Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 46 (1971)

Artikel: Ouverts concaves et théorèmes de dualité pour les systèmes différentiels à coefficients constants

Autor: Malgrange, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35538

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ouverts concaves et théorèmes de dualité pour les systèmes différentiels à coefficients constants

B. MALGRANGE

Avertissement

L'article ci-dessous est la reproduction (à l'addition près de la remarque 5-5) d'un exposé paru dans le Séminaire Leray 1962–1963. Son but est l'extension aux systèmes différentiels à coefficients constants du calcul de la cohomologie à support ponctuel du faisceau des fonctions holomorphes, calcul dû à Frenkel et réutilisé par Andreotti-Grauert dans la théorie des espaces analytiques concaves; en language plus usuel, il s'agit d'examiner ici les théorèmes d'existence, d'approximation et de dualité pour un système différentiel à coefficients constants, dans le complémentaire d'un point, ou plus généralement dans le complémentaire d'un compact convexe.

Divers problèmes plus ou moins voisins de celui traité ici semblent mériter de l'intérêt, par exemple l'étude des «formules de Green» explicitant la dualité obtenue ici et leur extension aux systèmes à coefficients variables; ou encore l'étude de la cohomologie à support dans un fermé non nécessairement compact, cohomologie qui intervient par exemple dans la théorie des «hyperfonctions» de Sato.

1. Introduction

Nous reprenons ici les notations de [12]: A désigne l'anneau des polynomes $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$, $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{D}'$) le faisceau des germes de fonctions indéfiniment dérivables (resp. de distributions) sur $\mathbf{R}^n$; A opère dans $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}'$ par la formule $X_j f = \partial f / \partial x_j$, et X_j a pour transposé $-X_j$.

Si M est un A-module de type fini, nous noterons $\mathscr{E}^M$ (resp. $\mathscr{D}'^M$) le faisceau $Hom_A(M, \mathscr{E})$ (resp. $Hom_A(M, \mathscr{D}')$), en considérant M et A comme des faisceaux constants.

Dans la suite, nous écrirons toujours Hom pour Hom_A, $\otimes$ pour $\otimes_A$ etc.

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$. On sait [12] qu'on a

$$H_c^k(\mathscr{U}; \mathscr{D}'^M) \simeq \mathrm{Ext}^k(M, A) \otimes \mathscr{E}'(\mathscr{U}) \tag{1-1}$$

$$H_c^k(\mathscr{U}; \mathscr{E}^M) \simeq \mathrm{Ext}^k(M, A) \otimes \mathscr{D}(\mathscr{U}) \tag{1-2}$$

où l'indice c désigne la famille des parties compactes de $\mathscr{U}$, et où $\mathscr{E}'(\mathscr{U})$ (resp. $\mathscr{D}(\mathscr{U})$) signifie comme d'habitude $\Gamma_c(\mathscr{U}; \mathscr{D}')$ (resp. $\Gamma_c(\mathscr{U}; \mathscr{E})$).

De la première relation on déduit un accouplement

$$H_c^k(\mathscr{U}; \mathscr{D}'^M) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^k(\hat{M}, A), \mathscr{E}(\mathscr{U})) \to \mathbf{C} \tag{1-3}$$

($\hat{M}$ désigne le symétrique de M par rapport à l'origine) et l'on voit facilement que l'on

peut topologiser cet accouplement en munissant le premier terme d'une topologie d'espace $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ et le second d'une topologie d'espace $(\mathscr{F})$, de façon à faire de cet accouplement une dualité (i.e. chaque terme est le dual vectoriel topologique de l'autre). Nous laisserons au lecteur le soin d'examiner cette question, car nous allons en traiter une voisine, mais plus délicate: indiquons seulement qu'il faudrait définir ces topologies par un procédé analogue au paragraphe 2, et qu'ici ces topologies seraient séparées à cause de [12], théorème 3-2.

De même, en partant de (1, 2), on obtiendra un accouplement

$$H_c^k(\mathscr{U}; \mathscr{E}^M) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^k(\hat{M}, A), \mathscr{D}'(\mathscr{U})) \to \mathbf{C}. \tag{1-4}$$

Mais ici, il se présente des difficultés vectorielles topologiques, que nous n'avons pas résolues.

Soit maintenant K un compact convexe de $\mathbf{R}^n$. Considérant l'accouplement (1-4) pour tous les $\mathscr{U}$ convexes contenant K, et passant à la limite, on obtient un accouplement

$$\varprojlim_{\mathscr{U} \supset K} H_c^k(\mathscr{U}; \mathscr{E}^M) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^k(\hat{M}, A), \mathscr{D}'(K)) \to \mathbf{C}.$$

Rappelons maintenant la définition des «groupes de cohomologie à support dans K» [8]: si $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, K un compact de $\mathscr{U}$ et F un faisceau de groupes abéliens sur $\mathscr{U}$, on désigne par $\Gamma_K(\mathscr{U}; F)$ le groupe des sections de F sur $\mathscr{U}$ à support dans K, et par $H_K^k(\mathscr{U}; .)$ le k-ième foncteur dérivé de $\Gamma_K(\mathscr{U}; .)$ au sens de [7]. Comme $\Gamma_K(\mathscr{U}; .)$ est visiblement exact à gauche, on a $H_K^0(\mathscr{U}; F) \simeq \Gamma_K(\mathscr{U}; F)$; en outre, si $V = \mathscr{U} - K$, rappelons qu'on a une suite exacte illimitée à droite, et dépendant fonctoriellement de F:

$$0 \to H_K^0(\mathscr{U}; F) \to H^0(\mathscr{U}; F) \to H^0(V; F) \to H_K^1(\mathscr{U}; F) \to \cdots.$$

