Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 51 (1976)

Artikel: Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

Autor: Huber, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39439

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 51 (1976) 215–231 Birkhäuser Verlag, Basel

Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER (BASEL)

Herrn C. L. Siegel zum 80. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Auf jeder kompakten Riemannschen Fläche $\mathcal{F}$ vom Geschlecht $g_{\mathcal{F}} > 1$ gibt es genau eine Riemannsche Metrik mit konstanter Krümmung -1, welche mit der konformen Struktur von $\mathcal{F}$ verträglich ist. Es sei $\mu_{\mathcal{F}}$ die Länge der kürzesten geschlossenen Geodätischen und $\Delta_{\mathcal{F}}$ der Laplace-Beltrami-Operator bezüglich dieser Metrik. Das Spektrum von $-\Delta_{\mathcal{F}}$ ist diskret; 0 ist ein einfacher Eigenwert, alle übrigen Eigenwerte sind positiv. Es sei $A_{\mathcal{F}}(x)$ die Anzahl der mit ihrer Multiplizität gezählten Eigenwerte im Intervall $[0, x]$ und

$$Q_{\mathcal{F}}(x) = A_{\mathcal{F}}(x)/(g_{\mathcal{F}} - 1)x.$$

Da der Inhalt von $\mathcal{F}$ gleich $4\pi(g_{\mathcal{F}} - 1)$ ist, so konvergiert nach H. Weyl $Q_{\mathcal{F}}(x) \to 1$ für $x \to +\infty$. Natürlich kann nicht erwartet werden, dass dies gleichmässig in $\mathcal{F}$ gilt! In der vorliegenden Arbeit soll aber gezeigt werden:

(A) Für alle Flächen $\mathcal{F}$ mit $\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} \geqslant 1 + \delta$, $\delta > 0$, gilt

$$Q_{\mathcal{F}}(x) \leqslant 4/j^2 J_1^2(j) = 2,56\ldots \text{ für } x \geqslant \operatorname{Max}(3, 3/\delta).$$

(Darin bedeutet j die kleinste positive Nullstelle der Besselschen Funktion J_0). Daraus ergibt sich andererseits mit Hilfe der Selbergschen Spurformel [6]:

(B) Für alle Flächen mit $\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} \geqslant 1 + \delta$ gilt

$$Q_{\mathcal{F}}(x) \geqslant q(x, \delta) \quad \text{für } x > 1/4.$$

Dabei ist $q(x, \delta)$ eine für $x > \frac{1}{4}$, $\delta > 0$ positive und in beiden Variabeln monoton wachsende Funktion:

$$q(x, \delta) = p(x, y), \qquad y = \min(1, x/3, \delta x/3),$$

$$p(x, y) = \max_{t>0} \left[\frac{\pi}{t} f\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t/4x} - \kappa\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{t}\right) e^{-t} \right] > 0 \quad \text{für } x > \tfrac{1}{4},\ y > 0,$$

$$\kappa = 4/j^2 J_1^2(j), \qquad f(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-sr^2}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\, dr.$$

(Wegen $f(0)=1/\pi$ und $f(s)\sim(\sqrt{\pi}/2\sqrt{s})$ für $s\to+\infty$ sieht man sofort, dass die eckige Klammer, als Funktion von $t>0$ betrachtet, für $t\to 0$ gegen $-\infty$, für $t\to+\infty$ gegen 0 strebt und von einem gewissen t an positiv ist; sie besitzt daher in der Tat ein positives Maximum $p(x, y)$. Offensichtlich ist $p(x, y)$ monoton wachsend in beiden Variabeln und somit $q(x, \delta)$ ebenfalls.)

Aus (B) folgt insbesondere, dass $A_{\mathcal{F}}(x)$ für festes $x>\frac{1}{4}$ gross ist, wenn $g_{\mathcal{F}}$ gross und $\mu_{\mathcal{F}}$ nicht zu klein ist. Von besonderem Interesse ist nun $A_{\mathcal{F}}(1/4)$, die Anzahl der "kleinen" Eigenwerte. Diese sind wichtig u.a. für das asymptotische Verhalten des Längenspektrums von $\mathcal{F}$ [3] und für die Selbergsche Zetafunktion [6]. Nachdem H. P. McKean [4] behauptet hatte, dass ausser dem trivialen Eigenwert 0 keine kleinen Eigenwerte auftreten können, hat B. Randol [5] kürzlich gezeigt, dass es Flächen mit beliebig grossem $A_{\mathcal{F}}(1/4)$ geben muss. Wir zeigen nun andererseits:

$$(C_1)\quad A_{\mathcal{F}}(1/4)\leqslant\frac{3\pi^2}{8}(g_{\mathcal{F}}-1)(\log\operatorname{Cos}\tfrac{1}{4}\mu_{\mathcal{F}})^{-3}$$

$$(C_2)\quad A_{\mathcal{F}}(1/4)\leqslant\frac{1}{2}(g_{\mathcal{F}}-1)(\log\operatorname{Cos}\tfrac{1}{4}\mu_{\mathcal{F}})^{-1}.$$

(Offenbar ist (C_1) für grosse, (C_2) für kleine $\mu_{\mathcal{F}}$ interessant.)

