Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 49 (1974)

Artikel: Funktionen, deren Logarithmus darstellbar ist als Differenz subharmonischer Funktionen

Autor: Gygax, Raymond

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37987

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Funktionen, deren Logarithmus darstellbar ist als Differenz subharmonischer Funktionen[1])

RAYMOND GYGAX

Einleitung

Differenzen subharmonischer Funktionen, oder „δ-subharmonische Funktionen", gestatten die Einführung algebraischer Strukturen. Dabei ist allerdings mit dem Verlust bedeutender Eigenschaften der subharmonischen Funktionen zu rechnen. Tatsächlich: weder der Konvergenzsatz für monotone Folgen, noch derjenige für gleichmässig konvergierende Folgen bleibt gültig. Dann liegt es nahe, ausgehend von den Grundresultaten von F. Riesz und M. Brelot, neue Kriterien zu untersuchen, wobei die Theorie der δ-konvexen Funktionen als Wegweiser dienen soll[2]). Vor zwanzig Jahren, da eine Neubelebung des Interesses für Potentialtheorie zu beobachten war, veröffentlichte M. G. Arsove seine bahnbrechenden Arbeiten über δ-subharmonische Funktionen ([2]).

Exponentialfunktionen von δ-subharmonischen Funktionen – wir werden sie fortan mit dem Ausdruck „$\exp u$" bezeichnen – sind eigentlich Metriken. Nach einem Resultat von I. G. Reschetnjak [11] lassen sich nämlich sämtliche Mannigfaltigkeiten von beschränkter Krümmung – im Sinne von A. D. Alexandrow [1] – durch ein Linienelement von der Form

$$ds = \exp u(z)\,|dz|$$

charakterisieren. In dieser Darstellung ist die Gauss'sche Krümmung einer hinreichend regulären Fläche gegeben durch [3]

$$K = -\frac{\Delta u}{\exp 2u}.$$

Dabei beschreibt Δu bekanntlich das gemäss dem Riesz'schen Zerlegungssatz [12] u zugeordnete Radon-Stieltjes'sche Mass μ. Der vorliegende Artikel leitet einige funktionentheoretische Eigenschaften der Funktionen $\exp u$ her, jedoch ohne auf die Alexandrow'sche Flächentheorie einzugehen. §1 und §2 liefern Resultate im Kleinen, wobei Mittel über Kreisperipherien auftreten. Im letzten Abschnitt wird gezeigt, dass die Menge sämtlicher Differenzen $\exp u_1 - \exp u_2$, wobei u_1 und u_2 darstellbar sind als Differenzen lokal beschränkter subharmonischer Funktionen, eine Algebra bildet.

---

[1]) Dieser Artikel ist ein Auszug der Dissertation des Verfassers.

[2]) Vgl. etwa [4] und [12] für subharmonische Funktionen, oder den ausgezeichneten Bericht von T. Radó [10], und [13] für δ-konvexe Funktionen.

Was die vorkommenden Begriffe betrifft, begnügen wir uns vorläufig mit folgender

DEFINITION. Eine Funktion u heisst δ-subharmonisch in einer offenen Menge Ω, falls ein Paar (v, w) von subharmonischen Funktionen in Ω existiert derart, dass überall wo u in Ω – endlich oder unendlich – definiert ist,

(1) $\sup(v, w) > -\infty$

und

(2) $u = v - w$.

Der Definitionsbereich von u wird dann auf die Menge aller Punkte von Ω erweitert, wo (1) gilt.

§1. Ein Mittelwertsatz

SATZ 1. *$u = v - w$ sei δ-subharmonisch im Gebiet Ω der komplexen z-Ebene. Dann gilt*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp u\,(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi = \exp u\,(z_0) \tag{1.1}$$

für jeden Punkt $z_0 \in \Omega$, wo $(v(z_0), w(z_0)) \neq (-\infty, -\infty)$ ist.

Beweis. (I)

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp u\,(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi \leqq \exp u\,(z_0). \tag{1.2}$$

Falls $w(z_0) = -\infty$ ist nichts zu beweisen. Sei also $w(z_0) > -\infty$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es ist

$$\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp u\,(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi\right\}^2 \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp 2v\,(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}$$
$$\times \exp -2w\,(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi \leqq (\exp 2v\,(z_0) + \varepsilon)\,(\exp -2w\,(z_0) + \varepsilon)$$

für genügend kleine r, da $\exp 2v$ von der Klasse PL ist und wegen Lemma 1[3]). Daraus folgt (1.2).

$$\text{(II)}\ \underline{\lim_{r\to 0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp u\,(z_0 + re^{i\varphi})\, d\varphi \geqq \exp u\,(z_0). \tag{1.3}$$

---

[3]) Nach T. Radó [10, 2.12] soll eine nicht negative Funktion von der Klasse PL heissen – von „potentialartigem Logarithmus" –, falls ihr Logarithmus subharmonisch ist. Aus der Konvexität der Exponentialfunktion folgt, dass jede PL-Funktion subharmonisch ist.

