Über einige Invarianzeigenschaften der Eulerschen Charakteristik

Autor(en): **Groemer, Helmut**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **48 (1973)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37146

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über einige Invarianzeigenschaften der Eulerschen Charakteristik

HELMUT GROEMER [1])

1.

In einer unlängst erschienenen Arbeit (Groemer [1]) wurde für eine grosse Klasse reellwertiger Funktionen, die im euklidischen n-dimensionalen Raum R^n definiert sind, eine „Eulersche Charakteristik" eingeführt. Die für gewisse Punktmengen des R^n definierte Eulersche Charakteristik ergibt sich innerhalb der dort dargelegten Theorie durch Spezialisierung auf die charakteristischen Funktionen dieser Mengen. Diese Untersuchung, die weitgehend durch Ideen von Hadwiger angeregt wurde (siehe etwa [2] und auch die Arbeiten von Klee [3] und Lenz [4]), verzichtet auf die mit der Eulerschen Charakteristik im Zusammenhang stehenden topologischen Methoden. Das wichtigste Hilfsmittel ist dabei vielmehr eine Verallgemeinerung des Begriffs der Orthogonalprojektion. Damit ergibt sich die Möglichkeit, das grundlegende Resultat zu beweisen, dass die Eulersche Charakteristik gegenüber derartigen Projektionen invariant ist. Die Klasse derjenigen Funktionen, die dabei erfasst werden können, wird nach Einführung einer Norm durch einen Approximationsprozess gewonnen.

In der vorliegenden Arbeit soll vor allem die Invarianz gegenüber affinen Transformationen untersucht werden. Da die Charakteristik eine topologische Invariante ist, handelt es sich dabei zum Teil um ein bekanntes Ergebnis. Andrerseits dürften die elementaren geometrischen Methoden, sowie die Einbeziehung von singulären Affinitäten und die Verallgemeinerungen von Punktmengen auf Funktionen von Interesse sein. Weil singuläre Affinitäten nicht ausgeschlossen werden, enthält die Affininvarianz sowohl die Invarianz gegenüber isometrischen Transformationen wie auch die schon genannte Projektionsinvarianz. Eine weitere Invarianzeigenschaft der Charakteristik ist die Unabhängigkeit von dem Raum in dem man sich die Punktmengen eingebettet denkt. Diese Eigenschaft, die sinngemäss auf Funktionenklassen erweitert werden kann, wird hier ebenfalls untersucht. Die diesbezügliche Invarianzaussage ist keineswegs selbstverständlich, da der zugrunde liegende Raum in den Definitionen von Norm und Charakteristik eingeht. Die Affininvarianz wird dabei wesentlich verwendet; man kann aber auch umgekehrt die Affininvarianz aus der Einbettungsinvarianz gewinnen.

---

[1]) Der Verfasser wurde während der Durchführung dieser Arbeit von der National Science Foundation finanziell unterstützt (Research Grant GP-34002).

2.

Für eine eingehendere Diskussion der Definitionen und Ergebnisse, die in diesem Abschnitt besprochen werden, und für alle zugehörigen Beweise muss auf [1] verwiesen werden.

Wenn hier von einer Ebene im R^n die Rede ist, so ist stets eine Hyperebene gemeint. Allgemeiner wird eine k-dimensionale affine Teilmannigfaltigkeit des R^n eine k-Ebene genannt. Ist F eine im R^n definierte reelle Funktion und bedeutet S eine Teilmenge des R^n, so werde mit $F \wedge S$ die Beschränkung von F auf S bezeichnet. $F \wedge S$ stimmt also auf S mit F überein und ist ausserhalb S überhaupt nicht definiert.

Es sei nun F eine im R^1 definierte Funktion, die nur endlich viele Unstetigkeitsstellen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ hat. Es werde zudem angenommen, dass für jeden Punkt q des R^1 die Grenzwerte

$$F^+(q) = \lim_{x \to q+0} F(x), \qquad F^-(q) = \lim_{x \to q-0} F(x)$$

existieren. Durch den Ansatz

$$\chi(F) = \sum_{i=1}^{m} \left(F(q_i) - \tfrac{1}{2}(F^+(q_i) + F^-(q_i))\right) \tag{1}$$

wird dann für jede solche Funktion F eine *Charakteristik* definiert. Diese Definition überträgt sich sofort auf Funktionen, die auf einer im R^n enthaltenen Geraden definiert sind.

Der Vollständigkeit halber werde noch für Funktionen, die nur in einem einzigen Punkt q definiert sind $\chi(F) = F(q)$ gesetzt. Es sei nun H eine Ebene im R^n und F eine im ganzen R^n definierte Funktion mit der Eigenschaft, dass für jede zu H orthogonale Gerade G die Funktion $F \wedge G$ den vorhin bei der Definition der Charakteristik im R^1 genannten Bedingungen genügt. p_H bedeute die Orthogonalprojektion des R^n auf H. Für jedes x aus H ist dann $p_H^{-1}(x)$ diejenige zu H orthogonale Gerade, die x enthält. Jedem Punkt x in H kann demnach der Funktionswert $\chi(F \wedge p_H^{-1}(x))$ zugeordnet werden. Die dadurch auf H definierte Funktion, die die Projektion von F auf H genannt werden soll, wird hier mit $\pi_H(F)$ bezeichnet. Es gilt also für alle $x \in H$

$$(\pi_H F)(x) = \chi(F \wedge p_H^{-1}(x)). \tag{2}$$

Ist F die charakteristische Funktion eines kompakten konvexen Körpers, so stimmt dieser Projektionsbegriff, wenn man zwischen einer Menge und deren charakteristischer Funktion keinen Unterschied macht, mit der üblichen Projektion eines konvexen Körpers überein.

