Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 50 (1975)

Artikel: Déformation du crochet de poisson sur une variété symplectique.
Autor: Vey, Jacques
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38818

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 50 (1975) 421–454 Birkhäuser Verlag, Basel

Déformation du crochet de poisson sur une variété symplectique

par JACQUES VEY

Je me propose, dans cette note, de construire sur une variété symplectique X une déformation formelle du crochet de Poisson, non-triviale en un sens qui sera précisé au §4, du type suivant: les λ_k (k entier $\geqslant 1$) seront des opérateurs bidifférentiels sur l'algèbre $\mathscr{E}_X$ des fonctions C^∞ sur X, bilinéaires sur $\mathbf{R}$, alternés, et tels que la série

$$[u, v]_t = [u, v] + \frac{t}{6}\lambda_1(u, v) + \frac{t^2}{5!}\lambda_2(u, v) + \frac{t^3}{7!}\lambda_3(u, v) + \cdots \tag{1}$$

(où $u, v \in \mathscr{E}_X$ et t est un paramètre) vérifie l'identité de Jacobi. De tels objets ont déjà été considérés par M. Flato, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer dans un travail récent ([12]), mais ces auteurs limitaient l'ordre des opérateurs sur chaque argument à 1. Au contraire, dans la présente construction, l'ordre de λ_i sur chaque argument est $2i+1$, et ces opérateurs s'annulent dès que l'une des fonctions arguments est constante; en fait la série (1) tente de relever de façon covariante sur X une déformation assez bizarre du crochet de Poisson sur les séries formelles, qui ne semble pas avoir été signalée jusqu'ici, et que j'ai dû décrire au §1. En conséquence, les symboles principaux des λ_i sont explicites. Une formule universelle, décrite au §3, n° 3, permet, sous la donnée d'une connexion linéaire D adaptée sur X, d'écrire explicitement l'opérateur λ_1 (la connexion intervient en chaque point par son jet d'ordre 1); mais je n'ai pu en faire autant pour les opérateurs suivants.

J'ai donc été obligé de recourir au procédé standard d'extension pas à pas de déformations tronquées (cf. [10]), en repérant les obstructions éventuelles dans un groupe $H^3(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$ convenablement défini (§3). Par des techniques inspirées de M. V. Losik et V. Guillemin, on aboutit à la proposition 1 du §3, d'où il ressort que ce H^3 se fournit de deux côtes: d'une part le H^3 analogue relatif aux fonctions formelles, que j'ai pu conjurer par les lourds calculs du §2; d'autre part, la cohomologie réelle $H^*(X, \mathbf{R})$ de la variété: pour assurer l'existence de la déformation (1), je dois supposer $H^3(X, \mathbf{R}) = 0$; et je ne sais pas si cette hypothèse est surperflue, ou si elle cache une classe caractéristique.

Un aspect inquiétant de la formule (1) est le bouleversement qu'elle provoque sur la stratification des jets: c'est un opérateur différentiel d'ordre infini, et je ne vois pas comment prendre le problème de la convergence. De toute façon, mon incertitude est

grande sur le statut de cette construction; mais il était tentant d'écrire des formules où la courbure d'une connexion linéaire perturbe les lois de commutation.

§1. Déformation des algèbres symétriques

1.1. On désignera par k un corps commutatif de caractéristique nulle, et par T un espace vectoriel de dimension finie sur k. Soit g un opérateur bidifférentiel à coefficients constants sur T:

$$g=\sum_{\text{finie}} c_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x''}\right)^{\beta} \tag{1}$$

où α, β sont des multi-indices, et les $c_{\alpha,\beta}$ des constantes; si u et v sont deux fonctions sur T, $g(u, v)$ est la fonction sur T

$$g(u, v)=\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} u_{|\alpha} v_{|\beta} \tag{2}$$

où $u|_{\alpha}$ désigne la dérivée partielle de u d'indice α. On peut aussi considérer g comme un élément de $k\,[T\oplus T]$, c'est-à-dire comme une fonction

$$g(\xi', \xi'')=\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}(\xi')^{\alpha}(\xi'')^{\beta} \tag{3}$$

de deux arguments ξ', ξ'' variant dans le dual T^* de T. Sous les formes (1) ou (3), on voit comment former les puissances successives g^n de g, qui seront aussi des opérateurs bidifférentiels sur T à coefficients constants.

THÉORÈME 1. *La multiplication*

$$M_t^g(u, v)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}g^n(u, v)$$

(u, v polynômes sur T, t paramètre) définit une déformation formelle de l'algèbre associative $k[T]$ si et seulement si l'opérateur g vérifie l'identité

$$g(\xi'', \xi''')-g(\xi'+\xi'', \xi''')+g(\xi', \xi''+\xi''')-g(\xi', \xi'')=0 \tag{4}$$

les trois arguments ξ', ξ'', ξ''' variant dans T^*. Tel est le cas par exemple si g est bilinéaire.

En principe, on obtient une déformation formelle, c'est-à-dire une loi de $k[[t]]$ algèbre sur $k[[t]]\otimes k[T]$. Mais si l'on fait la petite hypothèse que l'opérateur g n'a pas de terme constant ($c_{0,0}=0$), alors pour chaque spécialisation du paramètre t, et

pour chaque couple de polynômes u et v, la série $M_t^g(u, v)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, et la loi est définie sur l'espace $k[T]$.

Nous devons vérifier l'associativité. Un lemme tout d'abord:

LEMME 1. *Soit $F(x', x'')$ une fonction sur $T \oplus T$, et $P(\xi)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. On a l'identité:*

$$P(\xi) \cdot F(x, x) = P(\xi' + \xi'') \cdot F(x', x'')|_{x'=x''=x}.$$

(Cette identité est évidente si P est d'ordre 1, et elle est multiplicative en P).

Ecrivons la multiplication à l'aide d'un opérateur bidifférentiel d'ordre infini:

$$M_t^g(u, v) = \exp tg(\xi', \xi'') \cdot u(x')\, v(x'')|_{x'=x''=x}.$$

De la sorte,

$$\begin{aligned} M_t^g(M_t^g(u, v_p, w) &= \exp tg(\xi'', \xi''')\,([\exp tg(\xi', \xi'') \cdot u(x')\, v(x'')|_{x'=x''}]\, w(x'''))_{x''=x'''=x} \\ &= \exp tg(\xi' + \xi'', \xi''') \cdot \exp tg(\xi', \xi'') \cdot u(x')\, v(x'')\, w(x''')|_{x'=x''=x'''=x} \\ &= \exp t(g(\xi' + \xi'', \xi''') + g(\xi', \xi'')) \cdot u(x')\, v(x'')\, w(x''')|_{x'=x''=x'''=x} \end{aligned}$$

et en comparant avec $M_t^g(u, M_t^g(v, w))$, on tombe sur la relation (4), qui est automatiquement vérifiée quand g est bilinéaire.

Afin d'interpréter la condition (4), on considère le complexe $C_{pn}^*(T^*, k)$ des cochaînes du groupe additif T^* opérant trivialement dans k qui sont des fonctions polynomiales; si $f(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ est une p-cochaîne, son cobord δf est:

$$\begin{aligned} \delta f(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}) = f(\xi_2, \ldots, \xi_{p+1}) - f(\xi_1 + \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{p+1}) \\ + f(\xi_1, \xi_2 + \xi_3, \ldots, \xi_{p+1}) - \cdots + (-1)^{p+1} f(\xi_1, \ldots, \xi_p). \end{aligned}$$

Ainsi la condition (4) dit que $g(\xi', \xi'')$ doit être un 2-cocycle. Interprétons les cobords. Si $h(\xi) \in C_{pn}^1(T^*, k)$,

$$\delta h(\xi', \xi'') = h(\xi'') - h(\xi' + \xi'') + h(\xi'').$$

PROPOSITION 1. *Soient g, g' deux opérateurs bidifférentiels sur T à coefficients constants, vérifiant la condition de fermeture* (4)*; et h un opérateur différentiel à coefficients constants tel que $g' = g + \delta h$. Posons, pour $u \in k[T]$,*

$$\alpha_t^h = \exp th(\xi) \cdot u.$$

Alors $M_t^{g'}(u, v) = (\alpha_t^h)^{-1} \cdot M_t^g(\alpha_t^h u, \alpha_t^h v)$: les deux déformations sont isomorphes.

Ici encore, il est préférable de supposer les opérateurs sans terme constant, de façon à ce que les séries en question fassent sens sur $k[T]$ quand on spécialise le paramètre. Quant à la preuve, elle est analogue à celle de l'associativité, en plus simple $((\alpha_t^h)^{-1}=\alpha_{-t}^h)$.

1.2. Donnons maintenant les exemples principaux. Supposons d'abord T de dimension 2, et soit p, q un système de coordonnées. Prenons

$$g=\frac{\partial}{\partial p'}\frac{\partial}{\partial q''}, \qquad g(u,v)=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}$$

$$M_t^g(u,v)=\sum_{m\geqslant 0}\frac{t^m}{m!}\frac{\partial^m u}{\partial p^m}\frac{\partial^m v}{\partial q^m}.$$

Pour $t=1$, on reconnaît le produit des opérateurs différentiels polynomiaux à une variable:

$$u=\sum u_k(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \qquad v=\sum v_k(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k$$

en lisant $q=x$, $p=\partial/\partial x$. Il en est de même pour tout $t\neq 0$, si on lit p comme $t\partial/\partial x$. Par conséquent toutes ces algèbres M_t^g sont isomorphes pour $t\neq 0$, et bien sûr non isomorphes à $k[p,q]$ elle-même (elles sont non-commutatives).

Plus généralement, supposons T de dimension paire 2ν, et soit p_i, q_i $(1\leqslant i\leqslant \nu)$ un système de coordonnées. En prenant pour g

$$g=\sum_1^\nu \frac{\partial}{\partial p_i'}\frac{\partial}{\partial q_i''} \qquad g(u,v)=\sum_1^\nu \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}$$

on obtient pour M_t^g, et $t\neq 0$, l'algèbre des opérateurs différentiels polynomiaux à ν variables, en lisant:

$$\sum_{\alpha \text{ multi-indice}} u_\alpha(x_1,\ldots,x_\nu)\left(t\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(t\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu} \quad \text{pour} \quad \sum_\alpha u_\alpha(q_1,\ldots,q_\nu)\,p_1^{\alpha_1}\cdots p_\nu^{\alpha_\nu}.$$

Sur le même espace, prenons à présent l'opérateur:

$$g'=-\sum_1^\nu \frac{\partial}{\partial q_i'}\frac{\partial}{\partial p_i''} \qquad g'(u,v)=-\sum_1^\nu \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}.$$

Cette fois, on va obtenir pour $M_1^{g'}$ l'algèbre des opérateurs différentiels à ν variables, en ordonnant u et v par rapport aux q_i, et en lisant x_i pour p_i, $-\partial/\partial x_i$ pour q_i. Comme

$g'-g=\delta h$, avec h

$$h=\sum_1^{\nu} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial q_i}$$

la proposition du n° 1 montre que la transformation α_1^h

$$\alpha_1^h \cdot u = \sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{m!} h^m \cdot u$$

réalise un isomorphisme de M_1^g et $M_1^{g'}$; c'est donc une sorte de transformation de Fourier, mais au niveau des jets, qui échange positions et impulsions, avec un signe. En jouant sur le fait que pour $s, t \in k$, $M_t^{sg}=M_{st}^g$, et $\alpha_t^{sh}=\alpha_{st}^h$, on voit que les α_s^h passent continument de M_1^g à $M_1^{g'}$ en transitant par les $M_1^{g+s\delta h}$.

Cela dit, à mi-chemin entre M_1^g et $M_1^{g'}$, ou plutôt entre M_2^g et $M_2^{g'}$, se trouve une algèbre remarquable. Soit γ l'opérateur bidifférentiel:

$$\gamma=\sum_1^{\nu} \frac{\partial}{\partial p_i'} \frac{\partial}{\partial q_i''} - \frac{\partial}{\partial q_i'} \frac{\partial}{\partial p_i''}$$

$\gamma(u, v)$ est le crochet de Poisson $[u, v]$ relatif à la structure symplectique $dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_\nu \wedge dq_\nu$: on a $\gamma=2g+\delta h$, et la déformation

$$M_t^\gamma(u, v)=uv+t[u, v]+\frac{t^2}{2}\gamma^2(u, v)+\cdots$$

est une déformation associative de $k[p_1, \ldots, q_\nu]$ pilotée par le crochet de Poisson; chaque spécialisation M_t^γ n'est évidemment qu'un avatar de l'algèbre des opérateurs différentiels polynomiaux à ν variables.