Es wird angenommen, dass $v(z_0)$ endlich ist.

(1) Wenn $w(z_0)=-\infty$ gibt es zu jeder natürlichen Zahl N einen Radius r_N mit der Eigenschaft, dass $w(z_0)\leqq -N$ für $|z-z_0|<r_N$. Dann ist für $r<r_N$

$$\exp[v(z_0)+N]\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[v(z_0+re^{i\varphi})+N]\,d\varphi\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

da $\exp v+N$ subharmonisch ist. Mit $N\to\infty$ folgt (1.3).

(2) $w(z_0)>-\infty$. Wegen (1.2) gibt es zu ε, $0<\varepsilon<1$, ein $r_0>0$ so, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi\leqq\exp u(z_0)+\varepsilon \tag{1.4}$$

für $r<r_0$. Wir zeigen: für genügend kleine r, $r<r_0$, ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi>(1-\varepsilon)\exp u(z_0). \tag{1.5}$$

Sei ε_1:

$$0<\varepsilon_1<\varepsilon\,\frac{\exp v(z_0)}{\exp u(z_0)+\varepsilon}. \tag{1.6}$$

Dann ist, sobald

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp w(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi-\exp w(z_0)<\varepsilon_1\ ^{4)}: \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi>\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi\cdot\{\exp w(z_0)\}^{-1}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp w(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi-\varepsilon_1\right\}\geqq\exp-w(z_0)\ ^{5)}\times$$

---

4) Von der Konvergenz der Mittelwerte einer subharmonischen Funktion gegen den Wert im Mittelpunkt wurde schon oben Gebrauch gemacht.

5) Da $\varepsilon<1$ und positiv ist impliziert (1.6), dass $\varepsilon_1<\exp w(z_0)$ ist, also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp w(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi-\varepsilon_1>0.$$

$$\times\left[\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\tfrac{1}{2}(u+w)(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi\right\}^2-\frac{\varepsilon_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi\right]\geqq$$

$$\geqq\exp-w(z_0)\left\{\exp v(z_0)-\frac{\varepsilon_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi\right\}>(1-\varepsilon)\exp u(z_0).$$

Die letzte Ungleichung folgt aus (1.4) und (1.6).

Bemerkung. Aus Satz 1 folgt unmittelbar

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-z_0|<r}\exp u(z)\,d0(z)=\exp u(z_0),$$

$(v(z_0), w(z_0))\neq(-\infty, -\infty)$, wobei $d0$ das Flächenelement bezeichnet. Letztere Eigenschaft wurde schon von A. Huber [8, Lemma 2] bewiesen.

LEMMA 1. *u sei superharmonisch im Gebiet Ω. Dann gilt für jeden Punkt $z_0\in\Omega$*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi=\exp u(z_0). \tag{1.8}$$

Beweis. (I) Die Halbstetigkeit von u nach unten überträgt sich auf $\exp u$, so dass

$$\varliminf_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi\geqq\exp u(z_0). \tag{1.9}$$

Zeigen wir nun, dass der Limes superior der Mittelwerte $\exp u(z_0)$ nicht übersteigt, falls $u(z_0)$ endlich ist.

(II) Der Einfachheit halber wird $z_0:=0$ gesetzt. Wir beweisen: zu jedem positiven ε lässt sich ein $r_3>0$ finden, mit der Eigenschaft, dass für alle $r\leqq r_3$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(re^{i\varphi})\,d\varphi<(1+\varepsilon)\exp u(0). \tag{1.10}$$

In einer Kreisumgebung von 0 $U_0:=\{z/|z|<r_0\}\subset\Omega$ gilt die Darstellung von Riesz [12]

$$u(z)=h(z)+\int_{U_0}g(z,\zeta)\,d\mu(e_\zeta), \tag{1.11}$$

wobei h die grösste harmonische Minorante von u in U_0 bezeichnet, g die Green'sche

Funktion für U_0 und μ das positive Radon-Stieltjessche Mass, welches u zugeordnet ist.

Setzen wir

$$G(z):=2\int_{U_0} g(z,\zeta)\,d\mu(e_\zeta).$$

Nach Voraussetzung ist $G(0)<\infty$. Wir zeigen zunächst: es gibt ein $r_2>0$, das nur von $G(0)$ und von ε abhängt, derart dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp G(re^{i\varphi})\,d\varphi \leqq (1+\varepsilon)\exp G(0) \quad \text{für alle} \quad r\leqq r_2. \tag{1.12}$$

(1) Nehmen wir an, μ bestehe aus einer einzigen Punktmasse in U_0, etwa im Punkte ζ^*. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, dass ζ^* positiv sei ($\mu(\{0\})=0$ wegen $G(0)<\infty$). Wir setzen

$$\mu^*:=2\mu(\{\zeta^*\})=\frac{G(0)}{\log(r_0/\zeta^*)}.$$

Sei r_1, $0<r_1<r_0$ so, dass

$$\frac{G(0)}{\log(r_0/r_1)}<1 \tag{1.13}$$

und

$$\left\{\frac{8}{\pi}\right\}^{G(0)/\log(r_0/r_1)}<(1+\varepsilon)\left\{1-\frac{G(0)}{\log(r_0/r_1)}\right\}. \tag{1.14}$$