Mit Hilfe der soeben eingeführten Projektion lässt sich für eine gewisse Klasse von Funktionen im R^n durch die Beziehung

$$\|F\|_n = \max\left\{\int_{R^n} |F|\, d\mu^n, \sup_H \|\pi_H F\|_{n-1}\right\} \tag{3}$$

induktiv eine Norm definieren. Dabei bedeutet μ^n das Lebesguesche Mass im R^n und H durchläuft alle Ebenen des R^n. Im $R^0=\{o\}$ werde $\|F\|_0=|F(o)|$ gesetzt. Um $\|\pi_H F\|_{n-1}$ zu berechnen ist H als R^{n-1} aufzufassen. Ebenfalls induktiv werde festgesetzt, dass eine im R^n definierte beschränkte Funktion, die ausserhalb eines beschränkten Bereiches verschwindet *normierbar* genannt werden soll, wenn F Lebesgue integrierbar ist, für jede Ebene H die Projektion $\pi_H F$ existiert und normierbar ist und $\|F\|_n$ endlich ist. Im R^0 sei jede reelle Funktion normierbar. Die Klasse aller normierbaren Funktionen im R^n bildet einen linearen Funktionenraum und $\| \ \|_n$ ist eine Pseudonorm (s. etwa Royden [5], S. 183) auf diesem Raum.

Beispiele normierbarer Funktionen sind die in [1] eingehend behandelten *bewerteten Polytope*. Das sind Funktionen der Form $a_1C_1+a_2C_2+\cdots+a_mC_m$, wobei die a_i reelle Zahlen sind und die C_i charakteristische Funktionen kompakter konvexer Polytope. Eine normierbare Funktion F heisse *approximierbar*, wenn es eine Folge bewerteter Polytope P_k gibt, so dass $\lim_{k\to\infty} \|P_k-F\|_n=0$ ist, und wenn zudem für jede Ebene H des R^n die Funktion $F\wedge H$ ebenfalls approximierbar ist. Dabei hat man H wider als R^{n-1} aufzufassen, so dass eine sinnvolle induktive Definition vorliegt. Im R^0 sei natürlich jede reelle Funktion approximierbar. Anstatt $\lim_{k\to\infty} \|F_k-F\|_n=0$ werde einfacher $F_k \Rightarrow F$ geschrieben. Die Menge aller im R^n definierten approximierbaren Funktionen bildet einen linearen Funktionenraum über den reellen Zahlen, der mit $\mathbf{A}^n$ bezeichnet werden soll. χ ist ein auf $\mathbf{A}^n$ definiertes lineares Funktional, das für (nicht leere) kompakte konvexe Polytope (d.h. für deren charakteristische Funktionen) den Wert 1 hat und in dem Sinne stetig ist, dass aus $F_k \Rightarrow F$ die Beziehung $\lim_{k\to\infty} \chi(F_n)=\chi(F)$ folgt. Man kann beweisen, dass χ durch diese Eigenschaften vollständig charakterisiert ist ([1], Satz 3). Es zeigt sich zudem, dass für jede Ebene H aus $F\in\mathbf{A}^n$, wenn H als R^{n-1} aufgefasst wird, $\pi_H F\in\mathbf{A}^{n-1}$ folgt, und die Projektionsinvarianz

$$\chi(\pi_H F) = \chi(F) \tag{4}$$

besteht.

Bekanntlich kann man allgemeiner Orthogonalprojektionen des R^n auf k-Ebenen ($k=1, 2, \ldots, n$) einführen. Ist p_H eine solche Abbildung des R^n auf eine k-Ebene H, so lässt sich, ebenfalls durch die Beziehung (2), eine zugehörige Projektion π_H von Funktionen definieren. $p_H^{-1}(x)$ ist in diesem Falle eine $(n-k)$-Ebene. Durch π_H wird $\mathbf{A}^n$ auf $\mathbf{A}^k$ abgebildet (siehe [1], Abschnitt 10).

