Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 48 (1973)

Artikel: Über konvexe Gitterpolygone
Autor: Wills, J.M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37153

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über konvexe Gitterpolygone

J. M. Wills

Hugo Hadwiger zum 65. Geburtstag gewidmet

$\mathbf{Z}$ sei die Menge der ganzen rationalen Zahlen und $\mathbf{Z}^2$ das zugehörige Zahlengitter in der euklidischen Ebene. Die konvexe Hülle endlich vieler Punkte aus $\mathbf{Z}^2$ heißt Gitterpolygon. Zu einem Gitterpolygon P seien wie üblich $\dot{P}, P^0, P_\varrho, P_{-\varrho}$ Rand, offener Kern, äußerer und innerer Parallelbereich. Ist $P^0 \neq \emptyset$, so heißt P eigentlich. Weiter seien $V = V(P)$ Flächeninhalt, $U = U(P)$ Umfang und $G = G(P) = \operatorname{card}(P \cap \mathbf{Z}^2)$ Gitterpunktanzahl von P. Analog sind V, U, G für $\dot{P}, P^0, P_\varrho, P_{-\varrho}$ erklärt.

Im Satz und Korollar werden Zusammenhänge zwischen V, U und G aufgestellt. Bei diesen Ergebnissen ist die weitgehend ungelöste Frage interessant, ob und wie sie sich verallgemeinern lassen; z.B. auf höhere Dimensionen, auf beliebige konvexe Körper, auf beliebige Gitter oder auf nichtkonvexe Gitterpolygone bzw. Gitterpolytope. Auf einige dieser Fragen wird vor dem Beweis des Satzes kurz eingegangen.

SATZ. *P sei ein eigentliches Gitterpolygon. Dann gilt*

1) $V(P) = G(P) - \frac{1}{2}G(\dot{P}) - 1$ (Picksche Identität)

2) $G(P^0) - G(P^0_{-\varrho}) \leqslant \varrho U(P) \leqslant G(P^0_\varrho) - G(P^0)$ *für* $\varrho \geqslant 0$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} U(P) \leqslant G(P) - G(P_{-1/\sqrt{2}}) \leqslant U(P)$

4) $V(P) + \dfrac{1}{2\sqrt{5}} U(P) + 1 \leqslant G(P^0_{1/\sqrt{5}}) \leqslant V(P) + \frac{1}{2}U(P) + 1$

5) $G(P') + 1 \leqslant G(P)$ *für* $P' = P + s$ *und* $s \notin \mathbf{Z}^2$.

KOROLLAR.

6) $3 \leqslant G(\dot{P}) \leqslant U(P)$

7) $V(P) - \frac{1}{2}U(P) + 1 \leqslant G(P^0) \leqslant V(P) - \frac{1}{2}$

8) $V(P) + \frac{5}{2} \leqslant G(P) \leqslant 2V(P) + 2$ (Blichfeldt)

9) $G(P) \leqslant V(P) + \frac{1}{2}U(P) + 1$ (Nosarzewska)

10) *In keiner der Ungleichungen* 2) *bis* 9) *kann* $\leqslant$ *durch* $<$ *ersetzt werden. In* 6) *rechts,* 7) *links und in* 9) *gilt* $=$ *genau dann, wenn P ein achsenparallelles Rechteck ist.*

Beweis des Korollars. 6) links ist trivial; ebenso 6) rechts, da der Abstand zwischen je zwei Gitterpunkten $\geqslant 1$ ist. Gleichheit in 6) rechts gilt offenbar genau dann, wenn P ein achsenparalleles Rechteck ist. 7), 8), 9) folgen direkt aus 1) und 6), wenn man nur beachtet:

$$G(P) - \tfrac{1}{2}G(\dot{P}) = G(P^0) + \tfrac{1}{2}G(\dot{P}) = \tfrac{1}{2}G(P) + \tfrac{1}{2}G(P^0).$$

10) ist klar für die Ungleichungen in 6) bis 9).