Enfin, si $\mathscr{U}'$ est un autre ouvert avec $K \subset \mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$, on a des isomorphismes fonctoriels en F: $H_K^k(\mathscr{U}; F) \simeq H_K^k(\mathscr{U}', F)$. Pour simplifier l'écriture, nous identifierons ces groupes et les écrirons simplement $H_K^k(F)$.

Cela étant, de l'application définie de façon évidente $H_K^k(F) \to H_c^k(\mathscr{U}, F)$ on déduit une application

$$H_K^k(F) \to \varprojlim_{\mathscr{U} \supset K} H_c^k(\mathscr{U}; F) \tag{1-6}$$

Prenant en particulier $F = \mathscr{E}^M$, et K convexe, on en déduit un accouplement

$$H_K^k(\mathscr{E}^M) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^k(\hat{M}, A), \mathscr{D}'(K)) \to \mathbf{C}. \tag{1-7}$$

L'objet de cet exposé est précisément l'étude de cet accouplement.

Il y aurait lieu évidemment d'étudier aussi l'accouplement analogue déduit de (1-3), mais il se présente des difficultés vectorielles topologiques supplémentaires.

Par ailleurs, le lecteur qui désirerait voir la signification de cette étude pourra commencer par examiner les exemples (paragraphe 5).

Remarque (1-8). On voit facilement que pour $k=0$, (1-6) est un isomorphisme, mais que pour $k>0$, (1-6) est surjectif, mais non injectif en général. Dans le cas où $F=\mathscr{E}^M$, nous dirons plus loin un mot de cette question.

2. Un théorème de dualité

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et M un A-module de type fini. Considérons une résolution libre de M.

$$\cdots \xrightarrow{P^*_2} A^{p_1} \xrightarrow{P^*_1} A^{p_0} \to M \to 0. \tag{2-1}$$

Par application de $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{E}(\Omega))$, on en déduit une suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, \mathscr{E}(\Omega)) \to \mathscr{E}(\Omega)^{p_0} \xrightarrow{P_1} \mathscr{E}(\Omega)^{p_1} \xrightarrow{P_2} \cdots \tag{2-2}$$

et par application de $.\otimes \mathscr{E}'(\Omega)$ une autre suite

$$\cdots \xrightarrow{P^*_2} \mathscr{E}'(\Omega)^{p_1} \xrightarrow{P^*_1} \mathscr{E}'(\Omega)^{p_0} \to \hat{M} \otimes \mathscr{E}'(\Omega) \to 0 \tag{2-3}$$

où le symbole * désigne la transposition, et le symbole ^ la symétrie par rapport à l'origine, ceci pour que (2-2) et (2-3) soient en dualité.

De (2-2), on déduit $\mathrm{Ext}^k(M, \mathscr{E}(\Omega)) \simeq \ker P_{k+1}/\mathrm{im}\, P_k$; comme ker P_{k+1} est muni d'une topologie d'espace $(\mathscr{F})$, $\mathrm{Ext}^k(M, \mathscr{E}(\Omega))$ est muni d'une topologie de quotient *non nécessairement séparé* d'espace $(\mathscr{F})$ en abrégé «$q-\mathscr{F}$»; en utilisant le fait que deux résolutions libres de M sont homotopiquement équivalentes, on voit que cette topologie ne dépend pas de la résolution choisie. Pour $k=0$, on trouve évidemment une topologie séparée.

De même, à partir de la suite (2-3), on munit $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{E}'(\Omega)) \simeq \ker \hat{P}^*_k/\mathrm{im}\, \hat{P}^*_{k+1}$ d'une topologie d'espace $(q-\mathscr{D}\mathscr{F})$, indépendante de la résolution de M choisie (rappelons que $\mathscr{E}(\Omega)$ est un espace de Schwartz, et que, par conséquent, tout sous espace fermé de $\mathscr{E}'(\Omega)$ muni de la topologie induite est un $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ [5]).

PROPOSITION (2-4). *L'accouplement* $\mathrm{Ext}^k(M, \mathscr{E}(\Omega)) \times \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{E}'(\Omega)) \to \mathbf{C}$ *défini par* (2-2) *et* (2-3) *est séparément continu, et met en dualité les séparés associés (i.e. chacun des séparés associés est le dual fort de l'autre). D'autre part* $\mathrm{Ext}^k(M, \mathscr{E}(\Omega))$ *est séparé si et seulement si* $\mathrm{Tor}_{k-1}(\hat{M}, \mathscr{E}'(\Omega))$ *est séparé (cette condition étant vide par définition si* $k=0$*).*

La démonstration de la première assertion est immédiate. Pour la seconde, il suffit de remarquer que l'image de P_k est fermée si et seulement si l'image de $\hat{P}^*_k$ est fermée (d'après (2), et le fait que $\mathscr{E}(\Omega)$ est réflexif).