Aus (B) und (C_1) ergibt sich: Für $\varepsilon>0$, $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}\geqslant 2$ gilt

$$\frac{A_{\mathcal{F}}(\frac{1}{4})}{A_{\mathcal{F}}(\frac{1}{4}+\varepsilon)}\leqslant\frac{3\pi^2}{2p(\frac{1}{4}+\varepsilon,\frac{1}{12})}(\log\operatorname{Cos}\tfrac{1}{4}\mu_{\mathcal{F}})^{-3}.$$

Wenn also $\mu_{\mathcal{F}}$ sehr gross ist, dann konzentrieren sich die Eigenwerte des Intervalles $[0,\frac{1}{4}+\varepsilon]$ im kleinen Teilintervall $(\frac{1}{4},\frac{1}{4}+\varepsilon]$ und McKean hat in diesem Falle doch ein wenig recht! Dagegen folgt aus (A) und (B) für $x>\frac{1}{4}$, $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}\geqslant 2$:

$$\frac{A_{\mathcal{F}}(x)}{A_{\mathcal{F}}(x+\varepsilon)}\geqslant\tfrac{1}{4}j^2J_1^2(j)\frac{xq(x,1)}{\max(3,x+\varepsilon)}.$$

Dass es tatsächlich Flächen mit beliebig grossem $\mu_{\mathcal{F}}$ gibt, scheint nicht selbstverständlich zu sein; im letzten Abschnitt wird deshalb die Existenz solcher Flächen nachgewiesen.

2. Hilfssätze über Legendre-Funktionen

1. Die Differentialgleichung

$$(t^2-1)y''(t)+2ty'(t)+\lambda y(t)=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

hat in $t=1$ eine reguläre Singularität mit den Exponenten 0, 0. Sie besitzt daher genau eine Lösung

$$F_\lambda \in C^2(-1,+\infty) \quad F_\lambda(1)=1. \tag{2}$$

Aus (1), (2) ergibt sich

$$F'_\lambda(1)=-\lambda/2. \tag{3}$$

LEMMA 1. Ist $y \in C^2(1,b)$, $1<b\leqslant+\infty$, *eine Lösung von* (1) *mit*

$$\lim_{t\downarrow 1} y(t)=\alpha, \tag{4}$$

so gilt: $y=\alpha F_\lambda$.

Beweis: Die Wronskische Determinante

$$W=yF'_\lambda-y'F_\lambda \tag{5}$$

erfüllt in $(1,b)$ die Differentialgleichung $(t^2-1)W'+2tW=0$. Daraus ergibt sich:

$$W(t)=\gamma/t^2-1. \tag{6}$$

Aus (2) und (4)–(6) folgt: $\lim_{t\downarrow 1}(t-1)y'(t)=-\gamma/2$. Wegen (4) muss daher $\gamma=0$ sein. Dann verschwindet aber W im ganzen Intervall $(1,b)$ und y, F_λ sind dort linear abhängig. Daraus folgt wegen (2), (4) die Behauptung.

2. F_λ ist eine Legendresche Funktion erster Art:

$$F_\lambda=P_\nu \quad \text{mit} \quad \nu(\nu+1)=-\lambda. \tag{7}$$

Daraus ergeben sich nach [2] pag. 188 (11) und pag. 262 (122) folgende Darstellungen:

$$F_\lambda(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}R_n(\lambda)\left(\frac{t-1}{2}\right)^n, \quad |t-1|<2, \tag{8}$$

$$R_n(\lambda)=\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda+k^2+k), \tag{9}$$

$$F_{1/4}(t)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\operatorname{Cos}\tau+t}}. \tag{10}$$

3. Aus (7) folgt nach [2] pag. 402, dass F_λ für $\lambda>\frac{1}{4}$ unendlich viele Nullstellen im Intervall $(1,+\infty)$ besitzt. Wir bezeichnen die kleinste dieser Nullstellen mit $a(\lambda)$. Nach [2] pag. 388–389 besitzt F_λ keine Nullstellen in $(1,+\infty)$ für $\lambda\leqslant\frac{1}{4}$.

Demgemäss setzen wir

$$a(\lambda)=+\infty \quad \text{für} \quad \lambda\leqslant\tfrac{1}{4}. \tag{11}$$

4. *LEMMA 2. Für $\lambda\geqslant 3$ gilt*

$$a(\lambda)\geqslant 1+j^2/2\lambda, \qquad \int_1^{1+j^2/2\lambda} F_\lambda^2(t)\,dt\geqslant j^2J_1^2(j)/2\lambda.$$

Dabei bedeutet j die erste positive Nullstelle der Besselfunktion J_0.