(a) Betrachten wir den Fall, wo $\zeta^*\leqq r_1$. Aus der Monotonie der Green'schen Funktion folgt

$$g(z,\zeta^*)\leqq\log\frac{2r_0}{|z-\zeta^*|}, \qquad z\in U_0. \tag{1.15}$$

Weiter ist für jedes α, $0\leqq\alpha<1$

$$\sup_{0<r<r_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|re^{i\varphi}-\zeta^*|^\alpha}\,d\varphi=\frac{1}{2\pi(\zeta^*)^\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|e^{i\varphi}-1|^\alpha}\,d\varphi<\infty. \tag{1.16}$$

Das Integral auf der linken Seite von (1.16) ist nämlich eine stetige Funktion von r, fallend für $\zeta^*\leqq r<r_0$ und, als Mittel einer PL-Funktion [10, 2.4], wachsend für

$0<r<\zeta^*$. Nun ist mit $0\leqq\varphi\leqq\pi/2$

$$|e^{i\varphi}-1|\geqq\sin\varphi\geqq\frac{\varphi}{2}. \tag{1.17}$$

Dann folgt aus (1.13) bis (1.17)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp G(re^{i\varphi})\,d\varphi&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\exp g(re^{i\varphi},\zeta^*)\}^{\mu^*}\,d\varphi\\&\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{2r_0}{|re^{i\varphi}-\zeta^*|}\right\}^{\mu^*}d\varphi\leqq\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2r_0}{\zeta^*}\right\}^{\mu^*}4\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{2}{\varphi}\right\}^{\mu^*}d\varphi=\\&=\frac{\left\{\frac{8}{\pi}\right\}^{\mu^*}}{1-\mu^*}\exp G(0)<(1+\varepsilon)\exp G(0),\qquad r<r_0.\end{aligned} \tag{1.18}$$

(b) Es sei $r_1<\zeta^*<r_0$. Da G positiv und harmonisch ist in $\{z/|z|<r_1\}$, gibt es nach den Harnack'schen Ungleichungen ([4, App.] oder [9, Chapt. X]) ein r_2, $0<r_2<r_1$, so, dass

$$G(z)<G(0)+\log(1+\varepsilon) \tag{1.19}$$

für $|z|\leqq r_2$, und zwar unabhängig von ζ^*. Daraus folgt (1.12).

(2) μ bestehe aus q Punktmassen μ_1 in ζ_1, μ_2 in $\zeta_2,\ldots,\mu_q$ in ζ_q, innerhalb U_0. Mit den Abkürzungen

$$\alpha_k:=2\mu_k\log(r_0/|\zeta_k|),\qquad k=1,2,\ldots,q,$$

ist dann $\sum_{k=1}^q\alpha_k=G(0)$, und nach der Hölder'schen Ungleichung [7, S. 140] gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp G(re^{i\varphi})\,d\varphi&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\prod_{k=1}^q\left\{\exp\frac{g(re^{i\varphi},\zeta_k)}{\log(r_0/|\zeta_k|)}\right\}^{\alpha_k}d\varphi\leqq\\&\leqq\prod_{k=1}^q\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\exp g(re^{i\varphi},\zeta_k)\}^{G(0)/\log(r_0/|\zeta_k|)}\,d\varphi\right]^{\alpha_k/G(0)}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Das heisst: wir sind auf (1) zurückgeführt!

Durch Verschmierung der Einzelmassen geht man dann zu beliebigen Massenbelegungen über. Die Funktion

$$G^N(z):=2\int_{U_0}\min\{g(z,\zeta),N\}\,d\mu(e_\zeta),$$

wobei N eine natürliche Zahl bezeichnet, lässt sich nämlich durch endliche Summen beliebig genau approximieren, und zwar gleichmässig, so dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp G^N(re^{i\varphi})\,d\varphi \leqq (1+\varepsilon)\exp G(0) \tag{1.21}$$

für beliebige μ. Ein Grenzübergang führt dann zum Resultat.

Sei nun r_3, $0<r_3<r_2$ so, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp 2h(re^{i\varphi})\,d\varphi < (1+\varepsilon)\exp 2h(0), \qquad r\leqq r_3. \tag{1.22}$$

Dann ist für $r\leqq r_3$

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp u(re^{i\varphi})\,d\varphi\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[h(re^{i\varphi})+\tfrac{1}{2}G(re^{i\varphi})\right]d\varphi\right\}^2 \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp 2h(re^{i\varphi})\,d\varphi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp G(re^{i\varphi})\,d\varphi < (1+\varepsilon)^2\exp 2u(0),$$

woraus die Behauptung (1.10) folgt.