Es sei nun s eine affine Abbildung des R^n auf eine k-Ebene H, wobei k einen der Werte $0, 1, 2, \ldots, n$ haben kann. Ähnlich wie bei Projektionen lässt sich zu s eine für die approximierbaren Funktionen definierte Transformation σ erklären. Man bemerke dazu, dass $s^{-1}(x)$ für $x \in H$ eine $(n-k)$-Ebene ist und daher, wie aus der Definition der Approximierbarkeit unmittelbar folgt, für $F \in \mathbf{A}^n$ stets $F \wedge s^{-1}(x) \in \mathbf{A}^{n-k}$ sein muss. Analog zu (2) kann man daher durch

$$(\sigma F)(x) = \chi(F \wedge s^{-1}(x)) \tag{5}$$

eine auf H erklärte Funktion σF definieren. Ist s insbesondere eine Projektion des R^n auf H, so stimmt (5) mit (2) überein. σ werde die zu s gehörige Funktionentransformation genannt. Ist $k=n$, also $H=R^n$ und demnach s nicht singulär, so ist $s^{-1}(x)$ ein Punkt und daher $\chi(F \wedge s^{-1}(x)) = F(s^{-1}(x))$. Anstatt (5) kann daher in diesem Falle die transformierte Funktion σF durch

$$(\sigma F)(x) = F(s^{-1}(x)) \tag{6}$$

definiert werden.

3.

Der folgende Satz enthält das Hauptergebnis dieser Arbeit.

SATZ 1. *Bedeutet s eine affine Abbildung des R^n auf eine k-Ebene $H(k=0, 1, \ldots n)$, so gibt es genau eine Abbildung σ der im R^n definierten approximierbaren Funktionen auf die auf H definierten approximierbaren Funktionen (als Funktionen im R^k aufgefasst), so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

(a) *σ ist linear,*

(b) *σ ist stetig, d.h. aus $F_n \Rightarrow F$ $(F_n \in \mathbf{A}^n, F \in \mathbf{A}^n)$ folgt $\sigma F_n \Rightarrow \sigma F$.*

(c) *σ stimmt für kompakte konvexe Polytope (repräsentiert durch deren charakteristische Funktionen) mit der üblichen durch s definierten affinen Abbildung überein.*

Ausserdem hat die Abbildung σ noch die Eigenschaft, dass sie durch (5) *definiert werden kann und dass*

$$\chi(\sigma F) = \chi(F) \tag{7}$$

gilt.

Es ist noch zu bemerken, dass in (7) links die auf $\mathbf{A}^k$ und rechts die auf $\mathbf{A}^n$ definierte Charakteristik gemeint ist.

Die Beziehung (7) enthält u.a. sowohl die Invarianz gegenüber isometrischen Transformationen wie auch die durch (4) ausgedrückte Projektionsinvarianz. Diese

beiden Eigenschaften wurden schon in [1] untersucht. Ausserdem enthält Satz 1 noch eine Kennzeichnung der Projektionen und, wenn $k=0$ ist, eine Kennzeichnung der Charakteristik, auf die ebenfalls schon in [1] (Satz 4 bzw. Satz 3) hingewiesen wurde.

Noch eine weitere Folgerung aus obigem Satz soll hier erwähnt werden. Es sei dazu s eine affine Abbildung des R^n auf eine k-Ebene H und t eine affine Abbildung von H (als R^k aufgefasst) auf eine l-Ebene E. Sind σ und τ die zu s bzw. t gehörigen Funktionentransformationen, so ist zu erwarten, dass dann zu der affinen Abbildung ts die Funktionentransformation $\tau\sigma$ gehört. (Mit ts, $\tau\sigma$ etc. ist hier und in ähnlichen Fällen natürlich nicht das Produkt sondern die übliche Komposition der Funktionen gemeint). Diese Tatsache kann aber aus der Definition (5) nicht ohne weiteres abgelesen werden. Satz 1 zeigt jedoch, weil sowohl $\tau\sigma$ wie auch die zu ts gehörige Funktionentransformation den dort angeführten Bedingungen genügt, die Gleichheit dieser beiden Funktionale.

Um die Nützlichkeit dieses Resultats hervorzuheben, soll das folgende Beispiel erwähnt werden. Es werde angenommen, dass (mit den vorhin gewählten Bezeichnungen) $E=\{o\}$ nulldimensional sei. Wird dann $r=ts$ gesetzt und bedeutet ϱ die zu r gehörige Funktionentransformation, so ist wegen (5), da $r^{-1}(o)=R^n$ gilt, $(\varrho F)(o)=\chi(F)$. Ebenso findet man $\tau(\sigma F)(o)=\chi(\sigma F)$. Aus der Zugehörigkeit von $\tau\sigma$ zu ts, d.h. aus $\varrho=\tau\sigma$, folgt dann

$$\chi(F) = (\varrho F)(o) = (\tau(\sigma F))(o) = \chi(\sigma F). \tag{8}$$

Die Affininvarianz (7) folgt also aus den vorhergehenden Aussagen des Satzes.

Der zweite Satz, der hier bewiesen werden soll, bezieht sich auf den Fall, dass F eine im R^n definierte Funktion ist, die ausserhalb einer gegebenen k-Ebene H verschwindet. F ist dann durch die Beschränkung $F\wedge H$ vollkommen festgelegt. Wird H als R^k aufgefasst, so soll durch den folgenden Satz die naheliegende Frage beantwortet werden, wie sich die Approximierbarkeit, die Norm und die Charakteristik von $F\wedge H$ (als Funktion im R^k) zu den entsprechenden Begriffen bezüglich F (als Funktion im R^n) verhalten.