Considérons maintenant la loi d'algèbre de Lie sous-jacente à M_t^γ. Noter que les opérateurs $\gamma^n(u, v)$ sont alternativement symétriques et antisymétriques selon la parité de n; en divisant par le facteur $2t$, et en prenant t^2 comme nouveau paramètre $t \in k$, on trouve une loi d'algèbre de Lie:

$$L_t(u, v)=[u, v]+\frac{t}{6}\gamma^3(u, v)+\cdots+\frac{t^n}{(2n+1)!}\gamma^{(2n+1)}(u, v)+\cdots \tag{5}$$

qui est une déformation du crochet de Poisson. Cette déformation est pilotée par l'opérateur bidifférentiel $\gamma^3/6$ qui, d'après la théorie générale, va être un 2-cocycle de l'algèbre de Poisson $k[T]$ opérant dans elle-même par la représentation adjointe. Il apparaîtra ultérieurement (§2, prop. 1) que ce cocycle n'est pas cohomologue à zéro.

L'objectif principal du présent travail va consister, sous la donnée d'une variété symplectique X, à construire des opérateurs λ_n sur X, dont les symboles principaux soient les γ_n, et tels que la formule (5), avec les λ_n substitués aux γ_n, soit une déformation formelle du crochet de Poisson sur X.

1.3. Il reste à préciser le statut des déformations M_t^g parmi les déformations de l'algèbre associative $k[T]$. Clarifions tout d'abord la cohomologie du complexe $C_{pn}^*(T^*, k)$ introduit au n° 1. Noter que les espaces $\Lambda^p T$ s'injectent dans $C_{pn}^p(T^*, k)$ en donnant les fonctions $f(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ multilinéaires alternées des ξ_i; et que ces fonctions sont des cocycles.

PROPOSITION 2. *La flèche $\Lambda^p T \to H_{pn}^p(T^*, k)$ ainsi définie est un isomorphisme. En fait, tout cocycle est cohomologue à la somme antisymétrisée de ses termes multilinéaires.*

Le même énoncé a été démontré par Van Est [1] concernant les cochaînes différentiables; la preuve s'adapte aisément et repose sur le double complexe $C_{pn}^p(T^*, \Omega_{pn}^q(T))$ des cochaînes polynomiales du groupe additif T^* dans les formes différentielles polynomiales.

COROLLAIRE. *Soit g un opérateur bidifférentiel sur T à coefficients constants, sans terme d'ordre zéro, qui soit un 2-cocycle. Les algèbres associatives M_t^g, $t \in k$, sont toutes isomorphes à des produits tensoriels d'algèbres de polynômes et d'algèbres d'opérateurs différentiels polynomiaux.*

En effet, l'énoncé précédent et la proposition du n° 1 permettent de supposer $g(\xi', \xi'')$ bilinéaire alterné. On décompose alors T en somme directe d'un sous-espace T_1 restreint auquel g est nul, et d'un sous-espace T_2 restreint auquel g est non dégénérée.

Maintenant d'après la théorie générale, [10], les déformations infinitésimales d'une algèbre associative A sont repérées dans le groupe de cohomologie de Hochschild $H^2(A, A)$ de A opérant dans elle-même par multiplication à droite et à gauche; le groupe $H^3(A, A)$ indiquant les obstructions éventuelles à prolonger des déformations.

PROPOSITION 3. *Les groupes de cohomologie de Hochschild $H^p(k[T], k[T])$ sont isomorphes à $k[T] \otimes_k \Lambda^p T$.*

J'esquisserai la preuve de ce résultat qui se trouve au moins implicitement dans la littérature. En général, si A est une algèbre associative sur k, M un bimodule sur A, et A^o l'algèbre opposée,

$$H^*(A, M) = \mathrm{Ext}^*_{A \otimes A^o}(A, M).$$

Posons $k[T] = k[x_1, \ldots, x_n] = S$: S^o est isomorphe à S, et $S \otimes S^o$ à $S[y_1, \ldots, y_n]$.

Nous devons calculer:

$$H^*(S, S) = \mathrm{Ext}^*_{S[y_1, \ldots, y_n]}(S, S)$$

où $S[y]$ opère sur les modules S de façon S-linéaire, les y_i opérant dans $S = k[x]$ par multiplication par x_i. Maintenant, $S[y_1, \ldots, y_n] \simeq S[z_1, \ldots, z_n]$, avec $z_i = y_i - x_i$, et cette fois, les z_i opèrent par zéro. Dès lors, la résolution de Koszul du $S[z]$-module S par des $S[z]$-modules libres indique que:

$$H^*(S, S) = \mathrm{Ext}^*_{S[z]}(S, S)$$

est une S-algèbre extérieure sur n générateurs, c.q.f.d.

Il apparaît finalement que les déformations infinitésimales de $k[T]$ sont représentées par les opérateurs bidifférentiels sur T, à coefficients polynomiaux, alternés, de bi-ordre (1, 1)

$$g(x; \xi', \xi'') = \sum g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x''_j} \qquad (g_{ij} = -g_{ji})$$

et que ceux que nous avons intégrés sont ceux à coefficients constants. Je ne sais pratiquement rien sur le cas général. Pour que la déformation définie par g se prolonge à l'ordre 2, il faut que l'opérateur tridifférentiel

$$\zeta(u, v, w) = g(g(u, v), w) - g(u, g(v, w))$$

qui est de toute façon un 3-cocycle, coborde; tous calculs faits, on trouve l'obstruction

$$G = \sum G_{ijk}(x) \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x''_j} \frac{\partial}{\partial x'''_k}$$

$$G_{ijk} = \underset{(i,j,k)}{\mathfrak{A}} \sum_l \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \cdot g_{lk} - g_{il} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}$$

($\mathfrak{A}$ indique l'antisymétrisation sur i, j, k).

Un exemple où elle est non nulle est fourni en dimension 3 par l'opérateur

$$g(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_3}.$$

§2. Cohomologies de champs symplectiques formels

2.1. On désigne toujours par k un corps de caractéristique nulle, et par T un espace vectoriel sur k, de dimension paire, équipé d'une forme bilinéaire g alternée non dé-

générée. Nous aurons à considérer les quatre algèbres de Lie suivantes: $\mathfrak{P}$ est l'algèbre des fonctions formelles $k[[T]]$, équipée du crochet de Poisson; $\mathfrak{S}$ l'algèbre des champs symplectiques formels; $\mathfrak{s}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{S}$ formée par les champs nuls a l'origine; et $\mathfrak{sp}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{s}$ formée par les champs linéaires symplectiques. Il est entendu une fois pour toutes que les cohomologies de ces algèbres sont calculées avec les cochaînes *d'ordre fini*. Le résultat clé est le suivant:

THÉORÈME 1. *La cohomologie $H^*(\mathfrak{s}, k)$ ($\mathfrak{s}$ opérant trivialement dans k) est nulle en degré* 1, *de dimension* 1 *en degré* 2; *si la dimension de T est au moins* 4, *elle est de dimension* 1 *en degré* 3, *et de dimension au moins* 2 *en degré* 4.

Un générateur β de $H^2(\mathfrak{s}, k)$ s'explicite de la façon suivante: soit U, $V \in \mathfrak{s}$, u et v des fonctions génératrices; alors

$$\beta(U, V) = g^3(u, v)(0)$$

la puissance g^3 du crochet de Poisson étant définie comme au §1, n° 1. Pour exploiter ce résultat (excessivement partiel, malheureusement), j'utiliserai le théorème suivant, dû à Gelfand et Fuks:

THÉORÈME 2. *On a un isomorphisme naturel entre les cohomologies $H^*(\mathfrak{s}, k)$ et $H^*(\mathfrak{S}, k[[T]])$ de $\mathfrak{S}$ opérant dans $k[[T]]$ par dérivation.*

On obtiendra une preuve élémentaire en adaptant les considérations du §3, n° 1; la méthode la plus rapide consiste à décrire le $\mathfrak{S}$-module $k[[T]]$ par induction:

$$k[[T]] = \mathrm{Hom}_{U\mathfrak{s}}(U\mathfrak{S}, k)$$

U désigne le foncteur algèbre enveloppante (noter que $U\mathfrak{S} = U\mathfrak{s} \otimes ST$); après quoi, pour comparer les deux groupes

$$H^*(\mathfrak{S}, k[[T]]) = \mathrm{Ext}^*_{U\mathfrak{S}}(k, k[[T]])$$
$$H^*(\mathfrak{s}, k) = \mathrm{Ext}^*_{U\mathfrak{s}}(k, k)$$

on utilise les «formules d'associativité» de [2], ch. XVI, §4 (formule (4) en particulier).

On passe de là facilement à la cohomologie $H^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ de $\mathfrak{P}$ opérant dans elle-même par l'adjointe; cohomologie qui est pertinente aux questions de déformations de $k[[T]]$ comme algèbre de Lie. Considérons la suite exacte d'algèbre de Lie:

$$0 \to k \to \mathfrak{P} \xrightarrow{\mathrm{grad}} \mathfrak{S} \to 0$$

le gradient U d'une fonction u étant défini par $\iota_U g = -du$, et k étant injecté comme fonctions constantes. L'application grad* injecte $C^*(\mathfrak{S}, k[[T]])$ dans $C^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$,

son image étant formé par les cochaînes ξ annulées quand l'un des arguments est une fonction constante, $\iota_1\xi=0$. D'autre part, on obtient une dérivation de $\mathfrak{P}$ (c'est-à-dire un 1-cocycle de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}$) en posant:

$$\alpha u=\theta_H u-2u$$

θ_H désigne la dérivation par le champ H des homothéties. On vérifie sans peine que tout cochaîne ξ s'écrit de façon unique

$$\xi=\alpha\wedge\xi'+\xi''$$

avec ξ' et ξ'' dans l'image de grad*, et on en déduit:

PROPOSITION 1. *La cohomologie* $H^*(\mathfrak{P},\mathfrak{P})$ *est le produit tensoriel de* $H^*(\mathfrak{S}, k[[T]])$, *injectée par* grad* *et de l'algèbre extérieure sur la dérivation* α.

(Il est clair que la dérivation α est extérieure: elle n'annule pas les constantes). Il n'est pas difficile de pister le 2-cocycle β non trivial dans $C^2(\mathfrak{s}, k)$, et de le retrouver dans $C^2(\mathfrak{P},\mathfrak{P})$ sous la forme

$$\beta(u, v)=g^3(u, v)$$

c'est-à-dire précisément le pilote de la déformation d'algèbre de Lie considérée au §1, n° 2: cette déformation n'était donc pas triviale.

2.2. Pour aborder le calcul de $H^*(\mathfrak{s}, k)$, nous allons distinguer dans $C^*(\mathfrak{s}, k)$ le sous-complexe $C^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$ des cochaînes ξ vérifiant $\theta_U\xi=\iota_U\xi=0$ quel que soit $U\in\mathfrak{sp}\subsetneq\mathfrak{s}$. On obtient une flèche $i: H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)\to H^*(\mathfrak{s}, k)$. D'autre part, le jet d'ordre 1 définit une projection $j_1:\mathfrak{s}\to\mathfrak{sp}$, ce qui donne un morphisme $j_1^*: H^*(\mathfrak{sp}, k)\to H^*(\mathfrak{s}, k)$.

PROPOSITION 2. *L'application* $j_1^*\otimes i: H^*(\mathfrak{sp}, k)\otimes H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)\to H^*(\mathfrak{s}, k)$ *est un isomorphisme.*

En effet $\mathfrak{sp}$ opère réductivement dans $C^*(\mathfrak{s}, k)$ (on se limite aux cochaînes d'ordre fini) et le terme E_2 de la suite spectrale de Hochschild-Serre relative à la sous-algèbre $\mathfrak{sp}$ ([3], §6) devient:

$$E_2^{p,q}=H^q(\mathfrak{sp}, k)\otimes H^p(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k).$$

Mais tous les termes de la «fibre» $E_2^{0,*}$ sont relevés comme cocycles par j_1^*: toutes les différentielles sont donc nulles ce qui fournit le résultat annoncé (Cf. [3] théorème 12).

La cohomologie scalaire de $\mathfrak{sp}$ est bien connue ([4], Th. 7.11.C): c'est une algèbre extérieure à ν générateurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$ ($\dim T = 2\nu$) de degrés respectifs $3, 7, \ldots, 4\nu - 1$. Il apparaît donc une classe $\eta = j_1^* \eta_1$ dans $H^3(\mathfrak{s}, k)$, et l'énoncé du théorème 1 devient:

THÉORÈME 1 bis. *La cohomologie $H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$ est nulle en degrés* 1 *et* 3*; elle est de dimension* 1 *en degré* 2*, et de dimension au moins* 2 *en degré* 4*. Les assertions sur les degrés* 3 *et* 4 *supposent la dimension de l'espace T au moins égale à* 4.