Vor dem Beweis des Satzes einige erklärende und historische Bemerkungen: 1) ist die Picksche Identität; Beweise dazu s. [2], S. 253 oder [7]. 2) bringt eine gewisse Analogie zu

$$V(P) - V(P_{-\varrho}) \leqslant \varrho U(P) \leqslant V(P_\varrho) - V(P).$$

3) und 4) sind Verschärfungen von 6) und 9), bei denen folgende für Gitterpolygone (und Gitterpolytope) charakteristische Eigenschaft ausgenutzt wird: Je „dichter" die Gitterpunkte auf dem Rand von P liegen, desto „weniger dicht" liegen sie in der näheren Umgebung des Randes. Weitere Ergebnisse für spezielle ebene konvexe Bereiche s. [8]; für spezielle Gitterpunktanzahlen s. [10] und die dort zitierte Literatur. Über Verallgemeinerungen der Pickschen Identität auf nichtkonvexe Gitterpolygone bzw. auf höhere Dimensionen s. [6] und die dort zitierte Literatur. 9) läßt sich auf nichtkonvexe Gitterpolygone übertragen, wobei für die 1 die Euler-Charakteristik χ eintritt, wie Hadwiger zeigte (unpubl.).

Wegen der Monotonie von U und V gelten die rechten Seiten von 3), 6) und 8) auch für ebene konvexe Bereiche, die ein eigentliches Gitterpolygon enthalten; 9) gilt sogar für beliebige ebene konvexe Bereiche (s. [9]).

Abschließend einiges über Sätze für beliebige konvexe Körper K im n-dimensionalen euklidischen Raum R^n, $n \geqslant 2$. (Zu den Begriffen s. [3].) Die rechte Seite von 8) ist Spezialfall eines Satzes von Blichfeldt (s. [5], S. 55) für konvexe Körper $K \subset R^n$, die ein eigentliches Gitterpolytop enthalten:

$$G(K) \leqslant n!\, V(K) + n \qquad n \geqslant 2.$$

Der mit vollständiger Induktion nach G (bei festem n) leicht zu beweisende Satz ist wegen des Faktors $n!$ im allgemeinen ziemlich grob. Minkowskis Fundamentalsatz aus der Geometrie der Zahlen, in der Verallgemeinerung durch v. d. Corput (s. [5], S. 44) für zentralsymmetrische $K \subset R^n$ läßt sich in der Form schreiben:

$$2\left[\frac{V(K)}{2^n}\right] + 1 \leqslant G(K) \qquad n \geqslant 2,$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqslant x$ bedeutet.

Er liefert also eine untere Schranke für $G(K)$ und spezielle, nämlich zentralsymmetrische konvexe Körper. Das Problem, für beliebige konvexe Körper eine untere Schranke für $G(K)$ zu finden, ist 1972 vor allem von Hadwiger (s. [1] und [4]) endgültig gelöst worden:

$$V(K) - \tfrac{1}{2}F(K) < G(K) \qquad n \geqslant 2,$$

(F: Oberfläche, für $n=2$ ist $F=U$ der Umfang).

Das Problem, ob und wie diese Schranke bei Beschränkung auf (eigentliche konvexe) Gitterpolytope $P \subset R^n$ verbessert werden kann, also die Verallgemeinerung von 8) links, bleibt offen. Einiges spricht für die Vermutung

$$V(P) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) F(P) + c(n) \leqslant G(P) \qquad n \geqslant 2,$$

wobei $c(n)$ eine nur von der Dimension abhängige Konstante ist. Wir gehen darauf nicht näher ein.

Beweis des Satzes. Vorbetrachtung zu 2) bis 4): $\dot{P}$ wird unterteilt in Strecken, deren Endpunkte Gitterpunkte sind, die keine Gitterpunkte im (relativen) Innern haben, und deren linker Endpunkt (von einem inneren Punkt von P aus gesehen) nicht zur jeweiligen Strecke gehört. Sei l die Länge einer solchen Strecke, dann ist $U(P) = \sum l$, wobei $\sum$ hier wie im ganzen Beweis bedeutet, daß über alle soeben definierten Strecken summiert wird.