Beweis: Wir setzen

$$c=j^2/4=1,44\ldots. \tag{12}$$

Nach (8) gilt für

$$\lambda\geqslant 3, \quad 0<u\leqslant 1: \tag{13}$$

$$\begin{aligned} F_\lambda(1+2cu/\lambda) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\frac{R_n(\lambda)}{\lambda^n}c^nu^n = \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}c^nu^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{R_n(\lambda)}{\lambda^n}-1\right)c^nu^n = \\ &= J_0(j\sqrt{u})+A+B \end{aligned} \tag{14}$$

$$A=\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{R_n(\lambda)}{\lambda^n}-1\right)c^nu^n=\frac{c^2u^2}{2\lambda}\left[1-\frac{2}{9}cu\left(2+\frac{3}{\lambda}\right)\right] \tag{15}$$

$$B=\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^nb_n, \qquad b_n=\frac{c^nu^n}{(n!)^2}\left(\frac{R_n(\lambda)}{\lambda^n}-1\right). \tag{16}$$

Nun ist $\frac{2}{9}cu\left(2+\frac{3}{\lambda}\right)\leqslant\frac{2}{3}c=0,96\ldots$ und somit

$$A>0. \tag{17}$$

Wegen (9) ergibt sich leicht:

$$b_{n+1}/b_n=cu\left(\frac{1}{\lambda}\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\frac{\lambda^{n-1}}{R_n(\lambda)-\lambda^n}+\frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

$$R_n(\lambda)\geqslant\lambda^n+\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k^2+k)\right)\lambda^{n-1}=\lambda^n+\tfrac{1}{3}n(n-1)(n+1)\lambda^{n-1}.$$

Somit gilt für $n \geqslant 4$:

$$b_{n+1}/b_n \leqslant cu\left(\frac{1}{\lambda}\frac{n}{n+1}+\frac{3}{(n-1)(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{25}+\tfrac{1}{25}) = \tfrac{31}{75}c < 1.$$

Daher folgt aus (16), dass auch $B > 0$. Somit ist nach (14), (17)

$$F_\lambda(1+2cu/\lambda) > J_0(j\sqrt{u}) \geqslant 0 \quad \text{für} \quad \lambda \geqslant 3,\ 0 < u \leqslant 1.$$

Daraus folgt aber

$$a(\lambda) \geqslant 1+2c/\lambda = 1+j^2/2\lambda,$$
$$\int_1^{1+j^2/2\lambda} F_\lambda^2(t)\,dt = \frac{2c}{\lambda}\int_0^1 F_\lambda^2(1+2cu/\lambda)\,du \geqslant \frac{2c}{\lambda}\int_0^1 J_0^2(j\sqrt{u})\,du =$$
$$= \frac{j^2}{\lambda}\int_0^1 xJ_0^2(jx)\,dx = j^2 J_1^2(j)/2\lambda.$$

LEMMA 3. Für $y \geqslant 1$ gilt

$$\int_1^y F_{1/4}^2(t)\,dt \geqslant 2\log\frac{y+1}{2} \tag{18}$$

$$\int_1^y F_{1/4}^2(t)\,dt \geqslant \frac{2}{3\pi^2}\left(\log\frac{y+1}{2}\right)^3. \tag{19}$$

(Die erste Ungleichung kann für $y \to 1$, die zweite für $y \to +\infty$ asymptotisch nicht verbessert werden.)

Beweis: Aus (10) ergibt sich durch die Substitution

$$u = \arcsin(Tg\,\tau/2)$$

$$F_{1/4}(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-h\sin^2 u}}, \qquad 0 \leqslant h = \frac{t-1}{t+1} < 1,\ t \geqslant 1. \tag{20}$$

Da der Integrand $\geqslant 1$ in $[0, \pi/2]$ ist, so folgt

$$F_{1/4}(t) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}}.$$

Daraus ergibt sich sofort (18). Etwas mehr Mühe bereitet (19). Zunächst folgt aus (20):

$$F_{1/4}(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}h^n\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} u\,du. \tag{21}$$

Setzen wir

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u \, du, \tag{22}$$

so gilt:

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{2}{\pi} I_n, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u \, du = I_n.$$

Somit folgt aus (21):

$$F_{1/4}(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}} \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 h^n. \tag{23}$$

Andererseits folgt aus (22) durch die Substitution $v = tg\, u$:

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v^2)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n+1}}.$$

Somit folgt aus (23)

$$F_{1/4}(t) \geqslant \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n+1} = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}} \frac{1}{h} \log \frac{1}{1-h} \geqslant \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}} \log \frac{t+1}{2}.$$

Daraus folgt aber (19) unmittelbar.