§2. Mass und Mittel

Man kann sich fragen, wie rasch die Mittelwerte um den Punkt z_0 divergieren, falls $u(z_0)$ unendlich ist, und wie sie sich verhalten, falls $u(z_0)$ nicht definiert ist. Was jedoch stets definiert ist, ist $\mu(\{z_0\})$: wie man es erwartet, besteht ein enger Zusammenhang zwischen den Mittelwerten um z_0, für kleine r, und dem Mass im Punkte z_0 – ein elementares Resultat der Potentialtheorie ist, dass der Quotient des Mittelwerts einer subharmonischen Funktion durch $\log 1/r$ gegen das Mass im Mittelpunkt konvergiert (vgl. 2.8) unten).

SATZ 2. *u sei δ-subharmonisch in Ω, $z_0\in\Omega$. Dann gilt*

$$\lim_{r\to 0}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp u(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi\right\}^{1/\log(1/r)} = \exp\mu(\{z_0\}). \tag{2.1}$$

Beweis. (I) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen: $z_0=0$.

Zunächst wird behauptet

$$\varliminf_{r\to 0}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(re^{i\varphi})\,d\varphi\right\}^{1/\log(1/r)}\geqq\exp\mu(\{0\}). \tag{2.2}$$

Sei $U_0:=\{z/|z|<r_0\}$ so, dass $U_0+\partial U_0\subset\Omega$, $r_0<1$. Aus der Konvexität der Exponentialfunktion folgt die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(re^{i\varphi})\,d\varphi\geqq\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\varphi})\,d\varphi, \tag{2.3}$$

$r<r_0$. Zerlegen wir u gemäss dem Riesz'schen Darstellungssatz:

$$u(z)=h(z)+\int_{U_0}\log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\mu(e_\zeta), \tag{2.4}$$

$z\in U_0$, wobei h harmonisch ist in U_0. Nun ist für ein festes $r<r_0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{|\zeta|<r}\log\frac{1}{|re^{i\varphi}-\zeta|}\,d\mu(e_\zeta)\right\}d\varphi=$$

$$=\int_{|\zeta|<r}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|re^{i\varphi}-\zeta|}\,d\varphi\right\}d\mu(e_\zeta)=\mu(|\zeta|<r)\log\frac{1}{r}, \tag{2.5}$$

da

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|re^{i\varphi}-\zeta|}\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|re^{i\varphi}-|\zeta|\,e^{i\psi}|}\,d\varphi\right\}d\psi=\log\frac{1}{r}. \tag{2.6}$$

Aus (2.4) und (2.5) folgt dann

$$\frac{1}{\log\frac{1}{r}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\varphi})\,d\varphi=\frac{1}{\log\frac{1}{r}}\left[h(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{U_0}\log\frac{1}{|re^{i\varphi}-\zeta|}\,d\mu(e_\zeta)\right\}d\varphi\right]=$$

$$=\frac{1}{\log\frac{1}{r}}\left[h(0)+\mu(|\zeta|<r)\log\frac{1}{r}+\int_{r\leqq|\zeta|<r_0}\log\frac{1}{|\zeta|}\,d\mu(e_\zeta)\right] \tag{2.7}$$

Folglich ist

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\log\frac{1}{r}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\,d\varphi=\mu(\{0\}) \tag{2.8}$$

und somit ist (2.2) bewiesen. Aus dem monotonen Konvergenzsatz folgt nämlich ([6, §27])

$$\left|\frac{1}{\log\frac{1}{r}}\int_{r\leqq|\zeta|<1}\log\frac{1}{|\zeta|}\,d\mu(e_\zeta)\right|\leqq\int_{0<|\zeta|<1}\min\left\{\frac{\log|\zeta|}{\log r},1\right\}d|\mu|(e_\zeta)\to 0\quad\text{für}\quad r\to 0.$$

(II) Sei ε, $0<\varepsilon<1$. Wir zeigen: für genügend kleine r ist

$$\log\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp u(re^{i\varphi})\,d\varphi\right\}^{1/\log(1/r)}<\mu(\{0\})+\varepsilon. \tag{2.9}$$

Wählen wir r_1, $0<r_1<\frac{1}{3}$, so, dass $\{z/|z|\leqq 2r_1\}\subset\Omega$, und

$$\mu^+(0<|\zeta|<2r_1)<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.10}$$

wobei μ^+ die positive Variation von μ bezeichnet, und setzen wir $U_1:=\{0<|\zeta|<2r_1\}$ und $\varepsilon^+:=\mu^+(U_1)$. Sei h^* die harmonische Funktion

$$h^*(z)=u(z)-\int_{0\leqq|\zeta|<2r_1}\log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\mu(e_\zeta),\qquad z\in U_1\cup\{0\},$$

und sei $M:=\sup_{|z|\leqq r_1}\exp h^*(z)$. Sei weiter r_2, $0<r_2\leqq r_1$, derart, dass

$$r_2^{\varepsilon/2}<\frac{2\pi(1-\varepsilon^+)}{M4^{1+\varepsilon^+}\left\{\frac{\pi}{2}\right\}^{1-\varepsilon^+}}. \tag{2.11}$$