Wir betrachten eine beliebige Strecke der Länge l. Dann ist $l=\sqrt{p^2+q^2}$ mit $p \geqslant q \geqslant 0$ ganz und $(p, q)=1$ (relativ prim) oder $p=1$, $q=0$.

Für die folgende Konstruktion sei die Strecke der Einfachheit halber durch eine Bewegung B in die Strecke $\{(x, y)/0<x\leqslant l, y=0\}$ überführt. Dann sei zu einem $\varrho>0$

$$\begin{aligned} R(\varrho) &= \{(x, y)/0 < x \leqslant l,\ 0 < y \leqslant \varrho\} \\ R'(\varrho) &= \{(x, y)/0 < x \leqslant l,\ 0 \leqslant y < \varrho\} \\ R(-\varrho) &= \{(x, y)/0 < x \leqslant l,\ -\varrho \leqslant y < 0\} \\ R'(-\varrho) &= \{(x, y)/0 < x \leqslant l,\ -\varrho < y \leqslant 0\}. \end{aligned}$$

Die Bilder von $R(\varrho), R(-\varrho), R'(\varrho), R'(-\varrho)$ bezüglich der Bewegung B^{-1} seien $S(\varrho), S(-\varrho), S'(\varrho), S'(-\varrho)$ und deren positiver Flächeninhalt ist jeweils $l\varrho$. Einfache Überlegungen zeigen:

$$\begin{aligned} G(S(\varrho)) &= G(S(-\varrho)) = [l\varrho] \\ G(S'(\varrho)) &= G(S'(-\varrho)) = [l\varrho]', \end{aligned}$$

wobei $[a]$ wie üblich die größte ganze Zahl $\leqslant a$ bedeutet; und $[a]'$ die kleinste ganze Zahl $\geqslant a$. Also

$$[a] < a < [a]', \qquad \text{falls } a \text{ nichtganz}$$

und

$$[a] = a = [a]', \quad \text{falls } a \text{ ganz}.$$

Nach diesen Vorbetrachtungen zu den einzelnen Ungleichungen in 2) bis 4).

2) Es ist $G(P^0)-G(P^0_{-\varrho})\leqslant\sum [l\varrho]\leqslant\sum l\varrho=\varrho U(P)\leqslant\sum [l\varrho]'\leqslant G(P^0_\varrho)-G(P^0)$.

3) Es ist $G(P)-G(P_{-1/\sqrt{2}})\leqslant\sum [l/\sqrt{2})]$, da sich die $S'(-\varrho)$ an den Ecken von P teilweise überdecken. Andererseits liegt im Abstand <1 von jeder Ecke von P kein weiterer Gitterpunkt. Also $G(P)-G(P_{-1/\sqrt{2}})=\sum [l/\sqrt{2}]'$ und die Behauptung lautet: $\sum l/\sqrt{2}\leqslant\sum [l/\sqrt{2}]'\leqslant\sum l$.

Es genügt zu zeigen $l/\sqrt{2}\leqslant[l/\sqrt{2}]'\leqslant l$.

Die linke Ungleichung gilt, mit Gleichheit im Fall $l=\sqrt{2}$, d.h. $p=q=1$. Ebenso die rechte, mit Gleichheit im Fall $l=1$, also $p=1$, $q=0$.

4) Nach der Pickschen Identität ist $V(P)+1=G(P^0)+\frac{1}{2}G(\dot{P})$ und es bleibt zu zeigen:

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}U(P)\leqslant G(P^0_{1/\sqrt{5}})-G(P^0)-\tfrac{1}{2}G(\dot{P})\leqslant\tfrac{1}{2}U(P).$$