5. Wir betrachten nun im Intervall $[1, b]$, $1 < b < +\infty$, das Eigenwertproblem

$$(t^2-1)y'' + 2ty' + \mu y = 0, \qquad y \in C^2[1, b], \qquad y(b) = 0.$$

Nach Lemma 1 und nach 3 sind alle Eigenwerte dieses Problems grösser als $\frac{1}{4}$. Bezeichnen wir den kleinsten Eigenwert mit $\mu(b)$, so ist also

$$\mu(b) > \tfrac{1}{4} \quad \text{für} \quad b > 1, \tag{24}$$

und nach dem Rayleighschen Extremalprinzip gilt

$$\mu(b) = \inf_g \int_1^b (t^2-1)(g'(t))^2 \, dt \Big/ \int_1^b g^2(t) \, dt, \qquad g \in C^1[1, b], \qquad g(b) = 0, \tag{25}$$

woraus sich auch ergibt, dass $\mu(b)$ eine monoton fallende Funktion ist. Für $x > \frac{1}{4}$ ist $F_x(t)$ eine Eigenfunktion des Intervalles $[1, a(x)]$, welche im Innern keine Nullstellen besitzt. Daher gilt

$$\mu(a(x)) = x \quad \text{für} \quad x > \tfrac{1}{4}. \tag{26}$$

Diese Bemerkungen ermöglichen uns nun den Beweis von

LEMMA 4. Für $\lambda \leqslant x$ *und* $1 \leqslant t \leqslant a(x)$ *gilt*

$$0 \leqslant F_x(t) \leqslant F_\lambda(t).$$

Beweis: Es sei

$$\lambda < x, \qquad g(t) = F_\lambda(t) - F_x(t). \tag{27}$$

Dann folgt aus (1)–(3):

$$g(1) = 0, \qquad g'(1) = \tfrac{1}{2}(x-\lambda) > 0, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}((t^2-1)g') + \lambda g = (x-\lambda)F_x. \tag{29}$$

Wir haben zu zeigen, dass $g(t) \geqslant 0$ in $[1, a(x)]$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es wegen (28) ein b derart, dass

$$1 < b < a(x) \tag{30}$$

$$g(b) = 0 \tag{31}$$

$$g(t) > 0 \quad \text{in} \quad (1, b). \tag{32}$$

Aus (29) und (31) ergibt sich:

$$(x-\lambda)\int_1^b F_x(t)g(t)\,dt = \lambda\int_1^b g^2(t)\,dt - \int_1^b (t^2-1)(g'(t))^2\,dt. \tag{33}$$

Nun ist wegen (32)

$$\int_1^b g^2(t)\,dt > 0$$

und wegen (27), (30), (32)

$$(x-\lambda)\int_1^b F_x(t)g(t)\,dt > 0.$$

Somit folgt aus (33)

$$\int_1^b (t^2-1)(g'(t))^2\,dt \Big/ \int_1^b g^2(t)\,dt < \lambda.$$

Wegen (31) folgt daraus nach (25)

$$\mu(b) < \lambda < x. \tag{34}$$

Für $x \leqslant \frac{1}{4}$ ist dies bereits ein Widerspruch zu (24). Für $x > \frac{1}{4}$ ist $a(x) < +\infty$ und daher folgt aus (30) und (26):

$$\mu(b) \geqslant \mu(a(x)) = x,$$

ein Widerspruch zu (34). Damit ist Lemma 4 bewiesen.

3. Beweis von (A) und (C)

1. Wir versehen den Einheitskreis $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds^2 = 4 \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}, \tag{1}$$

welche die konstante Krümmung -1 besitzt. Für die hyperbolische Distanz $\rho(0, z)$ ergibt sich dann:

$$\operatorname{Cos} \rho(0, z) = \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}.$$

Wir bezeichnen mit $K(r)$ die Kreisscheibe $\{z \mid \rho(z, 0) \leqslant r\}$. Führen wir im Nullpunkt geodätische Polarkoordinaten

$$\rho = \rho(0, z), \qquad \vartheta = \arg z$$

ein, so wird

$$ds^2 = d\rho^2 + \operatorname{Sin}^2 \rho \, d\vartheta^2.$$

Daher erhält man für das Flächenelement und den Laplace-Beltrami-Operator der Metrik (1):

$$d\omega = \operatorname{Sin} \rho \, d\rho \, d\vartheta \tag{2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \operatorname{Ctg} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \rho} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}. \tag{3}$$

2. Nun sei $\mathcal{F}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g_{\mathcal{F}} > 1$ und q ein beliebiger Punkt von $\mathcal{F}$. Dann gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung $\gamma: E \to \mathcal{F}$ mit

$$\gamma(0) = q. \tag{4}$$

Mit Hilfe von γ kann die Differentialgeometrie (1) von E auf $\mathcal{F}$ verpflanzt werden; das ergibt gerade die in der Einleitung eindeutig charakterisierte Metrik

von $\mathcal{F}$. Für jede Funktion $\varphi \in C^2(\mathcal{F})$ gilt dann:

$$(\Delta_{\mathcal{F}}\varphi)\circ\gamma = \Delta(\varphi\circ\gamma). \tag{5}$$