Une fois les instruments mis en place, les assertions concernant les degrés 1 et 2 n'offrent pas de difficulté réelle. En effet, l'algèbre $\mathfrak{P}$, c'est-à-dire $k[[T]]$ comme espace vectoriel, est un produit direct

$$\mathfrak{P} = \prod_{m \geqslant 0} S^m T^* ;$$

si $\xi, \eta \in T^*$, et k, l des entiers $\geqslant 0$,

$$[\xi^k, \eta^l] = kl(\xi\eta)\, \xi^{k-1} \eta^{l-1} \in S^{k+l-2} T^*$$

(les parenthèses désignent la forme fondamentale g sur T ou sur T^*). On définit une graduation d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{P}$ en posant

$$\mathfrak{P}^{(p)} = S^{p+2} T^* \qquad (p \geqslant -2)$$

et la dérivation extérieure α multiplie par p les éléments de $\mathfrak{P}^{(p)}$. La sous-algèbre $\mathfrak{s}$ s'obtient en supprimant les deux premiers termes de la graduation:

$$\mathfrak{s} = \prod_{k \geqslant 2} S^k T^* = \prod_{p \geqslant 0} \mathfrak{P}^{(p)}$$

dans la suite, on écrira $\mathfrak{s}^{(p)}$ plutôt que $\mathfrak{P}^{(p)}$. C'est ici le lieu de rappeler qu'en tant que $\mathfrak{sp}$-modules, les $S^k T$ et $S^k T^*$ sont *irréductibles* (et même absolument, c'est-à-dire qu'ils restent irréductibles après clôture algébrique des scalaires) (cf. [4], ch. VI).

Cela dit, les 1-cochaînes d'ordre fini forment une somme directe:

$$C^1(\mathfrak{s}, k) = \bigoplus_{m \geqslant 0} S^m T$$

et par conséquent, il n'y a pas de 1-cochaîne non nulle $\mathfrak{sp}$-invariante (c'est-à-dire annulée par tous les θ_U, $U \in \mathfrak{sp}$). A fortiori, $C^1(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k) = 0$, et $H^1(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k) = 0$.

On dira qu'une r-cochaîne f est de support $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ (où les p_i sont des entiers $\geqslant 0, p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_r \geqslant 0$) si sa valeur $f(U_1, \ldots, U_r)$ sur des champs $U_i \in \mathfrak{s}$ ne dépend que des composantes des U_i sur $\mathfrak{s}^{(p_1)}, \ldots, \mathfrak{s}^{(p_r)}$. Toute cochaîne (d'ordre fini) est somme de telles cochaînes; et une cochaîne f de support donné $(p_1, \ldots, p_r)$ s'identifie naturelle-

ment à une forme linéaire f' sur:

$$\mathfrak{s}^{(p_1)}\otimes\mathfrak{s}^{(p_2)}\otimes\cdots\otimes\mathfrak{s}^{(p_r)}$$

soumise à cette seule condition que si certains des p_i sont égaux, f' doit être alternée sur les arguments correspondants; si $U_1\in\mathfrak{s}^{(p_1)}$, etc.

$$f(U_1,\ldots,U_r)=f'(U_1,\ldots,U_r).$$

Il nous faut aussi tirer parti de la dérivation α. Noter d'abord que $\alpha(\mathfrak{s})\subset\mathfrak{s}$, et que sur $\mathfrak{s}$ (et $\mathfrak{S}$) α coïncide avec la dérivée de Lie θ_H du champ des homothéties. Si l'on fait opérer α (ou θ_H) sur les $C^r(\mathfrak{s},k)$ par transposition:

$$(\alpha f)(U_1,\ldots,U_r)=\sum_1^r f(U_1,\ldots,\alpha U_i,\ldots,U_r)$$

α est une dérivation de l'algèbre extérieure $C^*(\mathfrak{s},k)$, commutant avec la différentielle d; pour une r-cochaîne f de support $(p_1,\ldots,p_r)$,

$$\alpha f=(p_1+\cdots+p_r)f$$

ce que nous exprimerons en disant que f est de *poids* $(p_1+\cdots+p_r)$. On voit ainsi que les cochaînes de poids donné p forment un sous-complexe $C_p^*(\mathfrak{s},k)$, et que $C^*(\mathfrak{s},k)$ est la somme directe des $C_p^*(\mathfrak{s},k)$ pour $p\geqslant 0$. Comme α (ou θ_H) commute avec les θ_U, $U\in\mathfrak{sp}$, cette graduation passe au sous-complexe des basiques $C^*(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k)$, et de là à $H^*(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k)$.

Examinons maintenant le degré 2:

$$C^2(\mathfrak{s},k)=\bigoplus_{p\geqslant q\geqslant 0}\operatorname{Hom}(\mathfrak{s}^{(p)}\otimes\mathfrak{s}^{(q)},k)$$

à ceci près que si $p=q$, on doit se borner aux formes alternées. Prendre les cochaînes annulées par les ι_U, $U\in\mathfrak{sp}$, revient à limiter la somme à $p\geqslant q\geqslant 1$ (puisque $\mathfrak{sp}=\mathfrak{s}^{(0)}\subsetneq\mathfrak{s}$); et finalement

$$C^2(\mathfrak{s},\mathfrak{sp},k)=\bigoplus_{p\geqslant q\geqslant 1}\operatorname{Hom}(\mathfrak{s}^{(p)}\otimes\mathfrak{s}^{(q)},k)^{Sp}$$

avec la même réserve sur l'antisymétrie, et où $(?)^{Sp}$ est le foncteur «invariants par le groupe symplectique linéaire de T» (ou par l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}$, ce qui revient au même).

LEMME 1. *Si $l\neq m$, il n'y a pas de forme linéaire non nulle Sp-invariante sur $S^lT^*\otimes S^mT^*$. Si $l=m$, il y en a une seule (à scalaire près), qu'on peut définir par:*

$$x^l, y^l\to(x,y)^l$$

$(x, y\in T^*)$, et qui est symétrique ou antisymétrique selon que l est pair ou impair.

Preuve. La forme fondamentale g définit un isomorphisme Sp-équivariant de T et T^*, ce qui permet de considérer que nous cherchons les applications linéaires de S^lT dans S^mT Sp-équivariantes. Si $l \neq m$, il n'y en pas (à part 0) puisque les Sp-modules irréductibles S^lT et S^mT sont non isomorphes (lemme de Schur); et si $l=m$, il n'y en a qu'un seul (à scalaire près). Pour l'expliciter comme forme bilinéaire sur S^lT^*, on observe que les «puissances parfaites» x^l, $x \in T$, engendrent linéairement S^lT^*; il n'y a plus alors qu'à écrire une expression homogène de degré l sur chaque argument x, y, et Sp-invariante.

On notera β_p la forme bilinéaire ainsi définie sur $\mathfrak{s}^{(p)} = S^{p+2}T^*$; remarquer que ces formes sont non-dégénérées (à cause de l'irréductibilité des $\mathfrak{s}^{(p)}$ comme Sp-modules), et que β_0 est la forme de Killing sur $\mathfrak{s}^{(0)} = \mathfrak{sp}$. Enfin β_p est de poids $2p$.

Nous avons donc à présent entre les mains une base $\beta_1, \beta_3, \beta_5, \ldots$ de $C^2(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$. Toutes ces cochaînes étant de poids différents, la recherche des 2-cocycles sera achevée dès que nous saurons celles des β_p (p impair) qui sont fermées.

LEMME 2. *Soit ζ une forme r-linéaire alternée sur $\mathfrak{s}^{(1)} = S^3T^*$, Sp-invariante. Soit $\pi_1 : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}^{(1)}$ la projection naturelle. La r-cochaine $\pi_1^*\zeta \in C^r(\mathfrak{s}, k)$ est un cocycle $\mathfrak{sp}$-basique.*

Preuve. Que $\pi_1^*\zeta$ soit basique est évident; son support est $(1, 1, \ldots, 1)$. C'est le moment de rappeler la définition de la différentielle. Si f est une r-cochaîne,

$$df(U_1, \ldots, U_{r+1}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r+1} (-1)^{i+j} f([U_iU_j], U_{1, \ldots \hat{i} \ldots \hat{j} \ldots}, U_{r+1}).$$

Montrons que $d(\pi_1^*\zeta) = 0$. De toute façon, c'est une cochaîne $\mathfrak{sp}$-basique, ce qui limite la vérification à des arguments $U_i \in \mathfrak{s}^{(p_i)}$, $p_i \geqslant 1$. Alors dans tous les termes, le crochet $[U_iU_j]$ tombe dans un $\mathfrak{s}^{(p')}$, $p' \geqslant 2$, et on obtient 0.

Il résulte de ce lemme que β_1 est un 2-cocycle, sûrement non homologue à zéro vu l'absence de 1-cochaînes basiques.

LEMME 3. *Le cobord $d\beta_p \in C^3(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$ avec p impair $\geqslant 3$ a une composante non nulle de support $(p, p-1, 1)$.*

C'est-à-dire: la restriction de $d\beta_p$ à $\mathfrak{s}^{(p)} \otimes \mathfrak{s}^{(p-1)} \otimes \mathfrak{s}^{(1)}$ n'est pas identiquement nulle. Calculons-la sur des «puissances parfaites»:

$$\begin{aligned} \langle d\beta_p, x^{p+2} \wedge y^{p+1} \wedge z^3 \rangle &= 3(p+1)(y, z)\, \beta_p(x^{p+2}, y^p z^2) \\ &= 3(p+1)(y, z)(x, y)^p (x, z)^2, \end{aligned}$$

x, y, z variant dans T^*, cette expression n'est pas identiquement nulle.

Nous trouvons bien finalement que $H^2(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$ est de dimension 1, engendré par la classe de β_1. Il n'y a plus qu'à s'assurer que β_1 coïncide bien avec le 2-cocycle décrit

au n° 1, ce qui ne présente pas de difficultés (surtout si l'on fait jouer l'unicité dans le lemme 1).

2.3. J'en arrive à la section la plus pénible de la preuve; il s'agit de décrire $C^3(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$, puis $Z^3(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$.

LEMME 4. *Il n'existe de forme linéaire Sp-invariante non nulle sur $S^kT^*\otimes S^lT^*\otimes S^mT^*$ que si la somme des trois entiers k, l, m est paire, et si chacun d'eux est inférieur ou égal à la somme des deux autres. Auquel cas, toutes ces formes sont proportionnelles à la forme $f_{(k,l,m)}$ définie par:*

$$x^k, y^l, z^m \mapsto (x, y)^\gamma\,(x, z)^\beta\,(y, z)^\alpha \qquad (x, y, z \in T^*)$$

avec

$$\alpha = \frac{-k+l+m}{2} \qquad \beta = \frac{k-l+m}{2} \qquad \gamma = \frac{k+l-m}{2}.$$

En effet la théorie classique des invariants ([4], th. 6.1.A) indique que les formes invariantes sont du type indiqué. En ajustant les exposants α, β, γ de façon à ce que le degré en x soit k, etc., on est conduit aux expressions ci-dessus; et pour ce que ces dernières fournissent des entiers $\geqslant 0$, il faut que $k+l+m$ soit pair, et que le trio (k, l, m) constitue un triangle.

ANNEXE AU LEMME 4. *Si deux des entiers, disons k et l, sont égaux, la forme $f_{(k,l,m)}$ présente sur les deux premiers arguments une symétrie ou une antisymétrie selon que le troisième entier (ici m) et la demi-somme $(k+l+m)/2$ sont même parité ou non.*

Ceci va nous permettre d'indexer les 3-cochaînes invariantes par leur support. Précisons: soit (p, q, r) un support, $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 0$. Les 3-cochaînes invariantes de support (p, q, r) sont les formes linéaires invariantes sur:

$$S^{p+2}T^*\otimes S^{q+2}T^*\otimes S^{r+2}T^*$$

présentant les antisymétries correspondant aux égalités éventuelles entre p, q et r. Convenons de dire qu'un support (p, q, r) est admissible si les trois entiers $k=p+2$, $l=q+2$, $m=r+2$ satisfont les hypothèses du lemme 4 et, s'il y a des égalités entre eux, les conditions d'antisymétrie décrites dans l'annexe; enfin notons $f_{p,q,r} = f_{(p+2,q+2,r+2)}$. Alors les cochaînes $f_{p,q,r}$, (p, q, r) parcourant les trois admissibles, forment une base de l'espace $C^3(\mathfrak{s}, k)^{Sp}$; et si on se limite aux trios $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 1$, de l'espace $C^3(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$. Noter que le poids de $f_{p,q,r}$ est $p+q+r$, et qu'il est forcément pair.

Il s'agit maintenant de déteiminer les 3-cocyles. La décomposition de $C^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$ selon les poids de α permet d'abord de ne considérer que des cocycles de poids déterminé; un tel cocycle Z se présentera comme une somme de $f_{p,q,r}$, affectés de coefficients variés, indexée par les trios $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 1$ admissibles d'un poids déterminé. Rangeons les trios (p, q, r) dans l'ordre alphabétique: (p, q, r) précède (p', q', r') si $p > p'$, ou si $p = p'$ et $q > q'$, ou si $p = p'$, $q = q'$ et $r > r'$; et rangeons les termes de la somme Z dans cet ordre; nous pouvons normaliser le cocycle Z de façon que le terme de tête ait le coefficient 1. La démonstration va se faire en trois temps.