N.B. Les raisonnements du type précédent se trouvent explicités pour la première fois dans [14] à notre connaissance. Nous leur donnons ici une forme due à A. Martineau.

Posons maintenant $K=\mathbf{R}^n-\Omega$; dans toute la suite, nous supposerons K *compact* (ce qui d'ailleurs ne deviendra utile qu'à partir de (2-7)). On sait (12) qu'on a

$$H^k(\Omega;\mathscr{E}^M)\simeq \mathrm{Ext}^k(M,\mathscr{E}(\Omega)) \quad \text{pour } k\geqslant 0$$

et, en particulier

$$H^k(\mathbf{R}^n;\mathscr{E}^M)=0 \qquad\qquad \text{pour } k\geqslant 1\,.$$

On déduit de là et de la suite exacte des H_K, rappelés dans l'introduction les propriétés suivantes:

On a une suite exacte

$$0\to H_K^0(\mathscr{E}^M)\to \mathrm{Hom}(M,\mathscr{E}(\mathbf{R}^n))\to \mathrm{Hom}(M,\mathscr{E}(\Omega))\to H_K^1(\mathscr{E}^M)\to 0\,. \tag{2-5}$$

Pour $k\geqslant 2$, on a un isomorphisme

$$H_K^k(\mathscr{E}^M)\simeq \mathrm{Ext}^{k-1}(M,\mathscr{E}(\Omega))\,. \tag{2-6}$$

Nous munirons les espaces $H_K^k(\mathscr{E}^M)$ des topologies d'espace $(q-\mathscr{F})$ définies par ces relations (pour $k=0$, cette topologie est évidemment séparée). D'autre part, la proposition (2-4) nous donne leurs duals (i.e. ceux des séparés associés), pour $k\geqslant 2$. Examinons les cas $k=0$ et $k=1$. Nous devons pour cela considérer l'application (déduite de l'injection évidente $\mathscr{E}'(\Omega)\to\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$

$$\hat{M}\otimes\mathscr{E}'(\Omega)\xrightarrow{i}\hat{M}\otimes\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)\,.$$

Nous poserons $N_1=\ker(i)$, $N_0=\mathrm{im}(i)$.

Comme $\hat{M}\otimes\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ est séparé (cela résulte aussitôt de [10], théorème 3-2, ou [12], théorème 3-2), N_0 peut encore être muni d'une topologie d'espace $(q-\mathscr{D}\mathscr{F})$. Pour que N_0 soit séparé, il faut et il suffit que l'image de i soit fermée; comme i est continue (évident), il revient au même de vérifier que l'image de l'application $\tilde{i}$ déduite de i en passant aux séparés est continue; en transposant, on obtient donc ceci:

N_0 est séparé si et seulement si $H_K^1(\mathscr{E}^M)$ est séparé.

Reste à examiner N_1; on a un isomorphisme (algébrique)

$$N_1\simeq \mathscr{E}'(\Omega)^{p_0}\cap \hat{P}_1^*\mathscr{E}'(R^n)^{p_1}/\hat{P}_1^*\mathscr{E}'(\Omega)^{p_1}$$

Comme $\hat{P}_1^*\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)^{p_1}$ est fermé ([10], théorème 3-2), N_1 peut encore être d'une topologie d'espace $(q-\mathscr{D}\mathscr{F})$; il sera séparé si et seulement si $\hat{P}_1^*\mathscr{E}'(\Omega)^{p_1}$ est fermé; en transposant on trouve donc ceci:

N_1 est séparé si et seulement si $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{E}'(\Omega) \simeq H_K^2(\mathscr{E}^M)$ *est séparé.*

On voit encore que ceci a lieu si et seulement si $\hat{M} \otimes \mathscr{E}'(\Omega)$ est séparé; on voit aussi que, dans tous les cas, la topologie que nous venons de définir sur N_1 coïncide avec celleque l'on déduit de l'injection $N_1 \to \hat{M} \otimes \mathscr{E}'(\Omega)$. Enfin, (raisonner comme à la proposition (2-4)) les séparés associés à $H_K^0(\mathscr{E}^M)$ et N_0 (resp. $H_K^1(\mathscr{E}^M)$ et N_1) sont en dualité.

Considérons maintenant la suite exacte (ici, l'hypothèse «K compact» est essentielle)

$$0 \to \mathscr{E}'(\Omega) \to \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{D}'(K) \to 0. \tag{2-7}$$

Tensorisant avec $\hat{M}$, et tenant compte de la platitude de $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ sur A [12], on trouve les résultats suivants

On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(\hat{M}, \mathscr{D}'(K)) \to \hat{M} \otimes \mathscr{E}'(\Omega) \to \hat{M} \otimes \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n) \to \hat{M} \otimes \mathscr{D}'(K) \to 0 \tag{2-8}$$

d'où des isomorphismes (qui seront, par définition, des isomorphismes topologiques)

$$N_0 \simeq \hat{M} \otimes \mathscr{D}'(K)$$

$$N_1 \simeq \mathrm{Tor}_1(\hat{M}, \mathscr{D}'(K)).$$

Pour $k \geqslant 1$, on a des isomorphismes (encore topologiques, par définition)

$$\mathrm{Tor}_{k+1}(\hat{M}, \mathscr{D}'(K)) \simeq \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{E}'(\Omega)). \tag{2-9}$$