Nehmen wir an, μ^+ bestehe aus q Punktmassen p_1 in ζ_1, p_2 in $\zeta_2,\ldots,p_q$ in ζ_q, innerhalb U_1. Dann ist nach Hölder

$$\int_0^{2\pi}\exp\left[\int_{U_1}\log\frac{1}{|re^{i\varphi}-\zeta|}\,d\mu^+(e_\zeta)\right]d\varphi=\int_0^{2\pi}\prod_{k=1}^{q}\left\{\frac{1}{|re^{i\varphi}-\zeta_k|}\right\}^{p_k}d\varphi$$

$$\leqq\prod_{k=1}^{q}\left[\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{|re^{i\varphi}-\zeta_k|}\right\}^{\varepsilon^+}d\varphi\right]^{p_k/\varepsilon^+},\qquad r<2r_1. \tag{2.12}$$

Nehmen wir weiter an, ζ_1 sei positiv, und betrachten wir das Integral

$$I_1 := \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{|re^{i\varphi} - \zeta_1|} \right\}^{\varepsilon^+} d\varphi$$

I_1 wird nicht kleiner, wenn man über den Kreis $|z-(\zeta_1 - r/2)| = r/2$ nach einem neuen, auf $\zeta_1 - r/2$ bezogenen Polarwinkel ψ integriert. Wegen

$$|e^{i\psi} - 1| \geqq \sin\psi \geqq \frac{\psi}{2}, \; 0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2} \tag{2.13}$$

ist

$$\begin{aligned} I_1 &\leqq \left\{\frac{2}{r}\right\}^{\varepsilon^+} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{|e^{i\psi}-1|} \right\}^{\varepsilon^+} d\psi \leqq 4 \left\{\frac{2}{r}\right\}^{\varepsilon^+} \int_0^{\pi/2} \left\{\frac{2}{\psi}\right\}^{\varepsilon^+} d\psi \\ &= (1-\varepsilon^+)^{-1} \, 4^{1+\varepsilon^+} \left\{\frac{\pi}{2}\right\}^{1-\varepsilon^+} r^{-\varepsilon^+}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Da diese Abschätzung unabhängig von ζ_1 ist, gilt auch, nach (2.12)

$$\int_0^{2\pi} \exp\left[\int_{U_1} \log \frac{1}{|re^{i\varphi} - \zeta|} \, d\mu^+(e_\zeta) \right] d\varphi \leqq \frac{4^{1+\varepsilon^+} \{\pi/2\}^{1-\varepsilon^+}}{1-\varepsilon^+} r^{-\varepsilon^+}. \tag{2.15}$$

Verschmieren wir die Einzelmassen, so gilt (2.15) für beliebige Massenverteilungen. Dann folgt aus (2.10), (2.11) und (2.15)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\log\frac{1}{r}} \log\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp u(re^{i\varphi}) \, d\varphi \right\} \leqq \\ &\leqq \frac{1}{\log\frac{1}{r}} \log\left[\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{ \int_{U_1 \cup \{0\}} \log \frac{1}{|re^{i\varphi} - \zeta|} \, d\mu(e_\zeta) \right\} d\varphi \right] \leqq \\ &\leqq \frac{1}{\log\frac{1}{r}} \log\left\{ \frac{M}{2\pi} \frac{4^{1+\varepsilon^+} \{\pi/2\}^{1-\varepsilon^+}}{1-\varepsilon^+} r^{-(\mu(\{0\})+\varepsilon^+)} \right\} < \mu(\{0\}) + \varepsilon, \end{aligned}$$

für $r \leqq r_2$, womit (2.9) bewiesen ist. (2.1) folgt aus (2.2) und (2.9).

§3. Eine Algebra

Sei Ω eine offene Menge in der komplexen z-Ebene und sei H die Klasse aller δ-sub-

harmonischen Funktionen in Ω, welche sich lokal als Differenzen beschränkter subharmonischer Funktionen darstellen lassen[6]. Betrachten wir

$$H_0 := \{u \in H / \inf_{\Omega_0} u > 0 \text{ für jede beliebige Teilmenge } \Omega_0,\ \Omega_0 + \partial\Omega_0 \subset \Omega\},$$

und

$$H_1 := \{\exp u / u \in H\}.$$

Es gilt

SATZ 3. $H_0 = H_1$. (3.1)

Beweis. (I) $H_0 \supset H_1$. (3.2)

Sei $\exp u \in H_1$. In einer offenen Umgebung $U(z_0)$ von $z_0 \in \Omega$ gelte die Darstellung $u = v - w$, v und w subharmonisch und beschränkt in $U(z_0)$, $w \geqq -M$ dort.