Premier temps: Il est exclu que le terme de tête soit un $f_{p,q,r}$ avec $r > 1$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que le terme de tête dans Z soit $f_{p,q,r}$, avec $r > 1$. Le cobord $df_{p,q,r}$ est une 4-cochaîne qui s'appuie sur les supports (p', q', r', s') obtenus en décomposant tour à tour chacun des entiers p, q, r de toutes les façons possibles en somme de deux entiers $\geqslant 1$; cela résulte de ce que:

$$\mathfrak{s} = \prod_{p \geqslant 0} \mathfrak{s}^{(p)},$$

est une graduation d'algèbre de Lie, et aussi de ce que $C^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$ est un sous-complexe. En particulier, $df_{p,q,r}$ a une composante de support $(p, q, r-1, 1)$, $p \geqslant q > r-1 \geqslant 1$, et il est assez clair que c'est le seul à en avoir une parmi les $df_{p',q',r'}$, $(p', q', r') \leqslant (p, q, r)$. Donc l'égalité $dZ = 0$ exige que la composante de support $(p, q, r-1, 1)$ dans $df_{p,q,r}$ soit nulle. Calculons-la: j'écris f pour $f_{p,q,r}$; et x, y, z, t varient dans T^*:

$$df(x^{p+2}, y^{q+2}, z^{r+1}, t^3) = -3(r+1)(z, t) f(x^{p+2}, y^{q+2}, z^r t^2)$$

quantité qui ne saurait être identiquement nulle: c'est la contradiction cherchée.

Intermède. Le terme de tête est donc un $f_{p,q,1}$, $p \geqslant q \geqslant 1$. Mais pour que le trio $(p, q, 1)$ soit admissible, il faut que $p+2 \leqslant (q+2)+3$, et que $(p+2)+(q+2)+(1+2)$ soit pair. Ceci ne laisse que deux possibilités: $(p, p-3, 1)$ et $(p, p-1, 1)$; dans un poids déterminé $2d$, la première se présente avant la seconde: $(d+1, d-2, 1) \geqslant$ $\geqslant (d, d-1, 1)$.

Deuxième temps: Il est exclu que le terme de tête dans le cocycle Z soit $f_{p,p-3,1}$.

Supposons le contraire. Evidemment, $p \geqslant 4$; d'autre part, $f_{4,1,1} = f_{(6,3,3)}$ est exclue par une symétrie partielle sur les deux derniers arguments. Donc $p \geqslant 5$. Le cobord $df_{p,p-3,1}$ a une composante de support $(p, p-4, 1, 1)$; et si *nous excluons provisoirement le cas* $p = 5$, le seul trio suivant $(p, p-3, 1)$ à en faire autant est $(p, p-4, 2)$. Ecrivons f pour $f_{p,p-3,1}$, g pour $f_{p,p-4,2}$; et soit λ le coefficient de g dans Z. La condition $dZ = 0$ exige que $df + \lambda dg$, restreinte à:

$$\mathfrak{s}^{(p)} \otimes \mathfrak{s}^{(p-4)} \otimes \mathfrak{s}^{(1)} \otimes \mathfrak{s}^{(1)}$$

soit nulle. Or:

$$df(x^{p+2}, y^{p-2}, z^3, t^3) = 3(p-2)(y, z) f(x^{p+2}, y^{p-3}z^2, t^3)$$
$$-3(p-2)(y, t) f(x^{p+2}, y^{p-3}t^2, z^3)$$
$$dg(x^{p+2}, y^{p-2}, z^3, t^3) = 9(z, t) g(x^{p+2}, y^{p-2}, z^2t^2).$$

C'est ici que je dois supposer la dimension de T au moins égale à 4, afin que les six produits (x, y), (x, z),... soient algébriquement indépendants ([4], th. 6.1.B). Le lemme 4, appliqué au trio $(p, p-3, 1)$, c'est-à-dire $(p+2, p-1, 3)$ en degrés sur ST^*, montre que $\alpha = 0$: dans l'expression de f, il n'y a pas de couplage entre les deux derniers arguments. Donc, par-delà les nécessaires polarisations, il est clair que (z, t) n'apparaît pas dans l'expression de df. Si donc $df + \lambda dg$ est aussi nulle qu'elle le prétend, λ est forcément nul, et la composante de df sur le support $(p, p-4, 1, 1)$ est nulle. Or, dans l'expression qui en est donnée ci-dessus, (y, t) n'apparaît pas dans le premier terme: c'est la contradiction désirée.

Reste en suspens le cas exceptionnel $p = 5$. Dans ce cas, le trio $(p, p-4, 2)$ n'est pas dans le bon ordre; et quand on l'y remet, il coincide avec $(5, 2, 1)$. Il s'avère ainsi que $df_{5,2,1}$ a une composante de support $(5, 1, 1, 1)$ et qu'aucun des trios qui suivent $(5, 2, 1)$ n'en fait autant. Si donc $f_{5,2,1}$ était le terme de tête d'un cocycle, la composante $(5, 1, 1, 1)$ de son cobord devrait être nulle. Calculons-la: (j'écris f pour $f_{5,2,1}$)

$$df(x^7, y^3, z^3, t^3) = 9(y, z) f(x^7, y^2z^2, t^3) - 9(y, t) f(x^7, y^2t^2, z^3)$$
$$+9(z, t) f(x^7, z^2t^2, y^3),$$

avec $x, y, z, t \in T^*$. D'un autre côte, pour $a, b, c \in T^*$,

$$f(a^7, b^4, c^3) = (a, b)^4 (a, c)^3$$

ce qui montre que (y, z) n'apparaîtra pas dans les deux derniers termes de l'expression de df, alors qu'il factorise dans le premier. Donc la composante $(5, 1, 1, 1)$ de $df_{5,2,1}$ est non nulle, ce qui termine le deuxième temps.

Intermède. Il résulte de ce qui précède que dans un poids $2p$ donné, il ne peut y avoir qu'un cocycle au plus (à scalaire près), qui sera piloté par $f_{p,p-1,1}$. Supposons p impair. On a vu au n° 2 que le bord de la 2-cochaîne $\beta_p \in C^2(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)$ a une composante non nulle de support $(p, p-1, 1)$: donc tout cocycle de poids $2p$ lui sera proportionnel. Nous concluons: *un 3-cocycle dont le terme de tête est $f_{p,p-1,1}$, avec p impair, est un cobord.*

Troisième temps: Il est exclu que le terme de tête d'un 3-cocycle soit $f_{p,p-1,1}$, avec p pair.

Evidemment, $p \geqslant 2$; nous allons supposer provisoirement $p \geqslant 4$. Le cobord $df_{p,p-1,1}$ a une composante de support $(p-1, p-1, 1, 1)$, et le seul trio admissible parmi ceux qui le suivent à en faire autant est $(p-1, p-1, 2)$. Posons $f = f_{p,p-1,1}$, $g = f_{p-1,p-1,2}$, et soit λ le coefficient de g dans le cocycle Z piloté par f. Pour exprimer f et g, nous allons utiliser les formes bilinéaires β_p introduites au n° 2 après le lemme 1:

$$\begin{aligned}
&\beta_p(x^{p+2}, y^{p+2}) = (x, y)^{p+2} \\
&f(x^{p+2}, y^{p+1}, z^3) = (y, z)\, \beta_p(x^{p+2}, y^p z^2) \\
&g(x^{p+1}, y^{p+1}, z^4) = (x, y)^{p-1}\, \beta_2(x^2 y^2, z^4)
\end{aligned}$$

la première formule est la définition de β_p; les deux autres sont forcément vraies à scalaire près, puisqu'elles définissent des invariants ayant les degrés requis, et que ceux-ci sont uniques d'après le lemme 4.

Nous avons vu que $dZ = 0$ exige que la composante de $df + \lambda dg$ sur le support $(p-1, p-1, 1, 1)$ soit nulle. On trouve d'autre part:

$$\begin{aligned}
df(a^{p+1}, b^{p+1}, c^3, d^3) &= 3(p+1)\,[(a, c) f(a^p c^2, b^{p+1}, d^3) - (a, d) f(a^p d^2, b^{p+1}, c^3) \\
&\quad - (b, c) f(b^p c^2, a^{p+1}, d^3) + (b, d) f(b^p d^2, a^{p+1}, c^3) \\
&= 3(p+1)\,[(a, c)(b, d)\, \beta_p(a^p c^2, b^p d^2) \\
&\quad - (a, d)(b, c)\, \beta_p(a^p d^2, b^p c^2) \\
&\quad - (b, c)(a, d)\, \beta_p(b^p c^2, a^p d^2) + (b, d)(a, c)\, \beta_p(b^p d^2, a^p c^2)]
\end{aligned}$$

et c'est maintenant que joue la parité de p: si p était impair, β_p serait antisymétrique et on trouverait 0; mais comme nous supposons p pair,

$$\begin{aligned}
df(a^{p+1}, b^{p+1}, c^3, d^3) &= 6(p+1)\,[(a, c)(b, d)\, \beta_p(a^p c^2, b^p d^2) \\
&\quad - (a, d)(b, c)\, \beta_p(a^p d^2, b^p c^2)].
\end{aligned}$$

Du côté de g, le calcul donne:

$$\begin{aligned}
dg(a^{p+1}, b^{p+1}, c^3, d^3) &= -9(c, d)\, g(a^{p+1}, b^{p+1}, c^2 d^2) \\
&= -9(c, d)(a, b)^{p-1}\, \beta_2(a^2 b^2, c^2 d^2).
\end{aligned}$$

Cette expression ne contient pas $(a, b)^p$. Au contraire, dans l'expression de $df(\ldots)$, les polarisations font apparaître (à scalaire près):

$$(a, b)^p\, [(a, c)(b, d) - (a, d)(b, c)]\, (c, d)^2$$

il est donc impossible que $df + \lambda\, dg$ soit nulle sur le support $(p-1, p-1, 1, 1)$. *La possibilité d'un 3-cocycle piloté par $f_{p,p-1,1}$ avec p pair, $p \geqslant 4$, se trouve éliminée.*

Epilogue. Il nous reste à examiner la cochaîne exceptionnelle $f_{2,1,1}$. Observer que c'est la seule 3-cochaîne de poids 4: il s'agit donc de savoir si c'est ou non un cocycle. Son bord est entièrement porté par le support (1, 1, 1, 1).

LEMME 5. *Les* 4-*cochaînes* $\mathfrak{sp}$-*basiques de support* (1, 1, 1, 1) *(ou de poids* 4, *ce qui revient au même) forment un espace de dimension* 3.

Soit F une forme quadrilinéaire invariante sur $\mathfrak{s}^{(1)}=S^3T^*$; avec x, y, z, t variant dans T^*, $F(x^3, y^3, z^3, t^3)$ va se présenter comme une somme de monômes:

$$(x, y)^\alpha (x, z)^\beta (x, t)^\gamma (y, z)^\delta (y, t)^\varepsilon (z, t)^\zeta$$

ceci d'après la théorie des invariants ([4], th. 6.1.A). En ajustant les exposants $\alpha, \beta, \ldots$ pour avoir le degré 3 sur chaque variable, on trouve, à l'ordre près des variables, trois possibilités:

$$(x, y)^3 (z, t)^3$$
$$(x, y)^2 (x, z) (y, t) (z, t)^2$$
$$(x, y) (x, z) (x, t) (y, z) (y, t) (z, t).$$

Si l'on antisymétrise ces polynômes, le premier donne $\beta_1 \wedge \beta_1$; le troisième est spontanément alterné, il sera noté δ; pour le second, on obtient une somme de trois termes,

$$(x, y)^2 [(x, z) (y, t)-(x, t) (y, z)] (z, t)^2$$

et les deux termes analogues fournis par les partitions $(x, z; y, t)$ et $(x, t; y, z)$ du stock de variables; cette cochaîne sera notée γ.

Il est commode d'écrire:

$$f_{2,1,1}(a^4, b^3, c^3)=(b, c)\, \beta_2(a^4, b^2c^2)$$

en sorte que:

$$\begin{aligned} df_{2,1,1}(x^3, y^3, z^3, t^3)= -18\, [&(x, y) (z, t)\, \beta_2(x^2y^2, z^2t^2) \\ &-(x, z) (y, t)\, \beta_2(x^2z^2, y^2t^2) \\ &+(x, t) (y, z)\, \beta_2(x^2t^2, y^2z^2)]. \end{aligned}$$

Par polarisation,

$$\beta_2(x^2y^2, z^2t^2)=\tfrac{1}{6}[(x, z)^2 (y, t)^2+4(x, z) (x, t) (y, z) (y, t)+(x, t)^2 (y, z)^2]$$

et après la substitution finale, on obtient:

$$df_{2,1,1}=3\gamma-36\delta.$$

Ce résultat a deux conséquences. D'abord, $f_{2,1,1}$ n'est pas un cocycle, et ceci achève de démontrer que $H^3(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k)=0$. D'autre part, toutes les 4-cochaînes de support (1, 1, 1, 1) sont des 4-cocycles (lemme 2 du n° 2) de poids 4; s'ils sont cohomologues à zéro, c'est qu'on peut leur trouver une primitive de poids 4, laquelle ne peut être que $f_{2,1,1}$. On voit ainsi que $\dim H^4(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, k) \geqslant 2$.