SATZ 2. *Es sei F eine im R^n definierte reelle Funktion, die ausserhalb einer gegebenen k-Ebene H des R^n verschwindet. Wird dann $F\wedge H$ als Funktion im R^k aufgefasst, so gelten die folgenden Aussagen.*

(a) *F ist dann und nur dann eine approximierbare Funktion im R^n, wenn $F\wedge H$ eine approximierbare Funktion im R^k ist. $F\in\mathbf{A}^n$ ist also mit $F\wedge H\in\mathbf{A}^k$ gleichbedeutend.*

(b) *Es gilt*

$$\|F\|_n = \|F\wedge H\|_k. \tag{9}$$

(c) *Es gilt*

$$\chi(F) = \chi(F \wedge H), \tag{10}$$

wobei links die auf $\mathbf{A}^n$ *und rechts die auf* $\mathbf{A}^k$ *definierte Charakteristik steht.*

4.

Für den Beweis der beiden angeführten Sätze werden zwei Hilfssätze benötigt, die in diesem Abschnitt formuliert und bewiesen werden sollen.

Sind H und H' zwei k-Ebenen im R^n und ist g eine nicht singuläre affine Abbildung von H auf H', so wird, etwas allgemeiner als in (6) (dort ist $H = H' = R^n$) für jede auf H definierte Funktion durch die Beziehung

$$(\gamma F)(x) = F(\gamma^{-1}(x)) \qquad (x \in H') \tag{11}$$

eine auf H' definierte Funktion γF erklärt. γ heisse wieder die zu s gehörige Funktionentransformation.

HILFSSATZ 1. *Im* R^n *sei* H *eine Ebene und* F *eine Funktion, für die die durch* (2) *definierte Projektion auf* H *existiert.* s *sei eine nicht singuläre affine Transformation des* R^n. G *bedeute eine zu* H *orthogonale Gerade.* $\tilde{H}$ *sei eine Ebene, die zu* sG *orthogonal ist. Wird dann*

$$t = (p_{\tilde{H}} s) \wedge H \tag{12}$$

gesetzt, so gelten die folgenden Aussagen.

(a) t *ist eine nicht singuläre affine Abbildung von* H *auf* $\tilde{H}$.

(b) *Ist* σ *die zu* s *gehörige Funktionentransformation, so existiert die Projektion* $\pi_{\tilde{H}}(\sigma F)$.

(c) *Bedeutet* τ *die zu* t *gehörige Funktionentransformation so gilt*

$$\pi_{\tilde{H}} \sigma F = \tau \pi_H F. \tag{13}$$

Beweis. t hat jedenfalls die Eigenschaft, eine affine Transformation zu sein, die H in $\tilde{H}$ abbildet. Dass t nicht singulär ist, ergibt sich daraus, dass für $x \in H$, $y \in H$ aus der Beziehung $t(x) = t(y)$ mit Hilfe von (12) auf die Gleichheit $x = y$ gefolgert werden kann.

Es sei nun F eine Funktion auf R^1, für die die durch (1) definierte Charakteristik existiert. Da eine nicht singuläre Affinität s im R^1 eine Transformation der Form $sx = ax + b$ $(a \neq 0)$ ist, folgt aus der Definition (1) unmittelbar

$$\chi(\sigma F) = \chi(F). \tag{14}$$

F sei jetzt wieder eine im R^n definierte Funktion, die die im Hilfssatz genannten Voraussetzungen erfüllt. Wird σ als eine nur für die Funktionen auf G definierte Funktionentransformation aufgefasst, so gilt in Übereinstimmung mit (11)

$$\sigma(F \wedge G)(x) = (F \wedge G)(s^{-1}x).$$

Der Definitionsbereich dieser Funktion besteht ersichtlich aus allen Punkten x, für die $s^{-1}x \in G$ gilt, ist also sG, und der zugehörige Funktionswert ist $F(s^{-1}(x))$. Da $\sigma F \wedge sG$ ersichtlich dieselben Eigenschaften hat, folgt

$$\sigma(F \wedge G) = \sigma F \wedge sG. \tag{15}$$

Nun werde $x = H \cap G$, $\tilde{x} = \tilde{H} \cap sG$ gesetzt. Weil dann $sx \in sG$ ist und $\tilde{H}$ zu sG orthogonal ist, gilt $\tilde{x} = p_{\tilde{H}}(sx)$, also wegen (12) und $x \in H$

$$\tilde{x} = t(x). \tag{16}$$

Ausserdem bekommt man noch aus derselben Orthogonalitätsbeziehung $p_{\tilde{H}}^{-1}(\tilde{x}) = sG$, was zusammen mit $p_H^{-1}(x) = G$

$$sp_H^{-1}(x) = p_{\tilde{H}}^{-1}(\tilde{x}) \tag{17}$$

ergibt. Aus (16) und der Definition (11) folgt

$$(\tau\pi_H F)(\tilde{x}) = (\pi_H F)(t^{-1}(\tilde{x})) = (\pi_H F)(t^{-1}t(x)) = (\pi_H F)(x). \tag{18}$$