Finalement, on obtient le résultat suivant:

THÉORÈME (2-10). *Soit K un compact de* $\mathbf{R}^n$.

a) *Pour tout $k \geqslant 0$, l'accouplement défini par* (2-4)–(2-9)

$$H_K^k(\mathscr{E}^M) \times \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(K)) \to \mathbf{C}$$

est séparément continu et met en dualité les séparés associés.

b) *Pour que $H_K^k(\mathscr{E}^M)$ soit séparé, il faut et il suffit que* $\mathrm{Tor}_{k-1}(\hat{M}, \mathscr{D}'(K))$ *soit séparé (cette condition étant vide par définition si $k=0$).*

3. Quelques considérations vectorielles topologiques

(A) Nous allons étudier la topologie de $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(K))$. Pour cela remarquons que si $\mathscr{U}$ désigne un ouvert, on a un isomorphisme algébrique

$$\mathscr{D}'(K) \simeq \varinjlim_{\mathscr{U} \supset K} \mathscr{D}'(\mathscr{U})$$

d'où un isomorphisme algébrique

$$\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(K)) \simeq \varinjlim_{\mathscr{U} \supset K} \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(\mathscr{U})). \tag{3-1}$$

Si maintenant L est un voisinage compact de K, on considère le dual de $\mathscr{D}(L)$, noté $\widetilde{\mathscr{D}(L)'}$; si $L \subset \mathscr{U}$, on a des applications de restriction évidentes

$$\mathscr{D}'(\mathscr{U}) \to \widetilde{\mathscr{D}(L)'} \to \mathscr{D}'(\mathring{L}).$$

Donc on a encore

$$\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(K)) \simeq \varinjlim_{\mathring{L} \supset K} \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \widetilde{\mathscr{D}(L)'}). \tag{3-2}$$

Nous munirons $\widetilde{\mathfrak{D}(L)'}$ de sa topologie de dual fort de $\mathfrak{D}(L)$; c'est donc un espace $(\mathscr{D}\mathscr{F})$; comme au paragraphe 2, les $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \widetilde{\mathscr{D}(L)'})$ sont alors munis de topologies d'espaces $(q-\mathscr{D}\mathscr{F})$ et leur limite inductive de la topologie de «limite inductive localement convexe». On a alors le résultat suivant:

PROPOSITION (3-3). *L'isomorphisme* (3-2) *est un isomorphisme topologique, lorsque le premier membre est muni de la topologie définie au paragraphe* 2, *et le second de celle qui vient d'être définie.*

Nous nous bornerons à établir ce résultat pour $k \geqslant 2$, en laissant au lecteur le soin d'examiner les cas $k=0, 1$.

Montrons d'abord que l'isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(K)) = \varinjlim_{\mathring{L} \supset K} \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(L))$$

est un isomorphisme vectoriel topologique lorsqu'on munit le second membre de la topologie de limite inductive localement convexe. Posant $\Omega_L = \mathbf{R}^n - L$, cela revient, par définition à établir l'isomorphisme vectoriel topologique

$$\mathrm{Tor}_{k-1}(\hat{M}, \mathscr{E}'(\Omega)) \simeq \varinjlim_{\mathring{L} \supset K} \mathrm{Tor}_{k-1}(\hat{M}, \mathscr{E}'(\Omega_L)).$$

Pour cela, désignons par $N_{k-1}(\Omega)$ le noyau de l'application

$$\mathscr{E}'(\Omega)^{p_{k-1}} \xrightarrow{P^*_{k-1}} \mathscr{E}'(\Omega)^{p_{k-2}}$$

muni de la topologie induite par $\mathscr{E}'(\Omega)^{p_{k-1}}$, et définissons de même $N_{k-1}(\Omega_L)$; on a

évidemment une application continue

$$\varinjlim_{\mathring{L}\supset K} N_{k-1}(\Omega_L) \to N_{k-1}(\Omega)$$

qui est un isomorphisme algébrique. Comme $\mathscr{E}(\Omega)$ est un espace $(\mathscr{F})$ de Schwartz, c'est encore un isomorphisme topologique (cf. [5], théorème 12 et théorème 3). En passant au quotient, on trouve facilement le résultat cherché.

Pour établir (3-3), il suffit maintenant de démontrer ceci:

a) l'application $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(L)) \to \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \overline{\mathscr{D}(L)'})$ est continue

b) si $L' \subset \mathring{L}$, l'application $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \overline{\mathscr{D}(L)'}) \to \mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(L))$ est continue.

Ces deux faits résultent facilement du lemme suivant (détails laissés au lecteur):

LEMME (3-4). *Soit E un espace $(q-\mathscr{F})$ dont le séparé associé est complètement réflexif, E' un espace $(q-\mathscr{D}\mathscr{F})$, et α une forme bilinéaire séparément continue $E \times E' \to \mathbf{C}$ induisant une dualité entre les séparés associés. Soit (F, F', β) un autre système vérifiant les mêmes hypothèses; soit u une application linéaire $E \to F$ et u' une application linéaire $E' \to F'$ transposées l'une de l'autre i.e. vérifiant $\forall e \in E$, $\forall f' \in F'$ $\beta(u(e), f') = \alpha(e, u'(f'))$.*
Alors u et u' sont continues.