§3. Cohomologie de champs symplectiques différentiables

3.1. Dans ce paragraphe et dans le suivant, X désignera une variété symplectique, g son tenseur fondamental, $\mathscr{E}_X$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur X équipée du crochet de Poisson, $\mathscr{S}_X$ l'algèbre des champs de vecteurs symplectiques. Je noterai $C_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ le complexe des cochaînes sur $\mathscr{S}_X$ à valeurs dans $\mathscr{E}_X$ (où $\mathscr{S}_X$ opère par dérivation) qui s'expriment comme opérateurs multidifférentiels; et $C_\Delta^*(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$ l'objet analogue relatif à l'action adjointe de $\mathscr{E}_X$ sur elle-même. Mon but dans cette section est de montrer que la connaissance de $H^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ (que je n'ai pas) et des classes caractéristiques ordinaires de X permet le calcul des cohomologies $H_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ et $H_\Delta^*(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$; d'ailleurs je m'occuperai surtout de la première.

Il sera commode d'utiliser la technique des faisceaux. Soit $\mathscr{C}^*$ le faisceau différentiel des germes de cochaînes de champs symplectiques dans les fonctions (c'est un faisceau de germes d'opérateurs multidifférentiels d'un certain type, dont les sections globales constituent $C_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$), et $'\mathscr{C}^*$ le faisceau correspondant pour les fonctions (dont les sections globales constituent $C_\Delta^*(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$).

LEMME 1. *Les faisceaux de cohomologie locale $\mathscr{H}^*(\mathscr{C}^*)$ et $\mathscr{H}^*('\mathscr{C}^*)$ sont des faisceaux constants, de fibre $H^*(\mathfrak{S}, \mathbf{R}[[T]]) = H^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ et $H^*(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ respectivement.*

(On note $\mathfrak{P}, \mathfrak{S}, \mathfrak{s}$ les algèbres formelles du §2 portées par un espace vectoriel symplectique T de même dimension que X).

Soit $a \in X$, et C une carte symplectique centrée en a (i.e. dans ces coordonnées locales, les composantes g^{ij} du tenseur fondamental sont des *constantes*). Une cochaîne $f \in \mathscr{C}_a^*$, une 2-cochaîne par exemple, s'écrit en coordonnées:

$$f(U, V) = \sum f_{\alpha\beta} \cdot D^\alpha u \cdot D^\beta v$$

où U, V sont des champs symplectiques au voisinage de a, u et v des fonctions génératrices (uniques à constante près); la sommation porte sur les multi-indices de dérivation α, β non nuls (u et v ne doivent intervenir que par leurs gradients), et les $f_{\alpha\beta}$ sont des germes de fonctions C^∞ en a.

Deux sous-complexes se manifestent. D'abord les formes différentielles, qui correspondent aux termes d'ordre 1 sur tous les arguments: $|\alpha| = |\beta| = 1$. Ensuite le sous-complexe $B_{\mathfrak{T}}\mathscr{C}^*$ des cochaînes basiques par rapport à la sous-algèbre $\mathfrak{T}$ des transla-

tions de la carte C: ce sont les cochaînes dont tous les indices de dérivation α, β sont d'ordre >1 et dont les coefficients $f_{\alpha\beta}$ sont des fonctions constantes. Maintenant, le phénomène clé, c'est que la carte C identifie $B_{\mathfrak{X}}\mathscr{C}^*$ au complexe $C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ porté par l'espace vectoriel modèle T. Une façon pédestre de le voir est d'observer que $B_{\mathfrak{X}}\mathscr{C}^*$ est l'algèbre extérieure sur $\mathbf{R}$ engendrée par les 1-cochaînes ω_α

$$\omega_\alpha : U \mapsto D^\alpha u \in \mathscr{E}_a \qquad |\alpha| \geqslant 2$$

que $C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ est la $\mathbf{R}$-algèbre extérieure engendrée par les 1-cochaînes

$$\bar{\omega}_\alpha : U \mapsto D^\alpha u(0) \in \mathbf{R} \qquad |\alpha| \geqslant 2$$

et que les formules de dérivation de ω_α et $\bar{\omega}_\alpha$ sont les mêmes:

$$d\omega_\alpha = -\sum_{i,j} \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ |\beta|,\, |\gamma| \geqslant 1}} g^{ij} \binom{\alpha}{\beta} \omega_{\beta+\varepsilon_i} \wedge \omega_{\gamma+\varepsilon_j}.$$

Cela étant, il est clair que sur la carte C, le faisceau $\mathscr{C}^*$ se décompose en produit tensoriel:

$$\mathscr{C}^* = \Omega^* \otimes C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$$

du faisceau des germes de formes différentielles Ω^* et de l'espace vectoriel $C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$. Passant à la cohomologie, on obtient un isomorphisme de $\mathscr{H}^*(\mathscr{C}^*)$ et du faisceau constant $H^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ qui *a priori* est lié à la carte C, comme le précédent. Toutefois, l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ opère trivialement sur sa cohomologie (c'est la formule de Cartan: $\theta_U = di_U + i_U d$, $U \in \mathfrak{s}$) et donc aussi le groupe (connexe) des jets de difféomorphismes symplectiques stabilisant l'origine. Par conséquent, l'isomorphisme de $\mathscr{H}^*(\mathscr{C}^*)$ et du faisceau constant de fibre $H^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ est insensible au choix de la carte symplectique en a, et donc globalise sur X.

Le faisceau de cohomologie locale $\mathscr{H}^*('\mathscr{C}^*)$ est justiciable d'un traitement analogue; on s'appuie sur la suite exacte de faisceaux:

$$0 \to \mathbf{R} \to \mathscr{E} \xrightarrow{\text{grad}} \mathscr{S} \to 0$$

et on paraphrase les considérations du §2, n° 1.

Une fois observé que les faisceaux $\mathscr{C}^*$ et $'\mathscr{C}^*$ sont fins (ce sont des germes d'opérateurs multidifférentiels), nous nous trouvons en position pour appliquer les théorèmes classiques de cohomologie des faisceaux ([5], th. 4.6.1., p. 178).

PROPOSITION 1. *Les cohomologies $H^*_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ et $H^*_\Delta(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$ sont les abou-*

tissements respectifs de deux suites spectrales:

$$E_2^{p,q} = H^q(\mathfrak{s}, \mathbf{R}) \otimes H^p(X, \mathbf{R})$$
$$'E_2^{p,q} = H^q(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) \otimes H^p(X, \mathbf{R}).$$

3.2. Pour aller plus avant, il nous faut rappeler une construction qui est devenue traditionnelle dans ce genre de questions. Soit X une variété (j'oublie un instant la structure symplectique), et R_1X le fibré des repères d'ordre 1 sur X: fibré principal de groupe $GL(n, \mathbf{R})$. Alors la cohomologie du complexe $\Omega^*(R_1X)^{GL(n,\mathbf{R})}$ des formes différentielles sur R_1X invariantes par le groupe structural s'interprète comme la cohomologie d'un espace $Q(X)$ ainsi construit: le complexifié du fibré tangent, $T^{\mathbf{C}}X$, a pour groupe structural $GL(n, \mathbf{C})$; on fait une réduction au groupe compact maximal $U(n)$, et $Q(X)$ est le fibré $U(n)$-principal correspondant. Pareillement, pour une variété symplectique X, soit RS_1X le fibré des repères symplectiques d'ordre 1 (i.e., contrairement au n° 1, ceux dans lesquels la forme fondamentale prend la forme réduite positions-impulsions): c'est un fibré principal de groupe $Sp(n, \mathbf{R})$. Alors la cohomologie du complexe $\Omega^*(RS_1X)^{Sp(n,\mathbf{R})}$ s'interprète comme la cohomologie d'un espace $QS(X)$ ainsi construit: le complexifié du fibré tangent a pour groupe structural $Sp(n, \mathbf{C})$; on fait une réduction au groupe compact maximal $Sp(n)$ (qui est aussi le compact maximal du groupe linéaire quaternionique), et $QS(X)$ est le fibré $Sp(n)$-principal ainsi construit. Cette construction permet d'énoncer le théorème:

THÉORÈME 2. *On a un isomorphisme naturel:*

$$H_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X) = H^*(QS(X), \mathbf{R}) \otimes H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R}).$$

Le calcul de la cohomologie de $QS(X)$ est un problème standard de classes caractéristiques; la faiblesse du théorème est l'ignorance de $H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R})$. Toutefois, je n'aurai à l'appliquer qu'en degré $\leqslant 3$.

Pour prouver commodément ce théorème, il faut réinterpréter $C_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ comme le complexe $\Omega^*(RS_\infty X)^G$ des formes différentielles sur le fibré $RS_\infty X$ des repères symplectiques d'ordre infini, invariantes par le groupe structural G des jets de difféomorphismes symplectiques préservant l'origine (par formes différentielles sur $RS_\infty X$, on entend évidemment la limite inductive des formes sur les espaces de repères RS_kX d'ordre fini). L'interprétation se fait de la façon suivante: si $U_1, \ldots, U_p \in \mathscr{S}_X$, ils se relèvent comme champs de vecteurs sur $RS_\infty X$, G-invariants; si ξ est une forme G-invariante sur $RS_\infty X$, la fonction $\langle \xi, U_1 \wedge \ldots \wedge U_p \rangle$ est G-invariante, donc c'est une fonction sur X (cf. [6]).

Cela dit, on reprend la décomposition du §2, n° 1:

$$H^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R}) = H^*(\mathfrak{sp}, \mathbf{R}) \otimes H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R})$$

et on examine successivement le sort de $H^*(\mathfrak{sp}, \mathbf{R})$, ou plutôt de ses générateurs primitifs η_i, puis de $H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R})$.

(1) La projection $\pi: RS_\infty X \to RS_1 X$, qui correspond dans les algèbres de Lie structurales, au morphisme $j_1: \mathfrak{s} \to \mathfrak{sp}$, induit:

$$\pi^*: \Omega^*(RS_1 X)^{Sp(n,\mathbf{R})} \to \Omega^*(RS_\infty X)^G.$$

La donnée d'une connexion permet de construire des formes $\tilde{\eta}_i \in \Omega^*(RS_1 X)^{Sp(n,\mathbf{R})}$ égales à η_i sur les fibres, dont le bord $d\tilde{\eta}_i$ est basique, et représente la classe de Pontriagin symplectique $p_i(X)$. Au moyen de π^* on remonte $\tilde{\eta}_i$ dans $\Omega^*(RS_\infty X)^G = C_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$, et on voit que dans la première suite spectrale de la proposition 1,

$$\eta_i \in H^{4i-1}(\mathfrak{sp}, \mathbf{R}) \overset{j_1^*}{\hookrightarrow} H^{4i-1}(\mathfrak{s}, \mathbf{R}) = E_2^{0,4i-1}$$

η_i transgresse vers $p_i \in H^{4i}(X, \mathbf{R}) = E_2^{4i,0}$. Dès lors, la sous-suite spectrale engendrée par $j_1^* H^*(\mathfrak{sp}, \mathbf{R})$ et $H^*(X, \mathbf{R})$ s'organise comme la suite spectrale de Leray du fibré $QS(X)$ (ou plutôt du complexe $\Omega^*(RS_1 X)^{Sp(n,\mathbf{R})}$).

(2) Tout revient maintenant à démontrer que les classes de:

$$H^q(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R}) \hookrightarrow E_2^{0,q}$$

ont des relèvements fermés dans $\Omega^*(RS_\infty X)^G = C_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$. J'utiliserai pour ce faire une technique due à J. L. Koszul [7]. La projection

$$j_1: G \to Sp(n, \mathbf{R})$$

a pour fibre un groupe nilpotent contractile. Donc il existe une section

$$\sigma: RS_1 X \to RS_\infty X$$

qu'on peut considérer comme une application G-équivariante

$$\sigma: RS_\infty X \to Sp(n, \mathbf{R}) \backslash G$$

(G opère à droite sur les deux espaces). Il en résulte un morphisme de complexes:

$$\sigma^*: C^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R}) = \Omega^*(Sp(n, \mathbf{R}) \backslash G)^G \to \Omega^*(RS_\infty X)^G.$$

C'est cette flèche σ^* qui effectue le relèvement d'un cocycle $\zeta \in C^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R})$ comme cocycle dans $C_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ (il n'est pas difficile de vérifier que $\sigma^*\zeta$ coïncide avec ζ sur les fibres de $RS_\infty X$, (cf. [7], p. 140, (1.2)). Une façon d'énoncer ce résultat est de dire que les classes dans $H_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ ainsi obtenues à partir de classes dans $H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R})$ sont *non-caractéristiques*.

Pour ce qui est de $C_\Delta^*(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$, sa suite spectrale ne diffère de la précédente que par l'ajout de la dérivation extérieure $\alpha \in H^1(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ (§2, n° 1); en fait $\alpha \in H^1(\mathfrak{P}, \mathfrak{sp}, \mathfrak{P}) \simeq {}'E_2^{0,1}$ et on peut s'assurer que α transgresse vers la classe de la forme fondamentale dans $H^2(X, \mathbf{R}) = E_2^{2,0}$ (cf. [8]).