Bekanntlich ist jede natürliche Potenz f^n einer nicht negativen subharmonischen Funktion f wieder subharmonisch: f^n ist nämlich oberhalbstetig und

$$f^n(0) \leqq \left\{\frac{1}{\pi r^2}\right\}^n \left\{\int_{|z|<r} f(z)\, d0(z)\right\}^n \leqq \left\{\frac{1}{\pi r^2}\right\}^n \cdot \int_{|z|<r} f^n(z)\, d0(z) \times$$
$$\times \left\{\int_{|z|<r} d0(z)\right\}^{n-1} = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z|<r} f^n(z)\, d0(z) \tag{3.3}$$

für genügend kleine r, wenn 0 zum Definitionsbereich von f gehört.

Ferner ist $u_1 u_2 \in H$, falls $u_1, u_2 \in H$, denn es gilt lokal

$$u_1 u_2 = (v_1 - w_1)(v_2 - w_2) = \tfrac{1}{2}\{\{(v_1 + v_2)^2 + (w_1 + w_2)^2\} + \\ - \{(v_1 + w_2)^2 + (w_1 + v_2)^2\}\}, \tag{3.4}$$

wobei v_1, v_2, w_1 und w_2 nicht negative subharmonische Funktionen bezeichnen.

Dann ist

$$\exp u = \exp(v - w) = \exp(v + M) \cdot \left\{\left\{1 + \frac{(w+M)^2}{2!} + \frac{(w+M)^4}{4!} + \cdots\right\} + \right.$$
$$\left. - \left\{(w+M) + \frac{(w+M)^3}{3!} + \frac{(w+M)^5}{5!} + \cdots\right\}\right\} \in H_0. \tag{3.5}$$

denn $\exp(v + M)$ ist von der Klasse PL, also subharmonisch.

(II) $H_0 \subset H_1$. (3.6)

Sei $u \in H_0$.

(1) Zunächst wird bewiesen, dass $\log u$ δ-subharmonisch in Ω ist.

---

[6]) H umfasst nicht sämtliche in Ω lokal beschränkten δ-subharmonischen Funktionen! (vgl. [2, Example 3, S. 354])

Sei $z_0 \in \Omega$ und sei

$$U(z_0) := \{|z-z_0| < r_0\}, \quad r_0 \leqq 1, \quad \overline{U(z_0)} \subset \Omega,$$

eine Umgebung von z_0 in welcher u die zulässige Darstellung $u = v - w$ besitzt. Sei weiter

$$0 < c \leqq u(z) \leqq C, \quad z \in U(z_0). \tag{3.7}$$

Wir verwenden ein Kriterium von Arsove [2, Theorem 14, S. 338], und zu diesem Zweck führen wir den Begriff der Wienerschen Variation ein [14]:

Sei f eine in Ω fast überall endlich definierte und lokal integrierbare Funktion. Unter der Wienerschen Variation $\Psi_{\Omega'}(f)$ über $\Omega' - \Omega'$ eine messbare Teilmenge von Ω – versteht man die Grösse

$$\psi_{\Omega'}(f) := \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_r'} |\Delta_r^B f| \, d0 \quad (\leqq \infty),$$

wobei Ω_r' die Menge aller Punkte aus Ω' bezeichnet, deren Abstand von $\partial\Omega$ grösser ist als r. Δ_r^B bezeichnet den Blaschke-Operator von f [4, Chap. II, §2]:

$$\Delta_r^B f(z) := \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{f(z + re^{i\varphi}) - f(z)\} \, d\varphi, \quad |f(z)| < \infty.$$

Das Kriterium von Arsove lautet:

Eine fast überall definierte und lokal integrierbare Funktion ist genau dann fast δ-subharmonisch in einer offenen Menge Ω, wenn ihre Wienersche Variation über alle kompakten Teilmengen von Ω endlich ist.

Betrachten wir

$$U'(z_0) := \{|z-z_0| < r_0/2\}, \quad z_1 \varepsilon U'(z_0) \quad \text{und} \quad r < r_0/2.$$

Dann ist für jeden Punkt z auf dem Kreis $|z - z_1| = r$

$$\log u(z) - \log u(z_1) = \frac{u(z) - u(z_1)}{u(z_1)} - \frac{\{u(z) - u(z_1)\}^2}{2\eta^2(z_1, z)}, \tag{3.8}$$

wobei $\eta(z_1, z) > c$, und

$$\Delta_r^B \log u(z_1) = \frac{1}{u(z_1)} \Delta_r^B u(z_1) - \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \frac{\{u(z_1 + re^{i\varphi}) - u(z_1)\}^2}{\eta^2(z_1, z_1 + re^{i\varphi})} \, d\varphi. \tag{3.9}$$