Es sei Γ die zur Ueberlagerungsabbildung γ gehörige Gruppe der Deckisometrien von E. Die Punktmenge

$$P = \{z \in E \mid \rho(z, 0) \leqslant \rho(z, T(0))\ \forall T \in \Gamma - \{id\}\} \tag{6}$$

ist ein Fundamentalbereich von Γ (Frickesches Normalpolygon) und deshalb gilt für jede auf $\mathcal{F}$ stetige Funktion φ:

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi\, d\omega_{\mathcal{F}} = \int_P (\varphi\circ\gamma)\, d\omega. \tag{7}$$

Nach [3] I:1.1 und 2.6 gilt:

$$\mu_{\mathcal{F}} = \inf\{\rho(z, T(z)) \mid z \in E,\ T \in \Gamma - \{id\}\}$$

und daher $\forall z \in K(\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}})$, $T \in \Gamma - \{id\}$:

$$\mu_{\mathcal{F}} \leqslant \rho(z, T(z)) \leqslant \rho(z, T(0)) + \rho(T(0), T(z)) = \rho(z, T(0)) + \rho(0, z) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(z, T(0)) + \tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}.$$

Somit ist $\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} \leqslant \rho(z, T(0))$ und daher erst recht $\rho(z, 0) \leqslant \rho(z, T(0))$, also nach (6):

$$K(\tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}) \subset P. \tag{8}$$

3. Jetzt sei $x > 0$ und es seien

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n, \qquad (n \geqslant 0),$$

die sämtlichen Eigenwerte von $-\Delta_{\mathcal{F}}$ in $[0, x]$, also

$$A_{\mathcal{F}}(x) = n + 1, \tag{9}$$

und $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein zugehöriges Orthonormalsystem reeller Eigenfunktionen auf $\mathcal{F}$. Wir setzen

$$(\varphi_j\circ\gamma)(z) = \Phi_j(\rho, \vartheta) \tag{10}$$

und zeigen:

$$\int_0^{2\pi} \Phi_j(\rho, \vartheta)\, d\vartheta = 2\pi\varphi_j(q) F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos}\rho), \qquad \rho > 0. \tag{11}$$

In der Tat: Da $\Delta_{\mathcal{F}}\varphi_j + \lambda_j\varphi_j = 0$, so folgt aus (10), (5) und (3):

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Phi_j(\rho, \vartheta) + \operatorname{Ctg}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\Phi_j(\rho, \vartheta) + \frac{1}{\operatorname{Sin}^2\rho}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\Phi_j(\rho, \vartheta) + \lambda_j\Phi_j(\rho, \vartheta) = 0.$$

Daraus ergibt sich durch Integration nach ϑ:

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\int_0^{2\pi}\Phi_j(\rho,\vartheta)\,d\vartheta+\operatorname{Ctg}\rho\frac{d}{d\rho}\int_0^{2\pi}\Phi_j(\rho,\vartheta)\,d\vartheta+\lambda_j\int_0^{2\pi}\Phi_j(\rho,\vartheta)\,d\vartheta=0. \tag{12}$$

Nun führen wir die neue Variable $t=\operatorname{Cos}\rho$ ein und setzen

$$\int_0^{2\pi}\Phi_j(\rho,\vartheta)\,d\vartheta=H_j(t).$$

Dann ist

$$H_j\in C^2(1,+\infty) \tag{13}$$

und wegen (10) und (4) gilt

$$\lim_{t\downarrow 1}H_j(t)=\lim_{\rho\downarrow 0}\int_0^{2\pi}\Phi_j(\rho,\vartheta)\,d\vartheta=2\pi\varphi_j(q). \tag{14}$$

Die Differentialgleichung (12) geht über in

$$(t^2-1)H_j''(t)+2tH_j'(t)+\lambda_jH_j(t)=0,\qquad t>1.$$

Daher folgt aus (13), (14) nach Lemma 1:

$$H_j(t)=2\pi\varphi_j(q)F_{\lambda_j}(t).$$

4. Aus (11) folgt nun für beliebige reelle Koeffizienten $c_0,\ldots,c_n$:

$$2\pi\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(q)F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos}\rho)=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{n}c_j\Phi_j(\rho,\vartheta)\right)d\vartheta,$$

und daraus vermöge der Schwarzschen Ungleichung:

$$\left(\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(q)F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos}\rho)\right)^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{n}c_j\Phi_j(\rho,\vartheta)\right)^2d\vartheta.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $\operatorname{Sin}\rho$ und integrieren über π von 0 bis $r>0$, so ergibt sich wegen (10) und (2):

$$\int_0^r\left(\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(q)F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos}\rho)\right)^2\operatorname{Sin}\rho\,d\rho\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{K(r)}\left(\sum_{j=0}^{n}c_j(\varphi_j\circ\gamma)\right)^2d\omega \tag{15}$$

