, da $\mathscr{H}_0$ aus den konstanten Polynomen 0-ten Grades besteht. Daher ist $n(0, \chi) = 0 \ \forall \chi \neq \chi_0$ und somit folgt aus (4):

$$\sum_{j=1}^{3} m(j, 0, \chi) = \chi(E) \qquad \forall \chi \neq \chi_0. \tag{5}$$

1.) Für $l=1$ ergibt sich aus (1), (2):

$$2n(1, \chi) = \sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi) - m(1, 0, \chi) \leqslant \chi(E). \tag{6}$$

Daher kann die Darstellung $T \to [T]_1$ keine irreduzible Komponente ersten Grades besitzen und ist deshalb wegen $\dim \mathscr{H}_1 = 3$ selbst irreduzibel.

Bezeichnen wir ihren Charakter mit χ_1, so gilt:

$$\chi_1(E) = 3, \ n(1, \chi_1) = 1, \ n(1, \chi) = 0 \qquad \forall \chi \neq \chi_1.$$

Daraus und aus (6) ergibt sich:

$$\sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi_1) = 2 + m(1, 0, \chi_1), \tag{7}$$

$$\sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi) = m(1, 0, \chi) \quad \forall \chi \neq \chi_1. \tag{8}$$

2.) Für $l=2$ ergibt sich aus (1), (2):

$$2n(2, \chi) = m(1, 0, \chi) - m(2, 0, \chi) \leqslant \chi(E). \tag{9}$$

Daraus folgt zunächst:

(a) Die Darstellung $T \to [T]_2$ besitzt keine irreduzible Komponente ersten Grades.

Wir zeigen überdies:

(b) Sie besitzt auch keine irreduzible Komponente vom Grade 2.

Sonst muss es nämlich einen Charakter χ mit $\chi(E)=2$ und $n(2, \chi) \geqslant 1$ geben. Dann folgt aus (9) $m(1, 0, \chi)=2+m(2, 0, \chi) \geqslant 2$ und daher

$$\sum_{k \bmod 2} m^2(1, k, \chi) \geqslant 4.$$

Ausserdem gilt

$$\sum_{k \bmod \nu_j} m^2(j, k, \chi) \geqslant \sum_{k \bmod \nu_j} m(j, k, \chi) = \chi(E) = 2.$$

Somit wird

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{k \bmod \nu_j} m^2(j, k, \chi) \geqslant 4 + 2 + 2.$$

Das widerspricht aber der Gleichung (3).

Wegen $\dim \mathscr{H}_2 = 5$ folgt jetzt aus (a) und (b), dass die Darstellung $T \to [T]_2$ irreduzibel ist. Bezeichnen wir ihren Charakter mit χ_2, so gilt:

$$\chi_2(E) = 5, \qquad n(2, \chi_2) = 1, \qquad n(2, \chi) = 0 \quad \forall \chi \neq \chi_2.$$

Daraus und aus (9) ergibt sich:

$$m(1, 0, \chi_2) = m(2, 0, \chi_2) + 2 \tag{10}$$

$$m(1, 0, \chi) = m(2, 0, \chi) \quad \forall \chi \neq \chi_2. \tag{11}$$

3.) Für $l=3$ ergibt sich aus (1), (2):

$$2n(3, \chi) = \chi(E) - m(1, 0, \chi) + m(2, 0, \chi) - \sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi). \tag{12}$$

Daraus und aus (7), (11) folgt $2n(3, \chi_1)=1-m(1, 0, \chi_1) \leqslant 1$; somit ist

$$n(3, \chi_1) = 0 \tag{13}$$

und $m(1, 0, \chi_1)=1$. Daraus ergibt sich nach (11), (7) und (5) die erste Zeile unserer Tabelle.

Aus (12) und (8) folgt:

$$2n(3, \chi) = \chi(E) - 2m(1, 0, \chi) + m(2, 0, \chi) \quad \forall \chi \neq \chi_1 . \tag{14}$$

Daraus folgt nach (10): $2n(3, \chi_2)=1-m(2, 0, \chi_2)\leqslant 1$. Folglich ist $m(2, 0, \chi_2)=1$. Daraus ergibt sich nach (10), (8) und (5) die zweite Zeile unserer Tabelle.