Dann gilt

$$|\Delta_r^B \log u(z_1)| \leqq \frac{1}{c} |\Delta_r^B u(z_1)| + \frac{1}{\pi r^2 c^2} \int_0^{2\pi} \{u(z_1 + re^{i\varphi}) - u(z_1)\}^2 \, d\varphi \tag{3.10}$$

und, da

$$\{u(z) - u(z_1)\}^2 = u(z)^2 - u(z_1)^2 - 2u(z_1)\{u(z) - u(z_1)\}, \tag{3.11}$$

$$|\Delta_r^B \log u(z_1)| \leqq \frac{1}{c} |\Delta_r^B u(z_1)| + \frac{1}{2c^2} |\Delta_r^B u^2(z_1)| + \frac{C}{c^2} |\Delta_r^B u(z_1)| =$$

$$= \frac{1}{c} \left\{ \left(1 + \frac{C}{c}\right) |\Delta_r^B u(z_1)| + \frac{1}{2c} |\Delta_r^B u^2(z_1)| \right\}. \tag{3.12}$$

Daraus folgt: $\log u$ ist fast δ-subharmonisch in Ω. Auf die δ-Subharmonizität schliesst man mit demselben Argument. Es ist nämlich – aufgrund von (3.8) und (3.12) –

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log u(z_1 + re^{i\varphi}) \, d\varphi - \log u(z_1) \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{c} \left\{ \left(1 + \frac{C}{c}\right) \left| \int_0^{2\pi} u(z_1 + re^{i\varphi}) \, d\varphi - u(z_1) \right| + \frac{1}{2c} \left| \int_0^{2\pi} u^2(z_1 + re^{i\varphi}) \, d\varphi - u^2(z_1) \right| \right\}, \tag{3.13}$$

so dass alle Mittelwerte mit $r \to 0$ gegen den Wert der Funktion im Mittelpunkt konvergieren ([12, II, S. 344]).

(2) Zeigen wir nun, dass $\log u$ darstellbar ist als Differenz beschränkter subharmonischer Funktionen in $U'(z_0)$.

Seien μ, μ^* und ν die u, u^2 und $\log u$ zugeordneten Massenbelegungen, und sei e eine Borel'sche Menge in $U'(z_0)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\mu(\partial e) = \mu^*(\partial e) = \nu(\partial e) = 0. \tag{3.14}$$

Dann gilt wegen (3.12)

$$\left| \int_e \Delta_r^B \log u(z_1) \, d0(z_1) \right| \leqq \frac{1}{c} \left\{ \left(1 + \frac{C}{c}\right) \int_e |\Delta_r^B u(z_1)| \, d0(z_1) + \frac{1}{2c} \int_e |\Delta_r^B u^2(z_1)| \, d0(z_1) \right\}. \tag{3.15}$$

Nach [2, Theorems 12 & 13, S. 337] ist nun

$$\text{(a)} \quad \psi_e(u) \leqq |\mu|(e) \quad \text{und} \quad \psi_e(u^2) \leqq |\mu^*|(e), \tag{3.16}$$

$$\text{(b)} \lim_{r\to 0}\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\int_e \Delta_r^B \log u \, d0 = \nu(e). \tag{3.17}$$

Daraus folgt:

$$|\nu(e)| \leqq \frac{1}{c}\left\{\left(1+\frac{C}{c}\right)|\mu|(e)+\frac{1}{2c}|\mu^*|(e)\right\}. \tag{3.18}$$

Dass (3.18) für beliebige offene Teilmengen e von $U'(z_0)$ und somit für beliebige Borel'sche Teilmengen von $U'(z_0)$ gilt ist klar (vgl. [10, 4.6–4.14]). Es existiert nämlich ein Punkt $z^* \in U'(z_0)$ mit der Eigenschaft, dass für sämtliche Geraden g_n^k

$$\operatorname{Re}(z-z^*)=\frac{k}{2^n}, \operatorname{Im}(z-z^*)=\frac{k}{2^n}, \qquad k \text{ ganz}, \qquad n \text{ natürlich}$$

$$\mu(g_n^k)=\mu^*(g_n^k)=\nu(g_n^k)=0. \tag{3.19}$$

Sei ω eine offene Teilmenge von $U'(z_0)$ und sei $\varepsilon>0$. Es gibt eine abgeschlossene Menge $a_1 \subset \omega$ so, dass

$$|\nu|(\omega-a_1)<\varepsilon. \tag{3.20}$$

(3.20) gilt auch für eine abgeschlossene Menge a_2, $a_1 \subset a_2 \subset \omega$, welche von Strecken aus den soeben definierten Geraden g_n^k berandet ist. Also

$$|\nu(\omega)| \leqq |\nu(a_2)|+|\nu(\omega-a_2)| < \frac{1}{c}\left\{\left(1+\frac{C}{c}\right)|\mu|(\omega)+\frac{1}{2c}|\mu^*|(\omega)\right\}+\varepsilon \tag{3.21}$$

Dann ist gemäss dem Hahnschen Zerlegungssatz

$$\nu^-(e) \leqq \frac{1}{c}\left\{\left(1+\frac{C}{c}\right)|\mu|(e)+\frac{1}{2c}|\mu^*|(e)\right\}, \tag{3.22}$$

wobei e eine beliebige Borelsche Teilmenge von $U'(z_0)$ bezeichnet.