3.3. Le relèvement de la classe $\beta \in H^2(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R})$ peut s'expliciter assez simplement. Convenons de dire qu'une connexion linéaire D sur la variété symplectique X est *adaptée* si elle est sans torsion et si $Dg=0$. De telles connexions sont abondantes localement, et supportent les recollements par partition de l'unité.

THÉORÈME 3. *Un calcul universel permet de construire, sur toute variété symplectique équipée d'une connexion linéaire adaptée, un opérateur bidifférentiel*

$$\lambda_1 : \mathscr{E}_X \times \mathscr{E}_X \to \mathscr{E}_X$$

bilinéaire sur $\mathbf{R}$, *alterné, d'ordre* 3 *sur chaque argument, annulant les constantes, et qui est un* 2*-cocycle non trivial pour la représentation adjointe de l'algèbre de Poisson* $\mathscr{E}_X$.

En fait, on va faire apparaître λ_1 dans $Z^2(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$, où il relèvera $\beta \in H^2(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R}) = E_2^{0,2}$; après quoi, si u et v sont deux fonctions, de gradients U et V, on posera $\lambda_1(u, v) = \lambda_1(U, V)$. Nous nous inspirons ici d'une construction de J. L. Koszul ([7], prop. 6.1).

Faisons observer tout d'abord que si D et D' sont deux connexions adaptées, leur différence $D-D'$ peut être considérée comme une section de S^3T^*X: pour A, B, C champs de vecteurs sur X, on pose:

$$A, B, C \mapsto g(D_A B - D'_A B, C)$$

la symétrie sur A et B résulte de l'absence de torsion, et la symétrie sur B et C de la condition $Dg=0$. Ceci s'applique à une connexion D' déduite de D par un difféomorphisme symplectique; et en passant au cas infinitésimal, on voit que les dérivées de Lie $\theta_U D$ d'une connexion adaptée D par un champ symplectique U sont des sections de S^3T^*X. Dans un système de coordonnées où les coefficients g_{ij} de g sont constants, et où u est une fonction génératrice de U,

$$(\theta_U D)_{ijk} = u_{|ijk} - \sum{}' \Gamma_{ij}^h u_{|kh} + u_{|h} g^{hh'} g_{kk'} \Gamma_{ij|h'}^{k'}$$

les Γ_{jk}^i sont les coefficients de D, et $\sum'$ indique une sommation circulaire sur i, j, k.

Nous disposons maintenant d'un 1-cocycle $U \mapsto \theta_U D$ de $\mathscr{S}_X$ à valeurs dans l'expace $\Gamma_X S^3T^*X$ des formes différentielles symétriques de degré 3, sur lesquelles $\mathscr{S}_X$ opère par dérivation de Lie; ce cocycle n'est sûrement pas trivial, puisqu'il n'y a pas de connexion invariante par tous les difféomorphismes symplectiques.

D'autre part, la forme g définit sur S^3T^*X une forme bilinéaire alternée g^3:

$$g^3(\xi^3, \eta^3) = g(\xi, \eta)^3$$

pour $\xi, \eta \in T^*X$; et cette forme est invariante par l'action linéaire tangente des difféomorphismes symplectiques. Donc l'application:

$$\lambda_1(U, V) = g^3(\theta_U D, \theta_V D)$$

est un 2-cocycle de $\mathscr{S}_X$ dans $\mathscr{E}_X$. En coordonnées locales comme précédemment,

$$\lambda_1(U, V) = g^{ii'} g^{jj'} g^{kk'} (u_{|ijk} - \cdots)(v_{|i'j'k'} - \cdots)$$

ce qui manifeste que le symbole principal est bien le 2-cocycle β tel qu'il a été décrit au §2, n° 1, prop. 1. Dire que le calcul est universel, c'est dire que si l'on a une autre variété X', équipée de structures analogues, et un difféomorphisme local de (X, g, D) et (X', g', D'), il échange les opérateurs λ_1 construits sur l'une et sur l'autre: c'est bien évident.

Nous disposons maintenant d'une déformation infinitésimale de l'algèbre de Poisson $\mathscr{E}_X$. La question se pose dès lors, qui sera débattue au §4: est-ce que λ_1, à l'instar du cocycle formel β qu'il relève, est le pilote d'une déformation formelle de $\mathscr{E}_X$?

3.4. Mais nous aurons besoin de deux variantes, un peu techniques, de la proposition 1 du n° 1.

Tout d'abord, soit A une pièce de X, c'est-à-dire une sous-variété à bord lisse de même dimension. Soit $C^*_A(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X, A)$ le sous-espace des cochaînes identiquement nulles sur A, et ${}_A\mathscr{C}^*$ le faisceau correspondant. Dans la représentation locale du n° 1, ce sont les cochaînes dont les coefficients $f_{\alpha\beta\ldots}$ sont des fonctions identiquement nulles sur A. Il en résulte une décomposition locale:

$${}_A\mathscr{C}^* = {}_A\Omega^* \otimes C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$$

où ${}_A\Omega^*$ désigne le faisceau des germes de formes différentielles nulles sur A. Ce faisceau est fin; sa cohomologie locale est nulle en degré >0 (c'est une variante facile du lemme de Poincaré), et en degré 0 on obtient un certain faisceau ${}_A\mathbf{R}$ dont la cohomologie sur X donnera la cohomologie des formes différentielles sur X nulles sur A, c'est-à-dire $H^*(X, A, \mathbf{R})$ (cf. [9], ch. XII).

Revenant à ${}_A\mathscr{C}^*$, nous voyons d'abord que c'est un sous-complexe de $\mathscr{C}^*$, et que sa cohomologie locale est:

$$\mathscr{H}^*({}_A\mathscr{C}^*) = {}_A\mathbf{R} \otimes H^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R}).$$

En outre ${}_A\mathscr{C}^*$ est un faisceau fin. Donc:

PROPOSITION 1 bis. *La cohomologie* $H_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X; A)$ *de* $C_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X; A)$ *est l'aboutissement d'une suite spectrale:*

$$E_2^{p,q} = H^q(\mathfrak{s}, \mathbf{R}) \otimes H^p(X, A, \mathbf{R}).$$

La deuxième variante porte sur la fibre, et nécessite un bref retour sur la situation formelle. Soit $'F_m C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ l'espace des cochaînes nulles dès que l'un des arguments appartient à un $\mathfrak{s}^{(p)}$, $p > m$: ce sont les cochaînes sur l'algèbre quotient:

$$\mathfrak{s} / \bigoplus_{p>m} \mathfrak{s}^{(p)}$$

ou dans les notations du n° 1, l'algèbre extérieure sur les $\bar{\omega}_\alpha$, $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m+2$. Soit d'autre part:

$$''F_s C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R}) = \bigoplus_{p \leqslant s} C_p^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$$

la somme des cochaînes de poids $\leqslant s$; une base en est donnée par les:

$$\bar{\omega}_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}_{\alpha_q} \quad \text{avec} \quad |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_q| - 2q \leqslant s.$$

Ce sont deux filtrations croissantes d-stables de $C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$; on notera

$$'F_m{}''F_s C^* = 'F_m C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R}) \cap ''F_s C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R}).$$

LEMME 2. *Dès que* $m \geqslant 1$ *et* $s \geqslant 2$, *l'injection* $'F_m{}''F_s C^* \to C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ *induit un isomorphisme des cohomologies de degré* $\leqslant 3$.

En effet, pour m et $s \geqslant 0$, on a aussi une factorisation

$$H^*('F_m{}''F_s C^*) = H^*(\mathfrak{sp}, \mathbf{R}) \otimes H^*('F_m{}''F_s C^*, \mathfrak{sp})$$

avec la cohomologie $\mathfrak{sp}$-basique, et il suffit de voir que celle-ci coïncide avec $H^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R})$ en degré $\geqslant 3$. Or les 1-cochaînes basiques sont aussi nulles dans $'F_m{}''F_s C^*$ que dans $C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$; le 2-cocycle de base $\beta = \beta_1$ est dans le sous-complexe dès que $m \geqslant 1$ et $s \geqslant 2$; quant aux 3-cocycles du sous-complexe, ce sont des 3-cocycles de $C^*(\mathfrak{s}, \mathfrak{sp}, \mathbf{R})$, donc des $d\beta_p$ (§2, n° 3): il n'y a plus qu'à constater que $d\beta_p$ n'est dans le sous-complexe que si β_p y est déjà, ce qui est trivial.

Transplantons maintenant ces deux filtrations sur $C_\Delta^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$, ou plutôt sur le faisceau $\mathscr{C}^*$ correspondant. Relativement à une carte symplectique C, nous avons une factorisation:

$$\mathscr{C}^* = \Omega^* \otimes C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$$

et nous poserons:

$$'F_m\mathscr{C}^* = \Omega^* \otimes {}'F_m C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$$
$$''F_s\mathscr{C}^* = \Omega^* \otimes {}''F_s C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R}).$$

Comme les filtrations $'F$, $''F$ sur $C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ sont invariantes par le groupe des jets de difféomorphismes symplectiques préservant l'origine, les $'F$, $''F$ sur $\mathscr{C}^*$ sont indépendantes du choix de la carte C. Une autre façon de voir consiste à observer que l'identification de $\mathscr{C}^*$ à $\Omega^* \otimes C^*(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ est canonique *pour le symbole principal*, et que la contrainte porte sur lui: pour $'F_m$, l'ordre de dérivation sur la fonction génératrice de chaque argument ne doit pas dépasser $m+2$; pour $''F_s$, la somme des ordres des dérivations d'ordre $\geqslant 3$, qui sont en nombre r, ne doit pas dépasser $s+2r$. On peut aussi remarquer que

$$'F_m C^*(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X) = \Omega^*(RS_{m+2}X)^G$$

dans les notations du n° 2.

Toujours est-il que les faisceaux:

$$'F_m\mathscr{C}^*,\ ''F_s\mathscr{C}^*,\ 'F_m{}''F_s\mathscr{C}^* = 'F_m C^* \cap {}''F_s\mathscr{C}^*$$

sont aussi fins que les précédents; si l'on forme la suite spectrale de Godement pour le faisceau $'F_m{}''F_s\mathscr{C}^*$, avec $m \geqslant 1$, $s \geqslant 2$, on constate, compte-tenu du lemme 2, qu'elle coïncide avec la suite spectrale du faisceau $\mathscr{C}^*$ (prop. 1) en degré complémentaire $q \leqslant 3$. Donc:

PROPOSITION 2. *Dès que $m \geqslant 1$ et $s \geqslant 2$, l'injection*

$$'F_m{}''F_s C^*_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X) \to C^*_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$$

induit un isomorphisme des cohomologies de degré $\leqslant 3$.

Noter pour finir qu'on peut croiser les deux variantes, la relative et la filtrée, et considérer les complexes

$$'F_m{}''F_s C^*_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X; A)$$

relatifs à une pièce A. Les techniques précédentes donnent immédiatement:

PROPOSITION 2bis. *Soit A une pièce de X. Dès que $m \geqslant 1$ et $s \geqslant 2$, l'injection:*

$$'F_m{}''F_s C^*_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X; A) \to C^*_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X; A)$$

induit un isomorphisme des cohomologies de degré $\leqslant 3$.

§4. Déformation covariante du crochet de poisson

4.1. Les notations du §3 restent en vigueur: X est une variété symplectique, $\mathscr{E}_X$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur X, munie du crochet de Poisson, et $\mathscr{S}_X$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ symplectiques. Forts des résultats du précédent paragraphe, nous pouvons maintenant viser l'objectif principal du présent travail.

THÉORÈME 3. *Soit X une variété symplectique, dont nous supposons que $H^3(X, \mathbf{R})=0$. Il existe des opérateurs bidifférentiels λ_i sur X*

$\lambda_i : \mathscr{E}_X \times \mathscr{E}_X \to \mathscr{E}_X$

bilinéaires sur $\mathbf{R}$, *alternés, annulant les constantes, d'ordre* $2i+1$ *sur chaque argument, tels que la série:*

$$[u, v]_t = [u, v] + \sum_{i \geq 1} \frac{t^i}{(2i+1)!} \lambda_i(u, v) \qquad (u, v \in \mathscr{E}_X, \quad t \text{ paramètre})$$

soit une déformation formelle non triviale du crochet de Poisson sur $\mathscr{E}_X$.

En d'autres termes, la loi $[u, v]_t$, qui est alternée, vérifie l'identité de Jacobi. Ce qu'on va voir en fait, c'est que si l'on a construit des opérateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, ayant pour symboles principaux les puissances impaires du crochet de Poisson (cf. §1, n° 2), en sorte que la loi:

$$[u, v]_t^{(k)} = [u, v] + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{t^i}{(2i+1)!} \lambda_i(u, v)$$

vérifie l'identité de Jacobi à l'ordre k (c'est-à-dire modulo $0(t^{k+1})$), alors il existe un opérateur λ_{k+1}, dont le symbole principal est la puissance $(2k+3)$ème du crochet de Poisson, et tel que:

$$[u, v]_t^{(k+1)} = [u, v]_t^{(k)} + \frac{t^{k+1}}{(2k+3)!} \lambda_{k+1}(u, v)$$

vérifie l'identité de Jacobi à l'ordre $k+1$. Cette déformation est non triviale dans le sens que λ_1 n'est pas cohomologue à zéro dans $C_\Delta^*(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$. Si X est équipée d'une connexion adaptée D, on peut prendre pour λ_1 l'opérateur fourni par le théorème 2.