Nun definieren wir

$$m(x)=\min\left(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}},\,a(x)\right) \tag{16}$$

und wählen in (15) $r>0$ gerade so, dass $\operatorname{Cos}r=m(x)$. Dann ist $r\leqslant\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}$ und daher

nach (8) $K(r) \subset P$. Somit folgt aus (15) und (7):

$$\int_1^{m(x)} \left(\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(q) F_{\lambda_j}(t) \right)^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_P \left(\sum_{j=0}^{n} c_j (\varphi_j \circ \gamma) \right)^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}} \left(\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j \right)^2 d\omega_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n} c_j^2.$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass die φ_j ein Orthonormalsystem auf $\mathcal{F}$ bilden. Nun wählen wir speziell $c_j = \varphi_j(q)$ und erhalten:

$$\int_1^{m(x)} \left(\sum_{j=0}^{n} \varphi_j^2(q) F_{\lambda_j}(t) \right)^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n} \varphi_j^2(q). \tag{17}$$

Wegen $\lambda_j \leq x$ und $m(x) \leq a(x)$ gilt nach Lemma 4:

$$0 \leq F_x(t) \leq F_{\lambda_j}(t) \quad \text{für} \quad 1 \leq t \leq m(x), \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Daraus folgt aber

$$\left(\sum_{j=0}^{n} \varphi_j^2(q) \right)^2 \int_1^{m(x)} F_x^2(t)\, dt \leq \int_1^{m(x)} \left(\sum_{j=0}^{n} \varphi_j^2(q) F_{\lambda_j}(t) \right)^2 dt.$$

Daraus und aus (17) ergibt sich:

$$\left(\sum_{j=0}^{n} \varphi_j^2(q) \right) \int_1^{m(x)} F_x^2(t)\, dt \leq \frac{1}{2\pi}. \tag{18}$$

Das gilt für alle $q \in \mathcal{F}$. Daraus folgt nun durch Integration über $\mathcal{F}$ wegen (9):

$$A_{\mathcal{F}}(x) \int_1^{m(x)} F_x^2(t)\, dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}} d\omega_{\mathcal{F}} = 2(g_{\mathcal{F}} - 1). \tag{19}$$

5. Es sei jetzt die Voraussetzung von (A) erfüllt:

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \mu_{\mathcal{F}} \geq 1 + \delta, \qquad x \geq \max(3, 3/\delta). \tag{20}$$

Dann ist nach Lemma 2

$$a(x) \geq 1 + j^2/2x. \tag{21}$$

Aus (20) folgt wegen $j^2/2 = 2{,}88 \cdots < 3$

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \mu_{\mathcal{F}} \geq 1 + 3/x \geq 1 + j^2/2x. \tag{22}$$

Aus (21), (22) und (16) folgt $m(x) \geq 1 + j^2/2x$. Daher ist nach Lemma 2:

$$\int_1^{m(x)} F_x^2(t)\, dt \geq j^2 J_1^2(j)/2x.$$

Daraus und aus (19) ergibt sich nun (A).

6. Nach (16) und 2.3 (11) ist $m(1/4)=\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}$. Somit folgt aus (19):

$$A_{\mathcal{F}}(1/4)\int_1^{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}} F_{1/4}^2(t)\,dt \leqslant 2(g_{\mathcal{F}}-1).$$

Daraus und aus Lemma 3 folgen unmittelbar die Ungleichungen (C_1) und (C_2).

4. Beweis von (B)

Es sei $\lambda_0=0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$ die Folge aller Eigenwerte von $-\Delta_{\mathcal{F}}$, wobei jeder Eigenwert seiner Multiplizität entsprechend oft auftrete. Dann folgt aus der Selbergschen Spurformel (3.2) in [6] pag. 74 für $h(r)=e^{-sr^2}$, $s>0$:

$$e^{s/4}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-s\lambda_n} > (g_{\mathcal{F}}-1)\int_{-\infty}^{+\infty} rTg\pi r e^{-sr^2}\,dr = \pi(g_{\mathcal{F}}-1)\frac{f(s)}{s}$$

$$f(s)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-sr^2}}{\operatorname{Cos}^2\pi r}\,dr. \tag{1}$$

Andererseits ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-s\lambda_n} = s\int_0^{\infty} A_{\mathcal{F}}(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda, \qquad s>0.$$

Somit gilt:

$$\pi(g_{\mathcal{F}}-1)\frac{f(s)}{s}e^{-s/4} < s\int_0^{\infty} A_{\mathcal{F}}(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda, \qquad s>0. \tag{2}$$