Wegen $G = p_H^{-1}(x)$ findet man mit Hilfe von (14) und (15) unter Heranziehung der Definition (2)

$$(\pi_H F)(x) = \chi(F \wedge p_H^{-1}(x)) = \chi(\sigma(F \wedge p_H^{-1}(x))) = \chi(\sigma F \wedge sp_H^{-1}(x)). \tag{19}$$

Aus (17) folgt zudem wenn wieder (2) verwendet wird,

$$\chi(\sigma F \wedge sp_H^{-1}(x)) = \chi((\sigma F) \wedge p_{\tilde{H}}^{-1}(\tilde{x})) = (\pi_{\tilde{H}}\sigma F)(\tilde{x}). \tag{20}$$

(19) und (20) ergeben, dass $(\pi_{\tilde{H}}\sigma F)(\tilde{x})$ existiert und $(\pi_{\tilde{H}}\sigma F)(\tilde{x}) = (\pi_H F)(x)$ gilt. Wegen (18) ergibt sich daraus

$$(\pi_H \sigma F)(\tilde{x}) = (\tau\pi_H F)(x). \tag{21}$$

Da die Gerade G orthogonal zu H, aber sonst beliebig gewählt werden kann, und daher $\tilde{H} \cap sG$ alle Punkte $\tilde{x}$ aus $\tilde{H}$ durchlaufen kann, folgt aus (21), dass (13) gilt. Damit sind auch die Aussagen (b) und (c) des Hilfssatzes bewiesen.

Für die Formulierung des nächsten Hilfssatzes ist es zweckmässig die folgenden

Bezeichnungen einzuführen. Bedeutet s eine nicht singuläre affine Transformation des R^n und ist $d(x, y)$ der euklidische Abstand von zwei Punkten x, y des R^n, so werde für $n \geqq 1$

$$g_n(s) = \sup_{x \neq y} \frac{d(s(x), s(y))}{d(x, y)} \tag{22}$$

gesetzt. Dabei sollen x und y unabhängig voneinander alle Punkte des R^n, für die $x \neq y$ ist, durchlaufen. Ein offenkundiges Kompaktheitsargument zeigt, dass $g_n(s)$ stets endlich ist. Schliesslich werde noch

$$h_0(s) = 1, \qquad h_n(s) = \max\{g_n(s), 1\} \tag{23}$$

geschrieben. Dann ist ersichtlich $1 \leqq h_n(s) < \infty$.

HILFSSATZ 2. *Im R^n sei F eine normierbare Funktion und s eine nicht singuläre Affinität. Bedeutet σ die zu s gehörige Funktionentransformation, so ist auch σF normierbar und es gilt*

$$\|\sigma F\|_n \leqq h_n^n(s)\, \|F\|_n. \tag{24}$$

Beweis. Im R^0 ist die Aussage des Hilfssatzes selbstverständlich. Es werde die Induktionsannahme gemacht, dass der Hilfssatz für den R^{n-1} schon bewiesen sei. Für jede nicht singuläre Affinität r des R^{n-1} (mit zugehöriger Funktionentransformation ϱ) und jede normierbare Funktion U im R^{n-1} sei also ϱU wieder normierbar und es gelte

$$\|\varrho U\|_{n-1} \leqq h_{n-1}^{n-1}(r)\, \|U\|_{n-1}. \tag{25}$$

Ist $\tilde{H}$ eine beliebige Ebene des R^n, so kann man dazu eine Ebene H finden, so dass $\tilde{H}$ und H den Bedingungen des Hilfssatzes 1 genügen. Dann gilt, mit den dortigen Bezeichnungen die Beziehung (13). Da F normierbar ist, folgt, wie man aus der Definition der Normierbarkeit unmittelbar erkennt, dass auch $\pi_H F$ (als Funktion im R^{n-1}) normierbar ist. Wegen der Induktionsannahme gilt dann dasselbe von $\tau \pi_H F$. Aus (13) ergibt sich daher, dass $\pi_{\tilde{H}} \sigma F$ normierbar ist und (25) ergibt, wenn $U = \pi_H F$, $r = t$, $\varrho = \tau$ gesetzt wird, und t durch (12) erklärt ist

$$\|\pi_{\tilde{H}} \sigma F\|_{n-1} \leqq h_{n-1}^{n-1}(t)\, \|\pi_H F\|_{n-1}. \tag{26}$$

Aus der Definition (22) folgt daher, wenn man zudem bedenkt, dass bei einer Projektion die Abstände nicht vergrössert werden,

$$g_{n-1}(t) = \sup_{x \neq y} \frac{d(p_{\tilde{H}} s(x), p_{\tilde{H}} s(x))}{d(x, y)} \leqq \sup_{x \neq y} \frac{d(s(x), s(y))}{d(x, y)} \leqq g_n(s)$$

(x und y sind hier auf H beschränkt, daher steht vor $g_n(s)$ nicht unbedingt das Gleichheitszeichen). Wegen (23) gilt demnach

$$h_{n-1}(t) \leqq h_n(s). \tag{27}$$

Aus (26), (27) und $h_n(s) \geqq 1$ folgt nun

$$\|\pi_{\tilde{H}} \sigma F\|_{n-1} \leqq h_n^n(s) \, \|\pi_H F\|_{n-1}. \tag{28}$$