Je ne vois pas comment aborder le légitime problème de la convergence de la série; la déformation garde un caractère formel. Je ne sais pas non plus si l'hypothèse topologique $H^3(X, \mathbf{R})=0$ est nécessaire ou superflue (voir les remarques du début du n° 5). Les opérateurs λ_i seront construits comme 2-cochaînes dans $C_\Delta^2(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$, et relevés dans $C_\Delta^2(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$ par le gradient:

$$\lambda_i(u, v) = \lambda_i(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$$

comme aussi bien le crochet de Poisson lui-même; d'ailleurs on posera

$$\lambda_0(u, v) = [u, v] = g(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v).$$

En composant les λ_i avec le gradient, on obtient des opérateurs bidifférentiels de $\mathscr{S}_X$ dans $\mathscr{S}_X$, et la série du théorème définit une déformation formelle de l'algèbre de Lie $\mathscr{S}_X$.

Je commencerai par rappeler brièvement le scenario général de la théorie des déformations d'algèbres de Lie. Une déformation formelle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (réelle, pour fixer les idées), est une structure d'algèbre de Lie $\mathbf{R}[[t]]$-linéaire sur $\mathbf{R}[[t]]\otimes\mathfrak{g}$. Autrement dit: on se donne des applications $L_i: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, $\mathbf{R}$-bilinéaires alternées, et on pose, pour $u, v\in\mathfrak{g}\subsetneq\mathbf{R}[[t]]\otimes\mathfrak{g}$,

$$[u, v]_t = [u, v] + tL_1(u, v) + t^2 L_2(u, v) + \cdots$$

qui est un élément de $\mathbf{R}[[t]]\otimes\mathfrak{g}$; les L_i doivent s'arranger pour que l'identité de Jacobi soit satisfaite. On est libre de considérer les L_i comme des 2-cochaînes de $\mathfrak{g}$ dans elle-même (avec la représentation adjointe): alors l'identité de Jacobi à l'ordre 1 signifie que L_1 est un 2-cocycle. La vérification de l'identité à l'ordre k n'implique que les k premiers opérateurs $L_1, \ldots, L_k$; si l'on a pu les construire de façon à vérifier l'identité à l'ordre k, et si l'on cherche un L_{k+1} qui arrange l'identité à l'ordre $k+1$, on trouve une équation:

$$\sum{}' [u, L_{k+1}(v, w)] - \sum{}' L_{k+1}([u, v], w) = F(L_1, \ldots, L_k)(u, v, w)$$

à vérifier quels que soient u, v, w dans $\mathfrak{g}$ ($\sum'$ indique une sommation circulaire). En termes de 2-cochaînes, on demande donc que:

$$dL_{k+1} = F(L_1, \ldots, L_k)$$

où $F(L_1, \ldots, L_k)$ est une 3-cochaîne fabriquée à partir de $L_1, \ldots, L_k$ par des formules universelles qu'il est inutile d'expliciter ici. Cela étant, le fait que l'identité de Jacobi soit satisfaite à l'ordre k implique de façon mécanique que la 3-cochaîne $F(L_1, \ldots, L_k) = Z_{k+1}$ est un cocycle. On se trouve alors devant l'alternative suivante:

a) ou bien la classe de Z_{k+1} dans $H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ est non nulle: alors le processus de construction de la déformation formelle est obstrué;

b) ou bien Z_{k+1} est homologue à zéro: on prend alors pour L_{k+1} une de ses primitives, et on passe au cran suivant (qui donnera lieu à une alternative analogue).

En particulier, si par chance $H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$, n'importe quel 2-cocycle sera le terme de tête d'une déformation formelle de $\mathfrak{g}$. Je renvoie à [10] pour l'importante question de l'équivalence des déformations, qui permet par exemple de qualifier de triviale (à l'ordre 1) une déformation pilotée par un 2-cocycle L_1 homologue à zéro.

Dans le contexte symplectique, le 2-cocycle $\lambda_1 \in Z_\Delta^2(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ qui pilote la déformation appartiendra à la classe $\beta \in H_\Delta^2(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ mise en évidence au §3, n° 3. Puisqu'on prend les λ_i dans $C_\Delta^2(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ (injecté dans $C_\Delta^2(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$ par grad*), les obstructions éventuelles apparaîtront dans le $H_\Delta^3(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$. Examinons ce groupe. Soit β un générateur de $H^2(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ et η un générateur de $H^3(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$ (§2, th. 1) on peut prendre $\eta = \mathrm{j}_1^* \eta_1$, η_1 étant un générateur de $H^3(\mathfrak{sp}, \mathbf{R})$. La suite spectrale du §3, n° 1, fait apparaître trois types de classes dans $H^3(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$:

a) d'abord, la classe $\eta \in E_2^{0,3}$ passe dans le E_∞ et donc dans $H_\Delta^3(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ si et seulement si la classe de Pontriagin $p_1(X)$ est nulle;

b) ensuite, les produits $\beta \otimes \xi$, $\xi \in H^1(X, \mathbf{R})$, qui constituent le $E_2^{1,2} = E_\infty^{1,2}$;

c) et finalement $H^3(X, \mathbf{R})$ s'injecte dans $H_\Delta^3(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ (puisque $E_2^{1,1} = 0$ et que $E_2^{0,2}$ passe dans le E_∞).

Corrélativement, la preuve du théorème 3 se fait en trois étapes: d'abord on se place dans des circonstances topologiques telles que $H_\Delta^3(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X) = 0$, le seul problème étant alors de contrôler les symboles principaux; ensuite on montre que si $p_1(X) = 0$, la classe η ne peut obstruer la construction de la déformation; et pas davantage les classes du deuxième type, comme on le voit finalement. Il suffit alors d'avoir mis la condition $H^3(X, \mathbf{R}) = 0$ dans les hypothèses du théorème pour en avoir terminé la preuve; on trouvera néanmoins au n° 5 quelques remarques sur les obstructions éventuelles de ce type, ainsi que sur la dimension 2, qui est exclue de cette preuve comme du théorème 1.

4.2. Première étape: On suppose $H^1(X, \mathbf{R}) = H^3(X, \mathbf{R}) = 0$, *et* $p_1(X) \neq 0$ (c'est le cas par exemple pour les produits de droites projectives complexes $(P^1\mathbf{C})^\nu$ $\nu \geqslant 2$, traités comme variétés symplectiques de dimension 2ν).

Suivons le scenario général et supposons les opérateurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ construits, λ_i ayant pour symbole principal la $(2i+1)$ème puissance du crochet de Poisson, en sorte que la loi:

$$[u, v]_t^{(k)} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} \frac{t^i}{(2i+1)!} \lambda_i(u, v)$$

vérifie l'identité de Jacobi à l'ordre k. Il nous faut un opérateur $\lambda_{k+1} \in C_\Delta^2(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ solution de l'équation:

$$d\lambda_{k+1} = \zeta_{k+1} \tag{1}$$

où ζ_{k+1} est un certain 3-cocycle construits à partir de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Vu les circonstances topologiques, $H_\Delta^3(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X) = 0$ et l'équation (1) possède des solutions. Mais nous voulons contrôler leur symbole principal. Soit donc $\lambda'_{k+1} \in C_\Delta^2(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ une 2-cochaîne ayant pour symbole la puissance $(2k+3)$ du crochet, et par ailleurs quelconque:

d'après les définitions du §3, n° 4, λ'_{k+1} et son bord appartiennent à

$$'F_{2k+1}{}''F_{4k+2}C^*_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X).$$

D'autre part, ζ_{k+1} et $d\lambda'_{k+1}$ ont *le même symbole principal*, parce que le calcul au niveau des symboles revient à verifier l'identité de Jacobi pour la déformation L_t construite sur les fonctions formelles au §1, n° 2 (formule (5)). Par conséquent, la différence $\zeta_{k+1}-d\lambda'_{k+1}$ a la filtration $'F_{2k+1}$ (l'ordre sur chaque argument n'a pas augmenté) et la filtration $''F_{4k+1}$ (l'ordre total a diminué d'au moins 1). D'après la proposition 2 du §3, n° 4, $H^3('F_{2k+1}{}''F_{4k+1}C^*_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X))=0$, et nous aurons une 2-cochaîne λ''_{k+1}, de filtrations $'F_{2k+1}{}''F_{4k+1}$, vérifiant:

$$\zeta_{k+1}=d\lambda'_{k+1}+d\lambda''_{k+1}.$$

La 2-cochaîne $\lambda_{k+1}=\lambda'_{k+1}+\lambda''_{k+1}$ résoud alors notre problème.

4.3. Deuxième étape: J'aurai besoin du lemme suivant. Convenons d'appeler déformation tronquée de longueur k sur la variété X une suite d'opérateurs $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in C^2_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ ayant les symboles principaux requis, et tels que la loi:

$$[u, v]_t^{(k)}=\sum_{0\leqslant i\leqslant k}\frac{t^i}{(2i+1)!}\lambda_i(u, v)$$

vérifie l'identité de Jacobi à l'ordre k.

LEMME 1 (la greffe). *Soit X une variété symplectique, A une pièce non vide dans X. Supposons $H^1(X, A, \mathbf{R})=H^3(X, A, \mathbf{R})=0$. Soit $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ une déformation tronquée définie au voisinage de A. Il existe une déformation tronquée $\tilde\lambda_1,\ldots,\tilde\lambda_k$ définie sur X entière, et qui coïncide avec la précédente sur A.*

Preuve. Supposons déjà construits $\tilde\lambda_1,\ldots,\tilde\lambda_i$ $(i\geqslant 1)$. L'hypothétique opérateur $\tilde\lambda_{i+1}$ est soumis aux deux contraintes suivantes:

$$\tilde\lambda_{i+1}|_A=\lambda_{i+1}$$
$$d\tilde\lambda_{i+1}=\tilde\zeta_{i+1}$$

où $\tilde\zeta_{i+1}$ est un 3-cocycle construit à partir de $\tilde\lambda_1,\ldots,\tilde\lambda_i$. Ces deux contraintes ne sont pas grossièrement incompatibles, en ce sens que sur A, $\tilde\zeta_{i+1}=d\lambda_{i+1}$ (une même formule universelle construit ζ_{i+1} et $\tilde\zeta_{i+1}$ à partir de $\lambda_1,\ldots,\lambda_i$ et $\tilde\lambda_1,\ldots,\tilde\lambda_i$).

Soit maintenant λ'_{i+1} une 2-cochaîne sur X, coïncidant avec λ_{i+1} sur A; on a donc, sur la pièce A, $d\lambda'_{i+1}=\zeta_{i+1}=\tilde\zeta_{i+1}$, et le 3-cocycle $\tilde\zeta_{i+1}-d\lambda'_{i+1}$ est nul sur A. Faisons jouer la proposition 1bis du §3, n° 4: puisque $H^0(X, A, \mathbf{R})=H^1(X, A, \mathbf{R})=$ $=H^3(X, A, \mathbf{R})=0$, on trouve $H^3(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X; A)=0$, et nous obtenons une 2-cochaîne λ''_{i+1}, nulle sur A, vérifiant:

$$\tilde\zeta_{i+1}-d\lambda'_{i+1}=d\lambda''_{i+1}$$

après quoi on prend $\lambda_{i+1}=\lambda'_{i+1}+\lambda''_{i+1}$. Le contrôle des symboles principaux se fait sans difficulté avec la proposition 2bis, §3, n° 4.

Revenons à notre problème d'obstruction, et soit X une variété symplectique, sur laquelle nous faisons la seule hypothèse topologique que $p_1(X)\in H^4(X, \mathbf{R})$ est nulle. Alors apparaît dans $H^3_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ la classe η provenant de:

$$\eta_1 \in H^3(\mathfrak{sp}, \mathbf{R}) \xrightarrow{j^*_1} H^3(\mathfrak{s}, \mathbf{R}) = E_2^{0,3}$$

Je noterai encore η un 3-cocycle de cette classe. Il s'agit de montrer que la classe η ne peut pas faire obstacle au passage d'une déformation tronquée de longueur k à une déformation tronquée de longueur $k+1$.