Nun sei $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}\geqslant 1+\delta$, $\delta>0$. Dann gilt nach (A):

$$A_{\mathcal{F}}(\lambda)\leqslant\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)\lambda \quad \text{für} \quad \lambda\geqslant x_\delta, \tag{3}$$

$$x_\delta=\max(3,3/\delta), \qquad \kappa=4/j^2J_1^2(j). \tag{4}$$

Daher wird für $x\geqslant x_\delta$:

$$s\int_0^{\infty} A_{\mathcal{F}}(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda \leqslant A_{\mathcal{F}}(x)s\int_0^{x} e^{-s\lambda}\,d\lambda + \kappa(g_{\mathcal{F}}-1)s\int_x^{\infty}\lambda e^{-s\lambda}\,d\lambda =$$

$$= A_{\mathcal{F}}(x)(1-e^{-sx})+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)\left(x+\frac{1}{s}\right)e^{-sx}$$

und somit

$$s\int_0^{\infty} A_{\mathcal{F}}(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda \leqslant A_{\mathcal{F}}(x)+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)\left(x+\frac{1}{s}\right)e^{-sx} \quad \text{für} \quad x\geqslant x_\delta. \tag{5}$$

Dagegen wird für $0<x<x_\delta$ wegen (3):

$$s\int_0^\infty A_{\mathcal{F}}(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda \leqslant A_{\mathcal{F}}(x)+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)x_\delta s\int_x^{x_\delta} e^{-s\lambda}\,d\lambda+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)s\int_{x_\delta}^\infty \lambda e^{-s\lambda}\,d\lambda =$$

$$= A_{\mathcal{F}}(x)+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)\left(x_\delta e^{-sx}+\frac{1}{s}\,e^{-sx_\delta}\right)$$

und somit

$$s\int_0^\infty A_{\mathcal{F}}(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda \leqslant A_{\mathcal{F}}(x)+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)\left(x_\delta+\frac{1}{s}\right)e^{-sx} \quad \text{für} \quad 0<x<x_\delta. \tag{6}$$

Aus (5), (6) und (4) folgt jetzt für $x>0$, $s>0$:

$$s\int_0^\infty A_{\mathcal{F}}(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda \leqslant A_{\mathcal{F}}(x)+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{sx}\right)e^{-sx}$$

mit

$$y=\min(1,\, x/x_\delta)=\min(1,\, x/3,\, \delta x/3). \tag{7}$$

Daraus und aus (2) ergibt sich:

$$A_{\mathcal{F}}(x)\geqslant(g_{\mathcal{F}}-1)\left[\pi\frac{f(s)}{s}\,e^{-s/4}-\kappa x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{sx}\right)e^{-sx}\right].$$

Daraus folgt für $s=t/x$, $t>0$:

$$Q_{\mathcal{F}}(x)\geqslant\frac{\pi}{t}f\left(\frac{t}{x}\right)e^{-t/4x}-\kappa\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{t}\right)e^{-t}.$$

Da dies für alle $t>0$ gilt, so ist damit wegen (1) und (7) auch (B) bewiesen.

5. Flächen mit beliebig grossem $\mu_{\mathcal{F}}$

1. Wir versehen die obere Halbebene

$$H=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}$$

mit der Differentialgeometrie

$$ds=\frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}, \tag{1}$$

welche die konstante Krümmung -1 besitzt, und betrachten eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$. Jedes Element

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

erzeugt dann eine Isometrie γ^* von H,

$$\gamma^*(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

und die Gruppe Γ^* wirkt diskontinuierlich auf H. Der Kern des Homomorphismus $\Gamma \to \Gamma^*$ besteht aus den Elementen

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -\varepsilon,$$

falls letzteres überhaupt in Γ vorkommt. Wir setzen nun voraus, dass Γ^* einen kompakten Fundamentalbereich in H besitzt und dass

$$|Sp\gamma| > 2 \ \forall \gamma \in \Gamma, \ \gamma \neq \pm\varepsilon. \tag{2}$$

Dann wirkt Γ^* bekanntlich fixpunktfrei auf H und der Quotient $\mathcal{F} = H/\Gamma^*$ ist eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g > 1$. Die mit der kanonischen Abbildung auf $\mathcal{F} = H/\Gamma^*$ verpflanzte Differentialgeometrie (1) ergibt dann gerade die in der Einleitung charakterisierte Metrik von $\mathcal{F}$ und es gilt:

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} = \inf\{\tfrac{1}{2} \mid Sp\gamma| \mid \gamma \in \Gamma, \ \gamma \neq \pm\varepsilon\}. \tag{3}$$

In der Tat: Nach [3] I:1.1 und 2.6 gilt:

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} = \inf\{\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} d(z, \gamma^*(z)) \mid z \in H, \ \gamma \in \Gamma, \ \gamma \neq \pm\varepsilon\}. \tag{4}$$