Sei

$$p(z) := -\int_{U'(z_0)} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\nu^-(e_\zeta).$$

In $U'(z_0)$ ist $p-\log u$ subharmonisch, sowie die Funktionen

$$q(z) := v(z)+w(z)+\int_{U'(z_0)} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d|\mu|(e_\zeta)$$

und

$$q^*(z) := v^*(z) + w^*(z) + \int_{U'(z_0)} \log \frac{1}{|z-\zeta|} \, d|\mu^*|(e_\zeta),$$

wobei $u^2 = v^* - w^*$ eine zulässige Darstellung von u^2 in $U(z_0)$ bezeichnet. Dann ist in einer hinreichend kleinen Umgebung von z_0

$$p \geqq \frac{1}{c}\left\{\left(1+\frac{C}{c}\right)(v+w-q) + \frac{1}{2c}(v^*+w^*-q^*)\right\} \geqq M_1 > -\infty \tag{3.23}$$

und

$$\log u = p - (p - \log u),$$

womit Satz 3 bewiesen ist.

Bilden wir

$$H_1' := \{\exp u_1 - \exp u_2 / u_1, u_2 \in H\},$$

so gilt

SATZ 4. *$H_1' = H$, das heisst: H_1' ist eine Algebra.* (3.24)

(Vgl. [2, Theorem 25, S. 347]).

Beweis. (I) $H_1' \subset H$.

Dies ist klar, denn $\exp u_i \in H_0 \subset H$, $i = 1, 2$, und H ist eine Algebra.

(II) $H \subset H_1'$.

Sei $u = v - w \in H$, v und w lokal beschränkt. Eine Darstellung von u als Differenz zweier Elemente aus H_0 ist gegeben durch

$$u = (\max(v, w) + 1 - w) - (\max(v, w) + 1 - v), \tag{3.25}$$

denn $\max(v, w)$ ist subharmonisch [12, I, S. 335].

Bemerkung. Zwischen den Aussagen

(A) „u ist lokal darstellbar als Differenz beschränkter subharmonischer Funktionen in Ω“, und

(B) „u ist darstellbar als Differenz lokal beschränkter subharmonischer Funktionen in Ω“,

ist nicht zu unterscheiden. Dass (B) aus (A) folgt zeigt man folgendermassen:

$u = V - W$ bezeichne eine kanonische Darstellung von u in Ω – „kanonisch“ im Sinne, dass sie der Jordanschen Zerlegung von μ entspricht (dass jedes negative Mass eine subharmonische Funktion erzeugt, beweist M. Brelot in [5]). Nehmen wir an, es existiere ein Punkt $z_0 \in \Omega$, so, dass V in keiner Umgebung von z_0 beschränkt ist. In $U(z_0)$ gelte $u = v - w$, v beschränkt dort. Dann ist [2, Theorem 5, S. 331] $V = v - s$, s subharmonisch in $U(z_0)$, was unserer Annahme widerspricht!

LITERATUR

[1] ALEXANDROW, A. D., *Die innere Geometrie der konvexen Flächen,* Akademie-Verlag, Berlin (1955).

[2] ARSOVE, M. G., *Functions representable as differences of subharmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. *75*, No. 2 (1953), 327–365: *Functions of potential type*, Trans. Amer. Math. Soc. *75*, No. 3, (1953), 526–551.

[3] BECKENBACH, E. F. und RADÓ, T., *Subharmonic functions and surfaces of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. *35*, (1933), 662–674.

[4] BRELOT, M., *Elements de la théorie classique du potentiel*, Cours de Sorbonne, Centre de Documentation Universitaire (1959).

[5] — —, *Sur l'intégration de* $\Delta u(M) = \Phi(M)$, C. R. Acad. Sc. Paris *201* (1954), 1316–1318.

[6] HALMOS, P., *Measure theory*, Van Nostrand Reinhold Company, 13. Ed. (1969).

[7] HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E., und PÓLYA, G., *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 2. Ed. (1952).

[8] HUBER, A., *Zum potentialtheoretischen Aspekt der Alexandrow'schen Flächentheorie*, Comment. Math. Helv. *34* (1960), 99–126.

[9] KELLOGG, O., *Foundations of potential theory*, Springer (Ed. 1967).

[10] RADÓ, T., *Subharmonic functions*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, VI, Springer (1937).

[11] RESCHETNJAK, I. G., *Isotherme Koordinaten in Mannigfaltigkeiten beschränkter Krummung*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, *94* (1954), 631–634.

[12] RIESZ, F., *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel*, I & II, Acta Math. *48* (1926), 329–343 & *54* (1930), 321–360.

[13] — —, *Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales*, Ann. Ec. Norm. *28* (1911), 5–62.

[14] WIENER, N., *Laplacians and continuous linear functionals*, Acta Szeged *3* (1927), 7–16.

Pl. Vanier Resid.,
Box 338,
Vancouver 8, B. C. Canada

Eingegangen den 20. August 1973