Procédons par l'absurde et supposons construits sur X une déformation tronquée de longueur k, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, telle que lorsqu'on forme le 3-cocycle ζ_{k+1} dont l'hypothétique λ_{k+1} devrait être une primitive, on découvre qu'il n'est pas cohomologue à zéro et qu'il s'écrit

$$\zeta_{k+1} = K\cdot\eta + \beta\wedge\varrho + \sigma + d\tau \tag{2}$$

avec K une constante *non nulle*, $\beta\in Z^2_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ le 2-cocycle de base ($\beta=\lambda_1$, si l'on veut), ϱ et σ des formes différentielles fermées sur X, de degrés 1 et 3, et $\tau\in C^2_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$. (Noter aussi que la proposition 2, §3, n° 4 montre que la difficulté subsiste même si l'on abandonne toute prétention sur le symbole principal de λ_{k+1}). Soit A une pièce contractile, incluse dans une carte symplectique V. Si l'on restreint l'équation (2) à l'intérieur $\mathring{A}$ de A, les 3-cocycles $\beta\wedge\varrho$, σ deviennent cohomologues à zéro, mais non pas le cocycle η (qui provient toujours du générateur de $H^3(\mathfrak{s}, \mathbf{R})=E_2^{0,3}$ dans la suite spectrale de la variété $\mathring{A}$). Donc la restriction $\zeta_{k+1}|_{\mathring{A}}$ n'est pas cohomologue à zéro, et la déformation tronquée $\lambda_1|_{\mathring{A}}, \ldots, \lambda_k|_{\mathring{A}}$ restreinte à $\mathring{A}$ est non moins obstruée que sur X.

Maintenant, plongeons la carte symplectique V dans une variété symplectique Y telle que $H^1(Y, \mathbf{R})=H^3(Y, \mathbf{R})=0$ et $p_1(Y)\neq 0$. Puisque A est contractile, le lemme 1 s'applique: soit $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_k$ une déformation tronquée à l'ordre k sur Y, coïncidant avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sur A. La première étape fournit un opérateur $\tilde{\lambda}_{k+1}$ sur Y qui prolonge d'un cran la déformation tronquée $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_k$, et du même coup, par restriction, la déformation $\lambda_{1|\mathring{A}}, \ldots, \lambda_{k|\mathring{A}}$ sur $\mathring{A}$. C'est donc que le 3-cocycle $\zeta_{k+1|\mathring{A}}$ était cohomologue à zéro: contradiction.

4.4. Troisième étape: Le passage d'une déformation tronquée de longueur k à une déformation de longueur $k+1$ ne peut pas être obstrué par une classe de filtration 1 dans $H^3_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ (c'est-à-dire provenant de $E_2^{1,2}=H^1(X, \mathbf{R})\otimes H^2(\mathfrak{s}, \mathbf{R})$.

On raisonne encore par l'absurde: soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ une déformation de longueur k sur une variété symplectique X, telle que le 3-cocycle ζ_{k+1} soit non cohomologue à zéro. D'après la deuxième étape, sa classe dans le $H^3_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$ est de filtration $\geqslant 1$,

et on a une écriture:

$$\zeta_{k+1}=\beta\wedge\varrho+\sigma+d\tau \tag{3}$$

avec ϱ et σ des formes différentielles fermées sur X, de degrés 1 et 3, $\tau\in C_{\Delta}^{2}(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$; et nous supposons la classe de ϱ dans $H^1(X, \mathbf{R})$ non nulle. Soit c une sous-variété de X, difféomorphe au cercle S^1, telle que:

$$\int_c \varrho\neq 0$$

et soient A et V deux voisinages tubulaires de c, A étant une pièce. Si l'on restreint l'équation (3) à V, σ devient cohomologue à zéro, mais non pas $\beta\wedge\varrho$. Par conséquent, la déformation restreinte à V, (ou aussi bien à l'intérieur de A), $\lambda_{1|V},\ldots,\lambda_{k|V}$, subit une obstruction du même type. Nous pouvons désormais oublier la variété X.

Nous pouvons aussi supposer le fibré normal N à c trivial; car sinon, il le devient sur un revêtement à deux feuillets $\tilde{c}$ de c; et en remontant sur le revêtement $\tilde{V}$ correspondant les opérateurs multidifférentiels $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, nous y retrouverons une situation obstruée du même type. Finalement, nous sommes ramenés aux variétés suivantes: c est le cercle

$$x_1^2+x_2^2=1\,,\qquad x_3=\cdots=x_{2\nu}=0$$

dans $\mathbf{R}^{2\nu}$, A et V en sont deux voisinages tubulaires, $A\subset V$, et V est muni de la structure symplectique héritée de X.

On obtient un voisinage B du disque:

$$x_1^2+x_1^2\leqslant 1\,,\qquad x_3=\cdots=x_{2\nu}=0$$

en ajoutant à A une poignée d'indice $2<2\nu$. Observons qu'il n'y a pas d'obstruction homotopique à prolonger la 2-forme fondamentale g de A (ou V) à B: car la classe de g dans $H^2(A, \mathbf{R})$ est nulle (et pour cause), et le fibré tangent TA est trivial, même vis-à-vis du groupe structural $U(\nu)$ ($\pi_1 BU(\nu)=0$). Donc, d'après la théorie de Gromow ([11], p. 133), g se prolonge en une structure symplectique au voisinage de B. Comme $H^1(B, A, \mathbf{R})=H^3(B, A, \mathbf{R})=0$, le lemme 1 s'applique et fournit une déformation de longueur k, $\tilde{\lambda}_1,\ldots,\tilde{\lambda}_k$ sur B, qui coïncide sur A avec la déformation obstruée $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$. Mais B est contractile: la deuxième étape montre qu'on peut allonger d'un cran $\tilde{\lambda}_{k+1}$ la déformation $\tilde{\lambda}_1,\ldots,\tilde{\lambda}_k$, et du même coup par restriction la déformation prétendument obstruée $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ sur A: contradiction.

4.5. Au terme de cette preuve, il apparaît que l'obstruction à allonger d'un cran une déformation tronquée de longueur k sur la variété symplectique X, se trouve, si

elle existe, dans la filtration 3 du $H^3_\Delta(\mathscr{S}_X, \mathscr{E}_X)$, c'est-à-dire dans $H^3(X, \mathbf{R})$. On peut s'assurer que *cette classe a une intégrale nulle sur toute sous-variété de X difféomorphe à la sphère* S^3; la preuve est analogue au n° 4 ci-dessus si la dimension de X est au moins 6; elle est un peu plus délicate en dimension 4 (la poignée a le mauvais indice).

Oublions encore un moment qu'il nous reste à récupérer le cas de la dimension 2 (qui a été exclu par le recours au théorème 1), et faisons une remarque générale. Dans le cas des fonctions formelles, la déformation du crochet de Poisson L_t était déduite d'une déformation M_t^γ du *produit associatif* des fonctions (§1, n° 2) elle-même pilotée par le crochet de Poisson. La question se pose donc assez naturellement: sur une variété X, construire une suite d'opérateurs bidifférentiels $\mu_k: \mathscr{E}_X \times \mathscr{E}_X \to \mathscr{E}_X$, bilinéaires sur $\mathbf{R}$, en sorte que la série:

$$(uv)_t = uv + t\mu_1(u, v) + t^2\mu_2(u, v) + \cdots \qquad (u, v \in \mathscr{E}_X)$$

soit une déformation associative du produit de fonctions. Une telle construction est régie par une «cohomologie de Hochschild diagonale» facile à décrire. L'espace A^p des p-cochaînes est constitué par les opérateurs multidifférentiels:

$$f: \mathscr{E}_X \times \cdots \times \mathscr{E}_X \to \mathscr{E}_X$$

$\mathbf{R}$-linéaires sur leurs p arguments (pas de condition de symétrie); et la différentielle δ, de degré $+1$, est donnée par la formule:

$$\begin{aligned}\delta f(u_1, \ldots, u_{p+1}) &= u_1 f(u_2, \ldots, u_{p+1}) - f(u_1u_2, u_3, \ldots, u_{p+1}) \\ &\quad + f(u_1, u_2u_3, u_4, \ldots, u_{p+1}) + \cdots + (-1)^{p+1} f(u_1, \ldots, u_p)\, u_{p+1}.\end{aligned}$$

Soit $H^*_A(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$ la cohomologie de ce complexe. A cause de la commutativité de l'algèbre associative $\mathscr{E}_X$, la différentielle δ est linéaire sur $\mathscr{E}_X$: ce fait permet de localiser ou globaliser sans encombre, et, compte-tenu de la proposition 3 du §1, n° 3, on n'est pas trop surpris de trouver un isomorphisme:

$$H^p_A(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X) = \Gamma_X(\Lambda^p TX)$$

avec les sections globales du fibré $\Lambda^p TX$; l'isomorphisme identifie une section $U_1 \wedge \ldots \wedge U_p$ (U_i champs de vecteurs sur X) avec l'opérateur multidifférentiel:

$$u_1, \ldots, u_p \mapsto \text{déterminant } \|\theta_{U_i}(u_j)\| \qquad (u_1, \ldots, u_p \in \mathscr{E}_X)$$

ou plutôt avec sa classe de cohomologie.

Dans ce contexte associatif, la construction d'une déformation formelle se fait suivant les mêmes lignes que pour les déformations d'algèbre de Lie précédemment considérées. Si l'on dispose d'une déformation associative tronquée de longueur k,

c'est-à-dire d'une loi:

$$(uv)_t^{(k)} = uv + t\mu_1(u, v) + \cdots + t^k \mu_k(u, v),$$

avec $\mu_1, \ldots, \mu_k \in A^2$, vérifiant l'associativité à l'ordre k, on aura besoin pour l'allonger d'un cran d'une cochaîne $\mu_{k+1} \in A^2$ solution de l'équation:

$$\delta\mu_{k+1} = \alpha_{k+1}$$

où α_{k+1} est une 3-cochaîne construite à partir de $\mu_1, \ldots, \mu_k$ qui est automatiquement un cocycle; et l'équation possède des solutions selon que α_{k+1} est ou non cohomologue à zéro dans le complexe A^*. La grande différence avec les constructions précédentes, c'est que $H_A^3(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$ est l'énorme espace $\Gamma_X(\Lambda^3 TX)$.

C'est maintenant que le cas de la dimension 2 se distingue par sa simplicité. Supposons la variété X symplectique, et prenons pour μ_1 le crochet de Poisson. Puisque $H_A^3(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X) = 0$, on ne rencontre pas d'obstruction à former une série illimitée:

$$(uv)_t = uv + t[u, v] + \sum_{k \geqslant 2} t^k \mu_k(u, v)$$

qui soit associative; puis en posant:

$$[u, v]_t = [(uv)_t - (vu)_t]/2t$$

on obtient une déformation du crochet de Poisson lui-même.

Je dirai encore quelques mots du cas général. L'identification de $H_A^2(\mathscr{E}_X, \mathscr{E}_X)$ à $\Gamma_X(\Lambda^2 TX)$ engage à essayer pour μ_1 n'importe quel opérateur bidifférentiel du type:

$$\mu_1(u, v) = \sum_{i,j} g^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j}, \qquad g^{ij} = -g^{ji}$$

en coordonnées locales. Pour construire μ_2, on se heurte à une première obstruction, la classe de α_2, qui est donnée dans $\Gamma_X \Lambda^3 TX$ par la formule de G au §1, fin n° 3. Si μ_1 est une structure symplectique, ou si plus généralement il est parallélisé par une connexion sans torsion D, cette obstruction s'annule. Dans le cas où μ_1 est symplectique, j'ai pu m'assurer de l'existence de formules universelles donnant, à partir d'une connexion adaptée D, une déformation associative tronquée de longueur 4, dont les symboles principaux sont ceux de M_t^γ (§1, n° 2).

REFERENCES

[1] Van Est, W. T., *Une application d'une méthode de Cartan-Leray*, Indagationes Mathematicae, *17* (1955) p. 542s.

[2] Cartan, H. et Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press.

[3] HOCHSCHILD, G. et SERRE, J. P., *Cohomology of Lie algebras*, Annals of Mathematics, *57* (1953), p. 591s.
[4] WEYL, H., *Classical Groups*, Princeton University Press.
[5] GODEMENT, R., *Théorie des faisceaux*, Hermann 1964.
[6] LOSIK, M. V., *Cohomologies of the Lie algebras of vector fields with coefficients in a trivial unitary representation*, Functional Analysis and its applications, *6* (1972) p. 24s.
[7] KOSZUL, J. L., *Homologie des complexes de formes différentielles d'ordre supérieur*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4e série, t. *7*, fasc. 1 (1974) p. 139s.
[8] LICHNEROWICZ, *Cohomologie* 1-*différentiable des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, *3* (1974), p. 459s.
[9] GODBILLON, C., *Eléments de Topologie Algébrique*, Hermann 1971.
[10] GERSTENHABER, M., *On the deformation of rings and algebras*, Annals of Mathematics *79* (1964), p. 59s.
[11] HAEFLIGER, A., *Lectures on Gromov theorem*, in Symposium on singularities Liverpool 1970 (Springer Lecture Notes).
[12] FLATO, M., LICHNEROWICZ, A., et STERNHEIMER, D., *Déformations* 1-*différentiables d'algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact* CRAS t. 279 (16 décembre 1974), p. 877s.

Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 St Martin D'Hères

et

Centre universitaire de Savoie
Institut Scientifique
B.P. 143
73011 Chamébry

Reçu mars 1975