Wegen

$$P^0_{1/\sqrt{5}}\setminus P^0\supset\bigcup_{\text{alle } s'} S'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

ist

$$G(P^0_{1/\sqrt{5}})-G(P^0)\geqslant\sum\left[\frac{l}{\sqrt{5}}\right]'.$$

Wieder liegt im Abstand <1 von jeder Ecke von P kein weiterer Gitterpunkt. Also

$$G(P^0_{1/\sqrt{5}})-G(P^0)=\sum\left[\frac{l}{\sqrt{5}}\right]'$$

und es bleibt zu zeigen:

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum l\leqslant\sum\left[\frac{l}{\sqrt{5}}\right]'-\tfrac{1}{2}\sum 1\leqslant\tfrac{1}{2}\sum l.$$

Es genügt zu zeigen:

$$\frac{l}{2\sqrt{5}}\leqslant\left[\frac{l}{\sqrt{5}}\right]'-\frac{1}{2}\leqslant\frac{l}{2}$$

oder

$$\sqrt{\frac{p^2+q^2}{5}}\leqslant 2\left[\sqrt{\frac{p^2+q^2}{5}}\right]'-1\leqslant\sqrt{p^2+q^2} \tag{1}$$

Wegen

$$\sqrt{\frac{p^2+q^2}{5}} \leqslant \left[\sqrt{\frac{p^2+q^2}{5}}\right]'$$

gilt die linke Ungleichung in (1) und Gleichheit gilt genau dann, wenn $p=2$, $q=1$.

Die rechte Ungleichung in (1) gilt sicher dann, wenn

$$2\sqrt{\frac{p^2+q^2}{5}} + 1 \leqslant \sqrt{p^2+q^2}$$

ist, also wenn $5+2\sqrt{5} \leqslant \sqrt{p^2+q^2}$ bzw. $90 \leqslant p^2+q^2$ ist.

Bleiben also die Fälle $p^2+q^2<90$ mit $(p, q)=1$ oder $p=1$, $q=0$ und $0 \leqslant q \leqslant p$. Das sind 24 Fälle, und direktes Ausrechnen ist etwas umständlich.

Wir beachten daher, daß die kritischen Fälle in (1) rechts gerade die sind, in denen $\sqrt{(p^2+q^2)/5}$ nur wenig größer als eine ganze Zahl ist.

Es genügt also, die Ungleichung

$$2\left[\sqrt{\frac{m_r}{5}}\right]' - 1 \leqslant \sqrt{m_r} \tag{2}$$

mit $m_r = \min\{p^2+q^2/5r^2 < p^2+q^2 < 90\}$ bei den zugelassenen p, q zu überprüfen. Wegen $5r^2<90$ sind nur die Fälle $r=0, 1, 2, 3, 4$ möglich.

Einfaches Probieren zeigt:

$$m_0 = 1^2+0^2 = 1 > 5\cdot 0^2, \quad m_1 = 3^2+1^2 > 5\cdot 1^2, \quad m_2 = 4^2+3^2 = 25 > 5\cdot 2^2,$$
$$m_3 = 7^2+1^2 = 50 > 5\cdot 3^2, \quad m_4 = 9^2+1^2 = 82 > 5\cdot 4^2.$$

Die m_r erfüllen die Ungleichung (2) und für m_0 und m_2 liegt sogar Gleichheit vor.

5) Ist s der im Ursprung angetragene Translationsvektor, so können wir o.E. annehmen, daß die durch s repräsentierte Strecke σ außer dem Ursprung keinen weiteren Gitterpunkt enthält; also $G(\sigma)=1$.

Sei $P_\lambda = P+\lambda s$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, also $P_0=P$, $P_1=P'$.

Sei $Q = \bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} P_\lambda$. Q ist ein kompaktes konvexes Polygon, aber kein Gitterpolygon. Wie vorher sei $\dot{P}$ in disjunkte Strecken l zerlegt, die also außer einem Endpunkt keinen Gitterpunkt enthalten.

Sei l_λ die l entsprechende Strecke von P_λ. Für jedes der l sind zwei Fälle möglich:

1) l liegt (von einem Endpunkt eventuell abgesehen) im Innern von Q.

2) l liegt auf dem Rand von Q.