Weil F nach Voraussetzung Lebesgue integrierbar sein soll, trifft dasselbe für σF zu und es gilt bekanntlich

$$\int_{R^n} |\sigma F| \, d\mu^n \leqq c_n(s) \int_{R^n} |F| \, d\mu^n,$$

wobei $c_n(s)$ eine nur von n und s abhängige Zahl ist. Da durch s ein Würfel der Kantenlänge 1 in ein Parallelotop mit Kantenlängen, die nicht grösser als $h_n(s)$ sind, übergeführt wird, folgt sofort $c_n(s) \leqq h_n^n(s)$. Es gilt somit

$$\int_{R^n} |\sigma F| \, d\mu^n \leqq h_n^n(s) \int_{R^n} |F| \, d\mu^n. \tag{29}$$

Aus (28) und (29) und der Definition (3) ergibt sich jetzt

$$\|\sigma F\|_n = \max\left\{\int_{R^n} |\sigma F| \, d\mu^n, \sup_H \|\pi_{\tilde{H}} \sigma F\|_{n-1}\right\} \leqq$$

$$\leqq \max\left\{h_n^n(s) \int_{R^n} |F| \, d\mu^n, h_n^n(s) \sup_{\tilde{H}} \|\pi_H F\|_{n-1} = \right\} h_n^n(s) \, \|F\|_n.$$

Damit, zusammen mit der schon bewiesenen Tatsache, dass jede Projektion von σF normierbar ist, ergibt sich, dass auch σF normierbar ist und dass (24) gilt.

5.

Nun können die im 3. Abschnitt angeführten Sätze bewiesen werden.

Beweis von Satz 1. Zuerst soll gezeigt werden, dass es höchstens eine Abbildung σ von $\mathbf{A}^n$ auf $\mathbf{A}^k$ gibt, welche die Eigenschaften (a), (b), (c) des Satzes hat. Ist τ eine weitere solche Abbildung, so gilt wegen der Eigenschaft (c), dass zumindest für jedes kompakte konvexe Polytop C die Gleichheit $\sigma C = \tau C$ besteht. Durch lineare Kombination überträgt sich dies durch Anwendung von (a) sofort auf bewertete Polytope.

Aus (b) bekommt man dann, wenn eine Folge bewerteter Polytope P_i vorliegt, für die $P_i \Rightarrow F$ gilt, dass $\sigma P_i \Rightarrow \sigma F$, $\tau P_i \Rightarrow \tau F$ sein muss. Wegen $\sigma P_i = \tau P_i$ folgt daraus $\sigma F = \tau F$, womit die Eindeutigkeit von σ erwiesen ist.

Jetzt werde angenommen, dass s nicht singulär sei. Vorerst soll der Beweis erbracht werden, dass das durch (5) definierte Funktional σ die Eigenschafte (a), (b), (c) hat und dass σF approximierbar ist, wenn dasselbe für F zutrifft. Da s nicht singulär ist, kann anstatt (5) die bequemere Definition (6) verwendet werden. Die Approximierbarkeit von σF lässt sich folgendermassen einsehen. Für $n=0$ ist die Sachlage vollkommen trivial. Es werde die Induktionsvoraussetzung gemacht, dass das entsprechende Ergebnis für den R^{n-1} richtig sei. Ist $F \in \mathbf{A}^n$ und liegt eine Folge bewerteter Polytope P_i des R^n vor, so dass $P_i \Rightarrow F$, also $\lim_{i\to\infty} \|F-P_i\| = 0$ gilt, so folgt aus Hilfssatz 2 $\lim_{i\to\infty} \|\sigma F - \sigma P_i\| = 0$ und daher

$$\sigma P_i \Rightarrow \sigma F. \tag{30}$$

Bedeutet H eine Ebene im R^n, so folgt durch Wiederholung desselben Argumentes, das zum Beweis von (15) verwendet wurde, $(\sigma F) \wedge H = \sigma(F \wedge s^{-1}H)$. Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung kann daraus sofort geschlossen werden, dass $(\sigma F) \wedge H$ approximierbar ist. Diese Tatsache, zusammen mit (30), zeight, dass $\sigma F \in \mathbf{A}^n$ gilt. Die Aussagen (a) und (c) des Satzes sind selbstverständliche Folgerungen aus der Definition (6). Weil, genau wie beim Beweis von (30), aus $F_i \Rightarrow F$ auf $\sigma F_i \Rightarrow \sigma F$ geschlossen werden kann, erhält man die Stetigkeit von σ. Damit ist für nicht singuläres s, abgesehen von (7), der Satz bewiesen.