Montrons d'abord ceci: si $e \in E$ est adhérent à 0, $u(e)$ est adhérent à 0. En effet, on a alors, $\forall f \in F: \alpha(e, f) = 0$ et ceci caractérise l'adhérence de 0. Pour tout $f' \in F'$, on a donc $\beta(u(e), f') = \alpha(e, u'(f')) = 0$, d'où le résultat. On voit de même que, si $f' \in \bar{0}$, on a $u'(f') \in \bar{0}$.

Pour achever la démonstration, il suffit de démontrer que les applications $\tilde{u}$ et $\tilde{u}'$ déduites de u et u' par passage aux séparés associés sont continues. Or, elles sont transposées l'une de l'autre, donc faiblement continues. Donc (théorème du graphe fermé) $\tilde{u}$ est continue; et, par conséquent, $\tilde{u}'$ est aussi continue. (En fait, l'hypothèse «complètement réflexif» n'est intervenue que parce qu'on supposait chacun des séparés associés $\tilde{E}$, $\tilde{E}'$ dual fort de l'autre. Il suffirait en fait de supposer que E est un espace $(q-\mathscr{F})$ et que $\tilde{E}'$ est le dual de $\tilde{E}$ et de faire les mêmes hypothèses sur F et F'.)

Remarque (3-5). Prenons $M = A$; on voit immédiatement que la topologie qu'on a mise sur $D'(K) \simeq A \otimes \mathscr{D}'(K)$ admet $\overline{\mathscr{D}(K)'}$ pour séparé associé (donc n'est *jamais* séparée elle-même). On pourrait penser à topologiser $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(K))$ en le considérant comme le k-ième groupe de cohomologie de la suite exacte déduite de (2-1) par application de $. \otimes \mathscr{D}'(K)$, et en utilisant la topologie précédente sur $\mathscr{D}'(K)$. On voit facilement que l'on obtient ainsi une topologie plus faible que celle que nous avons précédemment obtenue [utiliser le lemme précédent; l'application «transposée» à

considérer sera la suivante, que nous laissons au lecteur le soin de définir

$$\mathrm{Ext}^k(M, \mathscr{D}(K)) \to H_K^k(\mathscr{E}^M)].$$

Des exemples simples montrent que cette seconde topologie est en général strictement plus faible que la première. Par exemple, si K est un point, le séparé associé à $\mathrm{Tor}_k(M, \mathscr{D}'(K))$ pour la seconde topologie est toujours 0, alors que pour la première, cet espace est séparé si p. ex. M est elliptique! (c.f. paragraphe 4).

(B) En vue d'étudier l'accouplement (1-7), nous allons topologiser $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K))$; pour cela, L étant un compact vérifiant $\mathring{L} \supset K$, nous considérons la suite exacte déduite de (2-1):

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, \widetilde{\mathscr{D}(L)'}) \to \widetilde{\mathscr{D}(L)'}^{p_0} \xrightarrow{P_1} \widetilde{\mathscr{D}(L)'}^{p_1}$$

(naturellement, si nous prolongions cette suite, elle ne serait plus exacte, et conduirait à des Ext que nous n'étudierons pas ici).

On met sur $\mathrm{Hom}(M, \widetilde{\mathscr{D}(L)'})$ la topologie de sous espace de $\widetilde{\mathscr{D}(L)'}^{p_0}$: c'est donc un espace $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ (séparé); et on met sur $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K))$ la topologie localement convexe déduite de l'isomorphisme algébrique

$$\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K)) = \varinjlim_{\mathring{L} \supset K} \mathrm{Hom}(M, \widetilde{\mathscr{D}(L)'}). \tag{3-7}$$

On peut probablement démontrer que $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K))$, muni de cette topologie, est un espace $(q-\mathscr{D}\mathscr{F})$ (nous le vérifierons en tout cas au prochain paragraphe lorsque K est convexe, et lorsque M est un module de torsion, ou bien est sans torsion). Ce qui nous importe ici pour les applications est le résultat suivant:

THÉORÈME (3-8). *L'espace* $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K))$ *est séparé si et seulement si M est elliptique.*

(Rappelons que M est elliptique si, pour tout ouvert Ω, le noyau de l'application $P_1 : \mathscr{E}(\Omega)^{p_0} \to \mathscr{E}(\Omega)^{p_1}$ est formé de fonctions analytiques; pour que M soit elliptique, il faut et il suffit que le support de M n'ait pas de points réels à l'infini [11], [13].)

Tout d'abord, si M est elliptique, le résultat est bien connu; rappelons-en rapidement la démonstration:

On a visiblement un homorphisme topologique (U ouvert)

$$\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K)) \simeq \varinjlim_{U \supset K} \mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(U)).$$

Mais, M étant elliptique, est à fortiori hypoelliptique, d'où un isomorphisme to-

pologique

$$\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K)) \simeq \varinjlim_{U \supset K} \mathrm{Hom}(M, \mathscr{E}(U))$$

(en particulier les éléments de $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K))$ sont des germes sur K de fonctions indéfiniment dérivables, donc analytiques).