Im 1. Fall sei $L = \bigcup_{0<\lambda\leqslant 1} l_\lambda$. Im 2. Fall sei $L' = \bigcup_{0\leqslant\lambda<1} l_\lambda$.

Die L und L' sind halboffene Parallelogramme (entartet, falls l in Richtung von s liegt).

Mit $\bigcup$ und $\bigcup'$ seien jetzt die Vereinigungen über alle L bzw. über alle L' bezeichnet. Dann ist

$$Q = P \cup (\bigcup L) \cup S = P' \cup (\bigcup' L') \cup S' \tag{3}$$

wobei S und S' Translationen von σ sind; außerdem sind S und S' Randstücke von Q und ihre Endpunkte sind Ecken von P und P'.

Dabei gehöre bei S nur der Endpunkt in P' zu S, und bei S' nur der Endpunkt in P zu S'. Auf diese Art ist Q in (3) auf 2 Arten in zueinander paarweise disjunkte Mengen zerlegt worden.

Beachtet man: $G(S')=1$, $G(S)=0$, so folgt

$$G(Q) = G(P) + \sum G(L) = G(P') + \sum' G(L') + 1 \tag{4}$$

wobei jetzt $\sum$ über alle L und $\sum'$ über alle L' läuft.

Ebenso gilt:

$$V(Q) = V(P) + \sum V(L) = V(P') + \sum' V(L'),$$

also

$$\sum V(L) = \sum' V(L').$$

Elementare Überlegungen zeigen:

$$G(L) = [V(L)] \qquad\qquad G(L') = [V(L')]',$$

also

$$\sum G(L) = \sum [V(L)] \leqslant \sum' [V(L')]' = \sum' G(L').$$

Damit in (4) liefert $G(P) \geqslant G(P')+1$, also die Behauptung.

Wie das Beispiel $P=\{(x, y)/|x|+|2y| \leqslant 2\}$, $s=(0, \frac{1}{2})$ zeigt, ist $G(P)=5, G(P')=4$, $|x|+|2y|$ also $G(P')+1=G(P)$.

LITERATUR

[1] Bokowski, Hadwiger, und Wills, *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Körper im n-dimensionalen euklidischen Raum*, Math. Z. *127* (1972), 363–364.

[2] Coxeter, *Unvergängliche Geometrie*, Birkhäuser, Basel (1963).

[3] Hadwiger, *Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin (1957).

[4] Hadwiger, *Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie*, Monatshefte für Math. *76* (1972), 410–418.

[5] Lekkerkerker, *Geometry of Numbers*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (1969).

[6] MacDonald, *The volume of a lattice polyhedron*, Proc. Camb. Phil. Soc. *59* (1963), 719–726.

[7] Niven und Zuckerman, *Lattice points and polygonal area*, Amer. Math. Monthly *74*, 2 (1967), 1195–1200.

[8] NIVEN und ZUCKERMAN, *Lattice point coverings by plane figures*, Amer. Math. Monthly *74*, 1 (1967), 353–362.
[9] NOSARZEWSKA, *Evaluation de la différence entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle*, Colloquium Math. *1* (1948), 305–311.
[10] REICH, S., *Two-dimensional lattices and convex domains*, Mathematics Magazine *43*, 4 (1970), 219–220.

Eingegangen den 11. April 1973.

Corrigenda zu Vol. 48, fasc. 1

Seite	Zeile	anstatt	lies
14	2	negative	negativer
19	6	N	N
26	9	Abschnit	Abschnitt
31	16	re establish	re-establish
33	1	CW Complexes	CW-Complexes
68	6 & 7 v.u.	$\oplus$	$\otimes$
70	1 v.u.	Scand	Scand.
104	7 v.u.	$\rightarrow$	$\leftarrow$
110	8	$\mapsto$	$\rightarrow$
119	6	disc $\lvert z\rvert < 1\}$	disc $\{\lvert z\rvert < 1\}$
55	füge hinzu:		

Note added in proof: Proposition 3.7 no longer has a proof so 3.8 is only a conjecture.