Nun werde angenommen, dass s singulär sei. Der R^n wird also dann durch s auf eine k-Ebene H abgebildet $(0 \leqq k < n)$. Für jedes x aus H ist $s^{-1}(x)$ eine $(n-k)$-Ebene und alle diese $(n-k)$-Ebenen die zu vorgegebenen Punkten x gehören, sind zueinander parallel. Ist E eine zu $s^{-1}(x)$ orthogonale k-Ebene und bezeichnet p_E die Projektion des R^n auf E, so gilt ersichtlich $s = (s \wedge E)\, p_E$. Setzt man $t = s \wedge E$, so folgt daraus

$$s = t p_E, \tag{31}$$

wobei t eine affine Abbildung von E auf H ist, die, weil E und H dieselbe Dimension haben, nicht singulär ist. Sind σ und τ die zu s bzw. t gehörigen Funktionentransformationen, so folgt aus (31) und den Definitionen (2) und (11) für jedes F aus $\mathbf{A}^n$

$$(\sigma F)(x) = \chi(F \wedge s^{-1}(x)) = \chi(F \wedge p_E^{-1} t^{-1}(x)) = (\pi_E F)(t^{-1}(x)) = (\tau \pi_E F)(x).$$

Es gilt demnach

$$\sigma = \tau \pi_E. \tag{32}$$

Da in [1] gezeigt wurde (Satz 4), dass jede Projektion die Eigenschaften (a), (b), (c) hat und vorhin dasselbe für nicht singuläre Affinitäten bewiesen wurde, folgt aus (32),

dass auch für σ die Aussagen (a), (b) (c) zutreffen. Dabei ist zu beachten, dass t nach Einführung von Koordinatensystemen in E und H als Affinität im R^k aufgefasst werden kann. Dasselbe Schlussverfahren ergibt auch $\sigma F \in \mathbf{A}^k$ für alle $F \in \mathbf{A}^n$.

Weil im Anschluss an Satz 1 schon gezeigt wurde, dass (7) als eine Folgerung aus den anderen im Satz genannten Eigenschaften der affinen Transformationen aufgefasst werden kann, ist somit der Satz in allen Teilen bewiesen. Eine andere Möglichkeit (7) zu beweisen, besteht darin, dass man bei gegebenem σ das Funktional $\varphi(F) = \chi(\sigma F)$ untersucht. Wegen der Aussagen (a), (b), (c) und bekannten Eigenschaften von χ ist leicht einzusehen, dass φ linear und stetig ist und für kompakte konvexe Polytope den Wert 1 hat. Durch diese Eigenschaften ist aber das Funktional χ eindeutig bestimmt ([1], Satz 3). Daher muss $\varphi = \chi$ und somit $\chi(\sigma F) = \chi(F)$ gelten.

Beweis von Satz 2. Es genügt, den Satz für $k = n-1$ zu beweisen, denn durch wiederholte Anwendung dieses Spezialfalles kann man ersichtlich zur allgemeinen Aussage des Satzes vordringen. Für $n = 1$ handelt es sich um selbstverständliche Behauptungen. Es werde die Induktionsvoraussetzung gemacht, dass der auf den R^{n-1} bezogene Inhalt des Satzes schon bewiesen sei.

E bedeute nun eine Ebene im R^n, die nicht zu der im Satz genannten Ebene H orthogonal ist, d.h. keine zu H orthogonale Gerade enthält. Die Projektion von H auf E ist dann eine nicht singuläre affine Abbildung von H auf E. Bedeutet p_E die Projektion des R^n auf E und $\hat{p}_E = p_E \wedge H$ die Projektion von H auf E, so unterscheidet sich (bei festem $x \in E$) die Funktion $F \wedge p_E^{-1}(x)$ von $(F \wedge H) \wedge \hat{p}_E^{-1}(x)$ dadurch, dass $F \wedge p_E^{-1}(x)$ auf der Geraden $p_E^{-1}(x)$ definiert ist und ausserhalb des Punktes $H \cap p_E^{-1}(x)$ null ist, wohingegen $(F \wedge H) \wedge \hat{p}_E^{-1}(x)$ ausserhalb des Punktes $H \cap p_E^{-1}(x)$ überhaupt nicht definiert ist. Da die Funktionswerte in diesem Punkt in beiden Fällen die gleichen sind, hat man

$$\chi(F \wedge p_E^{-1}(x)) = \chi((F \wedge H) \wedge \hat{p}_E^{-1}(x)).$$

Links steht hier die im R^1 und rechts die im R^0 definierte Charakteristik. Bedeutet π_E die zu p_E gehörige und σ die zur Affinität $\hat{p}_E$ gehörige Funktionentransformation, so ergibt sich daraus unter Verwendung der Definitionen (2) und (11)

$$\pi_E F = \sigma(F \wedge H). \tag{33}$$

Daraus kann mit Hilfe von Satz 1 entnommen werden, dass $\pi_E F \in \mathbf{A}^{n-1}$ gilt. Da $\hat{p}_E$ nicht nur eine Affinität sondern auch eine Projektion ist, werden bei der durch $\hat{p}_E$ vermittelten affinen Abbildung von H auf E die Abstände nicht vergrössert. Aus den Definitionen (22) und (23) folgt demnach

$$h(s) = 1.$$

Durch Anwendung von Hilfssatz 2 erhält man daher aus (33)

$$\|\pi_E F\|_{n-1} \leqq \|F \wedge H\|_{n-1}. \tag{34}$$

Jetzt werde angenommen, dass H eine zu E orthogonale Ebene sei. Die Projektion

$$\pi_E F = \chi(F \wedge p_E^{-1}(x)) \tag{35}$$

ist dann 0, wenn x nicht in $E \cap H$ liegt. Die bezüglich H als zugrunde liegenden Raum definierte Projektion