Il en résulte que si a est un point de K, $\hat{M} \otimes \mathscr{E}'(a)$ s'envoie dans l'espace des formes linéaires continues sur $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K))$. Prenons alors $f \in \mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K))$; dire que, $\forall a \in K$, ces formes linéaires annulent f signifie que f est nul ainsi que toutes ses dérivées sur K. Par prolongement analytique, f est donc nul.

Réciproquement, supposons que M ne soit pas elliptique. Il existe alors [9], [13] un $f \in \mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n))$ dont le support rencontre K, mais est contenu dans un demi-espace P vérifiant $\mathring{P} \cap K = \emptyset$. L'image $\tilde{f}$ de f dans $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K))$ n'est donc pas nulle; mais f est limite dans $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n))$ d'une suite de ses translatées dont le support ne rencontre pas K. On en déduit aussitôt que toute forme linéaire continue sur $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K))$ annule f; donc f est adhérent à 0. C.Q.F.D.

4. Cas où K est convexe

Nous supposons maintenant K convexe. Je dis qu'alors l'homorphisme canonique (algébrique)

$$M \otimes \mathscr{D}'(K) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, A), \mathscr{D}'(K)) \tag{4-1}$$

est un isomorphisme. En effet, reprenons la résolution (2-1) de M; par application de $\mathrm{Hom}(., \mathrm{A})$, on trouve une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, A) \to A^{p_0} \xrightarrow{P_1} A^{p_1}$$

et par application de $\mathrm{Hom}(., \mathscr{D}'(K))$ on trouve, parce que $\mathscr{D}'(K)$ est injectif [12], la suite exacte

$$\mathscr{D}'(K)^{p_1} \xrightarrow{P^*_1} \mathscr{D}'(K)^{p_0} \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, A), \mathscr{D}'(K)) \to 0$$

comparant avec la suite exacte déduite de (2-1) par application de $. \otimes \mathscr{D}'(K)$, on trouve le résultat cherché.

Dans (4-1), considérons les deux membres comme des foncteurs en M; prenant les foncteurs dérivés, il vient en utilisant encore l'injectivité de $\mathscr{D}'(K)$, des isomorphismes:

$$\mathrm{Tor}_k(M, \mathscr{D}'(K)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, A), \mathscr{D}'(K)) \quad (k \geqslant 0). \tag{4-2}$$

Compte tenu du théorème (2-10), nous avons donc bien obtenu l'accouplement (1-7)

par une autre méthode (le lecteur vérifiera que c'est bien le même). Au point de vue topologique, on a le résultat suivant.

THÉORÈME (4-3). *Les isomorphismes* (4-2) *sont topologiques (lorsque le premier terme est muni de la topologie définie au paragraphe* 2, *et le second de la topologie définie au paragraphe* 3.B*)*.

La proposition (3-3) et la définition (3-7) nous ramènent à comparer deux limites inductives: prenons L et L' convexes avec $K \subset \mathring{L}'$, $L' \subset \mathring{L}$; en utilisant l'isomorphisme (4-2) avec K remplacé par L' et l'homomorphisme de restriction $\widetilde{\mathscr{D}(L)'} \to \mathscr{D}'(L') \to \to \widetilde{\mathscr{D}(L')'}$, on trouvera des applications

$$\mathrm{Tor}_k(M, \widetilde{\mathscr{D}(L)'}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^k(M, A), \widetilde{\mathscr{D}(L')'}) \tag{4-4}$$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^k(M, A), \widetilde{\mathscr{D}(L)'}) \to \mathrm{Tor}_k(M, \widetilde{\mathscr{D}(L')'}) \tag{4-5}$$

et tout revient à démontrer qu'elles sont continues; faisons-le par exemple pour la première; d'après le lemme (3-4), il suffit de définir une application transposée

$$\mathrm{Ext}^k(M, A) \otimes \mathscr{D}(L') \to \mathrm{Ext}^k(M, \mathscr{D}(L))$$

on l'obtient immédiatement en considérant l'application canonique

$$\mathscr{D}(L') \to \mathscr{D}(\mathring{L}) \to \mathscr{D}(L)$$

et en utilisant le fait que, puisque $\mathscr{D}(\mathring{L})$ est plat, on a

$$\mathrm{Ext}^k(M, \mathscr{D}(\mathring{L})) \simeq \mathrm{Ext}^k(M, A) \otimes \mathscr{D}(\mathring{L}) \qquad \text{(cf. introduction)}.$$

Combinant les théorèmes (2-10), (3-8) et (4-3), nous obtenons finalement le résultat suivant

THÉORÈME (4-4). *Si K est un compact convexe:*

a) *l'accouplement* (1-7) *est séparément continu et met en dualité les séparés associés aux deux termes (dont les topologies ont été définies aux paragraphes* 2 *et* 3*)*.

b) $H_K^0(\mathscr{E}^M)$ *est séparé, et, pour* $k \geqslant 1$, *les propriétés suivantes sont équivalentes*

1 – $H_K^k(\mathscr{E}^M)$ *est séparé*

2 – $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^{k-1}(M, A), \mathscr{D}'(K))$ *est séparé*

3 – $\mathrm{Ext}^{k-1}(M, A)$ *est elliptique.*

Remarque (4-5). Pour $k=1$, les conditions précédentes signifient que M est sans torsion (ou si l'on préfère, que c'est «un système surdéterminé»). En effet $\mathrm{Hom}(M, A)$ est toujours sans torsion, et un module elliptique est un module de torsion, donc on doit avoir $\mathrm{Hom}(M, A)=0$.