Aus (14) und (11) ergibt sich:

$$2n(3, \chi) = \chi(E) - m(1, 0, \chi) \leqslant \chi(E) \quad \forall \chi \neq \chi_1, \chi_2 . \tag{15}$$

Daraus folgt zunächst:

(a) Die Darstellung $T \to [T]_3$ besitzt keine irreduzible Komponente ersten Grades. Wir zeigen noch:

(b) Sie besitzt auch keine irreduzible Komponente vom Grade 2. Andernfalls gäbe es einen Charakter χ mit $\chi(E)=2$ und $n(3, \chi)\geqslant 1$. Nach (15) wäre dann $m(1, 0, \chi)=0$. Daraus ergäbe sich einerseits nach (11) und (5): $m(3, 0, \chi)=2$, andererseits aber nach (8): $m(3, 0, \chi)=0$.

Wegen $\dim \mathscr{H}_3=7$ folgt jetzt aus (a) und (b), dass die Darstellung $T \to [T]_3$ entweder in zwei irreduzible Komponenten der Grade 3 und 4 zerfallen muss oder selbst irreduzibel ist. Letzteres ist aber wegen $7^2+\chi_2^2(E)>60$ unmöglich. Bezeichnen wir nun den Charakter der Komponente dritten Grades mit χ_3, denjenigen der Komponente vierten Grades mit χ_4, so gilt wegen (13)

$$\chi_3(E) = 3, \qquad n(3, \chi_3) = 1, \qquad \chi_3 \neq \chi_1 ,$$
$$\chi_4(E) = 4, \qquad n(3, \chi_4) = 1 .$$

Daraus folgt nach (15):

$$m(1, 0, \chi_3) = 1, \qquad m(1, 0, \chi_4) = 2 .$$

Hieraus ergeben sich nach (11), (8) und (5) die beiden letzten Zeilen unserer Tabelle. Wegen

$$\sum_{r=0}^{4} \chi_r^2(E) = 1 + 3^2 + 5^2 + 3^2 + 4^2 = 60$$

ist $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_4$ das vollständige Charakterensystem der Ikosaedergruppe. Damit ist Satz 5 bewiesen.

7. Zum Schluss zeigen wir noch, dass sich aus unseren Überlegungen die Charakterentafel der Ikosaedergruppe mühelos als Nebenprodukt gewinnen lässt. Da $\vartheta(T)$ eine Klassenfunktion auf Γ ist, sind die folgenden 5 Elemente von Γ gewiss paarweise inkonjugiert:

	E	T_1	T_2	T_3	T_3^2
$\vartheta(T)$	0	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$

(T_j = Erzeugende von Γ_j). (1)

Andererseits zerfällt aber Γ in genau 5 Klassen konjugierter Elemente, da es nach Satz 5 gerade 5 irreduzible Charaktere auf Γ gibt. Somit bilden die Elemente (1) ein volles Repräsentantensystem. Aus (**1.1**) ergibt sich sofort folgende Tabelle:

	E	T_1	T_2	T_3	T_3^2
σ_1	3	-1	0	$1+\varepsilon+\varepsilon^{-1}$	$1+\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}$
σ_2	5	1	-1	0	0
σ_3	7	-1	1	$-1-\varepsilon-\varepsilon^{-1}$	$-1-\varepsilon^2-\varepsilon^{-2}$
σ_4	9	1	0	-1	-1

$\varepsilon = \exp(2\pi i/5)$

Nun ist aber nach Satz 5:

$$\sigma_1 = \chi_1, \qquad \sigma_2 = \chi_2, \qquad \sigma_3 = \chi_3 + \chi_4,$$

und man findet mit der Tabelle von Satz 5 sofort die Zerlegung $\sigma_4 = \chi_2 + \chi_4$. Daraus ergibt sich:

$$\chi_1 = \sigma_1, \qquad \chi_2 = \sigma_2, \qquad \chi_3 = \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4, \qquad \chi_4 = \sigma_4 - \sigma_2.$$

Somit erhalten wir folgende Charakterentafel für Γ:

	E	T_1	T_2	T_3	T_3^2
χ_1	3	-1	0	$1+\varepsilon+\varepsilon^{-1}$	$1+\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}$
χ_2	5	1	-1	0	0
χ_3	3	-1	0	$-\varepsilon-\varepsilon^{-1}$	$-\varepsilon^2-\varepsilon^{-2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1

(vergl. [2], p. 184).

LITERATUR

[1] E. W. Hobson: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge 1931, University Press).

[2] A. Speiser: *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Basel und Stuttgart 1956, Birkhäuser).

Eingegangen den 17. April 1970.