$$\pi_{E\cap H}(F \wedge H) = \chi((F \wedge H) \wedge p_{E\cap H}^{-1}(x))$$

hat für $x \in E \cap H$ denselben Wert wie (35) ist aber ausserhalb $E \cap H$ überhaupt nicht definiert. Daraus folgt

$$(\pi_E F) \wedge (H \cap E) = \pi_{E\cap H}(F \wedge H).$$

Aus $F \wedge H \in \mathbf{A}^{n-1}$ folgt daher $\pi_E F \wedge (H \cap E) \in \mathbf{A}^{n-2}$ und wegen der Induktionsvoraussetzung $\pi_E F \in \mathbf{A}^{n-1}$. Zudem erkennt man noch, dass

$$\|\pi_E F\|_{n-1} = \|(\pi_E F) \wedge (H \cap E)\|_{n-2} = \|\pi_{E\cap H}(F \wedge H)\|_{n-2} \leqq \|F \wedge H\|_{n-1}$$

gilt. (34) ist also auch dann gültig, wenn H zu E orthogonal ist.

Da in dem hier vorliegenden Fall $\int_{R^n} |F|\, d\mu^n = 0$ ist, ergibt sich aus (34) und der Definition (3)

$$\|F\|_n = \sup_E \|\pi_E F\|_n \leqq \|F \wedge H\|_{n-1}. \tag{36}$$

Da andererseits der Fall $E = H$ eintreten kann und $\pi_H F = F \wedge H$ ist, gilt auch

$$\|F\|_n = \sup_E \|\pi_E F\|_{n-1} \geqq \|\pi_H F\|_{n-1} = \|F \wedge H\|_{n-1}. \tag{37}$$

(36) und (37) zeigen, dass F normierbar ist und

$$\|F\|_n = \|F \wedge H\|_{n-1} \tag{38}$$

gilt. Damit ist (9), also die Aussage (b) von Satz 2 bewiesen.

Jetzt soll die Approximierbarkeit von F bewiesen werden. Da nach Voraussetzung $F \wedge H$ approximierbar ist, gibt es eine Folge auf H definierter bewerteter Polytope P_i, so dass $P_i \Rightarrow F \wedge H$, d.h. $\lim_{i\to\infty} \|(F \wedge H) - P_i\|_{n-1} = 0$ gilt. Damit ist die Beziehung

$$\lim_{i\to\infty} \|(F - P_i) \wedge H\|_{n-1} = 0 \tag{39}$$

gleichbedeutend. Werden im R^n dadurch bewertete Poltope $\tilde{P}_i$ definiert, dass in

$H\ \tilde{P}_i = P_i$ und ausserhalb $H\ \tilde{P}_i = 0$ gesetzt wird, so folgt aus (38) und (39) sofort $P_i \Rightarrow F$.

Es ist noch zu zeigen, dass für jede Ebene E des R^n $F \wedge E \in \mathbf{A}^{n-1}$ gilt. Da für den Fall, dass E zu H parallel ist eine vollkommen triviale Sachlage vorliegt, kann angenommen werden, dass $H \cap E$ $(n-2)$-dimensional ist. Aus der Voraussetzung $F \wedge H \in \mathbf{A}^{n-1}$ folgt, wie unmittelbar aus der Definition von $\mathbf{A}^{n-1}$ hervorgeht, $(F \wedge H) \wedge (H \cap E) \in \mathbf{A}^{n-2}$. Diese Beziehung besagt ersichtlich dasselbe wie

$$(F \wedge E) \wedge (H \cap E) \in \mathbf{A}^{n-2}. \tag{40}$$

$F \wedge E$ ist eine auf E definierte Funktion, die ausserhalb der $(n-2)$-Ebene $H \cap E$ verschwindet. Aus (40), zusammen mit der eingangs gemachten Induktionsvoraussetzung, ergibt sich somit $F \wedge E \in \mathbf{A}^{n-1}$. Damit ist die Aussage (a) von Satz 2 bewiesen.

Um nun den Beweis des Satzes abzuschliessen, ist noch die Beziehung (10) herzuleiten. Dazu genügt es zu bemerken, dass die Projektionsinvarianz (4), weil $\pi_H F = F \wedge H$ gilt, sofort

$$\chi(F) = \chi(\pi_H F) = \chi(F \wedge H)$$

ergibt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Groemer, H., *Eulersche Charakteristik, Projektionen und Quermassintegrale*, Math. Ann. *198* (1972), 23–56.
[2] Hadwiger, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Grundl. d. Math. Wiss. Bd. 93, Springer Verl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.
[3] Klee, V., *The Euler characteristic in combinatorial geometry*, Amer. Math. Monthly *70* (1963), 119–127.
[4] Lenz, H., *Mengenalgebra und Eulersche Charakteristik*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *34* (1970), 135–147.
[5] Royden, H. L., *Real Analysis*, 2. Aufl., The Macmillan Comp., New York 1968.

Department of Mathematics
The University of Arizona
Tucson, Ariz., 85721
U.S.A.

Eingegangen den 4. Dezember 1972