Remarque (4-6). Dans le cas où K est un compact quelconque et où $F=\mathscr{E}^M$ on peut voir par dualité que le noyau de l'application (1-6) est adhérent à 0 dans $H_K^k(\mathscr{E}^M)$. Il en résulte que, si $H_K^k(\mathscr{E}^M)$ est séparé, (1-6) est un isomorphisme. D'autre part, korsque K est convexe, on peut voir que le noyau de (1-6) *coincide* avec l'adhérence de 0 dans $H_K^k(\mathscr{E}^M)$, et que, par conséquent, (1-6) est bijectif *si et seulement si* $H_K^k(\mathscr{E}^M)$ est séparé.

Remarque (4-7). Soient K et L deux compacts avec $K\subset L$. Considérons l'application $H_K^k(\mathscr{E}^M)\to H_L^k(\mathscr{E}^M)$ déduite de l'injection évidente $H_K^0(.)\to H_L^0(.)$ par passage aux foncteurs dérivés. Pour que l'image de cette application soit dense, il faut et il suffit que la «transposée» $\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(L))\to\mathrm{Tor}_k(\hat{M}, \mathscr{D}'(K))$ ait un noyau adhérent à 0. Supposons en particulier K et L convexes; en utilisant l'isomorphisme (4-3), on voit que ceci aura lieu si $\mathrm{Ext}^k(M, A)$ est elliptique. En traduisant le résultat précédent au moyen des isomorphismes (2-5) et (2-6), on en déduit un théorème d'approximation dans Ω qui généralise des théorèmes connus, du type de Runge.

5. Exemples

Exemple 1. Soit $P\in A$, $P\neq 0$. Prenons $M=A/AP$. On a une résolution de M:

$$0\to A\xrightarrow{P} A\to M\to 0$$

d'où immédiatement $\mathrm{Ext}^1(M, A)\simeq M$. D'autre part $\mathscr{E}^M$ est ici le faisceau des germes de solutions de l'équation $Pf=0$. On trouve alors ceci (tout est nul pour $k>2$).

$$\text{A)}\quad\begin{cases} H_K^0(\mathscr{E}^M)=0\\ H_K^1(\mathscr{E}^M)\simeq \mathrm{coker}\,\{\mathscr{E}^M(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{E}^M(\Omega)\}\\ H_K^2(\mathscr{E}^M)\simeq\mathscr{E}(\Omega)/P\mathscr{E}(\Omega).\end{cases}$$

$$\text{B)}\quad\begin{cases} \mathrm{Tor}_0(\hat{M}, \mathscr{D}'(K))=0 & \text{donc } H_K^1(\mathscr{E}^M) \text{ est séparé (ce qui était évident à priori).}\\ \mathrm{Tor}_1(\hat{M}, \mathscr{D}'(K))=\mathrm{Hom}(\hat{M}, \mathscr{D}'(K)) & \text{est séparé si et si seulement } M \text{ est elliptique.}\\ \mathrm{Tor}_2(\hat{M}, \mathscr{D}'(K))=0 & \text{donc le séparé associé à } H_K^2(\mathscr{E}^M) \text{ est nul (évident à priori).}\end{cases}$$

Finalement on obtient les résultats suivants:

C) $P\mathscr{E}(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$ si et seulement si P est elliptique (cf. [9], chap. 3).

D) On a un accouplement $\mathscr{E}^M(\Omega)\times\mathrm{Hom}(\hat{M}, \mathscr{D}'(K))$, nul sur $\mathrm{im}\,\{\mathscr{E}^M(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{E}^M(\Omega)\}$ qui n'est autre que l'accouplement défini par la formule de Green. Voir une étude de ce genre de questions dans [6], par example.

Remarquons encore qu'ici, l'hypothèse «K convexe» est inutile, (on le voit en établissant directement les résultats précédents).

Example 2. Supposons M de torsion et $\mathrm{Ext}^1(M, A)=0$.
Alors, si K est un compact convexe, on aura

$H_K^0(\mathscr{E}^M) = H_K^1(\mathscr{E}^M) = 0$. Autrement dit l'application

$\mathscr{E}^M(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{E}^M(\Omega)$ est bijective. Ici encore l'hypothése «K convexe»

est inutile, il suffirait que $\complement K$ n'ait pas de composantes connexes relativement compactes (i.e. soit connexe). Cette question est étudiée dans [3]. (C'est d'ailleurs ce travail qui est à l'origine du présent exposé.)

Remarquons que, dans [11] et [12], nous avions établi ceci: sous la seule hypothèse $\mathrm{Ext}^1(M, A)=0$, si $\mathscr{U}$ est un ouvert convexe relativement compact, l'application $\mathscr{E}^M(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{E}^M(\mathbf{R}^n - \mathscr{U})$ est surjective. L'hypothèse «M de torsion» permet ici de passer à la limite suivant les voisinages $\mathscr{U}$ de K.

Exemple 3. Supposons $\mathrm{Ext}^1(M, A)$ elliptique et $\mathrm{Ext}^2(M, A)=0$. Pour K compact convexe, on a alors $H_K^2(\mathscr{E}^M)=0$; autrement dit $\mathrm{Ext}^1(M, \mathscr{E}(\Omega))=0$; donc (cf. (2-2)) tout $f \in \mathscr{E}(\Omega)^{p_1}$ vérifiant $P_2 f=0$ est de la forme $P_1 g$, $g \in \mathscr{E}(\Omega)^{p_0}$

Le même phénomène se produit ici ainsi que dans l'exemple précédent: en supposant seulement $\mathrm{Ext}^2(M, A)=0$, on aurait ce résultat avec Ω remplacé par $\mathbf{R}^n - \mathscr{U}$; l'autre hypothèse permet le passage à la limite.

Exemple 4. Supposons M elliptique. Alors, tous les $\mathrm{Ext}^k(M, A)$ sont elliptiques (en effet, on sait que le support de $\mathrm{Ext}^k(M, A)$ est toujours contenu dans celui de M). Par conséquent, dans ce cas, tout les espaces intervenant dans le théorème (4-4) sont séparés.

Prenons en particulier $n=2m$, et identifions $\mathbf{C}^m$ à $\mathbf{R}^n$ en posant $z_j = x_j + i x_{m+j}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$; prenons pour M le quotient de A par l'idéal engendré par les $X_j + i X_{m+j}$; $\mathscr{E}^M$ s'identifie alors au faisceau des germes de fonctions holomorphes $\mathscr{O}$.

On a (calcul immédiat) $\mathrm{Ext}^k(M, A)=0$ si $k \neq m$, $\mathrm{Ext}^m(M, A) \simeq M$. On trouve donc ici, pour K compact convexe

$$H_K^k(\mathscr{O}) = 0 \quad \text{si } k \neq m.$$

$H_K^m(\mathscr{O})$ est séparé, et son dual est isomorphe à $\mathrm{Hom}(M, \mathscr{D}'(K)) \simeq \mathscr{O}(K)$. Si maintenant F est un faisceau analytique cohérent au voisinage de K, on trouve en prenant une résolution libre de F une dualité

$$H_K^k(\mathscr{O}) \times \mathrm{Ext}^{m-k}(K; F, \mathscr{O}) \to \mathbf{C}$$

(en fait, il suffirait ici de supposer que K est un compact possédant un système fondamental de voisinages ouverts d'holomorphie). Ces résultats sont dus à Frenkel [4] et Grothendieck (non publié); comparer avec le cas «algébrique», traité dans [8], et avec certains résultats d'Andreotti-Grauert [1].

Remarque (5-1). La réciproque du résultat énoncé au début de l'exemple 4 est vraie: si tous les $\mathrm{Ext}^k(M, A)$ sont elliptiques, alors M est elliptique (ceci se voit facilement à l'aide d'un argument de suite spectrale; voir p. ex. B. Malgrange, *Some remarks on the notion of convexity for differential operators*, (Colloquium on Differential Analysis, Tata Institute, Bombay, 1964)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI, A. et GRAUERT, H., *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France *90* (1962), 193–259.
[2] DIEUDONNÉ, J. et SCHWARTZ, L., *La dualité dans les espaces* $(\mathscr{F})$ *et* $(\mathscr{LF})$, Ann. Inst. Fourier (1949), 61–101.
[3] EHRENPREIS, L., *A new proof and extension of Hartog's theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. *67* (5) (1961), 507–509.
[4] FRENKEL, J., *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés*, Bull. Soc. Math. France *85* (1957), 135–230.
[5] GROTHENDIECK, A., *Sur les espaces* $(\mathscr{F})$ *et* $(\mathscr{LF})$, Summa Brasil. Math. *3* (1954), 57–123.
[6] GROTHENDIECK, A., *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles*, J. Anal. Math. Jérusalem *II* (1952/53), 243–280.
[7] GROTHENDIECK, A., *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohokû Math. Journal (1957), 120–221.
[8] GROTHENDIECK, A., *Local cohomology*, notes by R. Hartshorne, (Harvard University, 1961).
[9] HÖRMANDER, L., *Linear partial differential operators*, (Springer, 1963).
[10] MALGRANGE, B., *Sur les systèmes différentiels à coefficients constants*, Séminaire J. Leray 1961/62 et Colloque sur les équations aux dérivées partielles, (C.N.R.S., Paris, 1962).
[11] MALGRANGE, B., *Sur les systèmes différentiels à coefficients constants* (suite), Séminaire J. Leray 1961/62.
[12] MALGRANGE, B., *Systèmes différentiels à coefficients constants*, Séminaire Bourbaki, décembre 1962.
[13] MATSUURA, S., *On general systems of partial differential operators with constant coefficients*, J. Math. Soc. Japan *13* (1) (1961), 94–103.
[14] SERRE, J. P., *Un théorème de dualité*, Comment. Math. Helv. *29* (1955), 9–26.

Reçu le 5 mars, 1971