Dabei bedeutet d die zur Metrik (1) gehörige Distanz. Wegen (2) gibt es zu jedem $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \pm\varepsilon$, ein $\nu \in SL(2, \mathbb{R})$ derart, dass

$$\nu^{-1}\gamma\nu = \pm\rho, \qquad \rho = \begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ 0 & a^{-1/2} \end{pmatrix}, \qquad a > 1.$$

Dann ist

$$|Sp\gamma| = a^{1/2} + a^{-1/2} \tag{5}$$

$$\gamma^*\nu^* = \nu^*\rho^*, \qquad \rho^*(z) = az,$$

und somit

$$d(\nu^*(z), \gamma^*\nu^*(z)) = d(\nu^*(z), \nu^*\rho^*(z)) = d(z, \rho^*(z)) = d(z, az).$$

Daraus folgt nach [3] I:2.6

$$\inf_{z\in H} d(\nu^*(z), \gamma^*\nu^*(z)) = \log a.$$

Daraus ergibt sich aber wegen (5)

$$\inf_{z\in H} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} d(z, \gamma^*(z)) = \inf_{z\in H} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} d(\nu^*(z), \gamma^*\nu^*(z)) =$$

$$= \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \log a = \tfrac{1}{2} |Sp\gamma|.$$

Hieraus und aus (4) folgt nun die Behauptung (3).

2. Es sei jetzt $p \equiv 3$ (4) eine Primzahl und I_p der Ring der ganzen Zahlen von $Q(\sqrt{p})$. Wir betrachten dann folgende Untergruppen von $SL(2, \mathbb{R})$:

$$\Phi_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} | a, b \in I_p, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\} \tag{6}$$

($\bar{a}$ bedeutet die zu a konjugierte Zahl),

$$\Gamma_p = \{\gamma \in \Phi_p \mid \gamma \equiv \varepsilon \bmod 2\}. \tag{7}$$

Nach Fricke [1] pag. 501–565 besitzt Φ_p^* einen kompakten Fundamentalbereich in H, und da Γ_p von endlichem Index in Φ_p ist (er ist übrigens 4), so gilt dasselbe auch von Γ_p^*.

3. Wir setzen nun voraus:

(V) Es sei $n \geqslant 2$ und die Gleichung

$$u + u^2 + r^2 = p(v^2 + s^2)$$

für $u = 1, \ldots, n-1$ nicht lösbar in ganzen Zahlen $v, r, s \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen: Dann ist

$$\tfrac{1}{2}|Sp\gamma| \geqslant 2n+1$$

und für die Fläche $\mathcal{F} = H/\Gamma_p^*$ gilt daher nach (3):

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} \geqslant 2n+1. \ \forall \gamma \in \Gamma_p, \ \gamma \neq \pm\varepsilon,$$

4. Beweis: Nach (6), (7) hat γ die Gestalt

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1+2(u+v\sqrt{p}) & 2(r+s\sqrt{p}) \\ 2(-r+s\sqrt{p}) & 1+2(u-v\sqrt{p}) \end{pmatrix} \tag{8}$$

mit $u, v, r, s \in \mathbb{Z}$ und

$$u + u^2 + r^2 = p(v^2 + s^2). \tag{9}$$

Darin ist $u \neq 0, -1$. Sonst wäre $r^2 = p(v^2+s^2)$, also $r = pk$ und somit $pk^2 = v^2 + s^2$.

Da aber $p \equiv 3$ (4) eine Primzahl ist, so ist dies bekanntlich nur möglich, wenn $k = v = s = 0$. Dann wäre aber $\gamma = \pm\varepsilon$, entgegen unserer Annahme. Es ist also entweder $u \geqslant 1$ oder $u \leqslant -2$. Im ersten Falle folgt aus (9) und Voraussetzung (V) sogar $u \geqslant n$, also $u + u^2 \geqslant n + n^2$. Im zweiten Falle ist $u' = -(u+1) \geqslant 1$ und daher folgt wegen $u' + (u')^2 = u + u^2$ aus (9) und (V) sogar $u' \geqslant n$, also $u + u^2 = u' + (u')^2 \geqslant n + n^2$ auch im zweiten Falle. Nun ist aber nach (8)

$$\tfrac{1}{4}(Sp\,\gamma)^2 = 1 + 4(u + u^2) \geqslant 1 + 4(n + n^2) = (2n+1)^2.$$

5. Nach 3. gibt es also sicher dann Flächen mit beliebig grossem $\mu_{\mathcal{F}}$, wenn es zu jedem $n \geqslant 2$ eine solche Primzahl $p \equiv 3$ (4) gibt, dass die Voraussetzung (V) erfüllt ist. Nun ist (V) gewiss erfüllt, wenn alle Zahlen

$$-(u + u^2), \qquad u = 1, \ldots, n-1$$

quadratische Nichtreste mod p sind. Wegen $p \equiv 3$ (4) ist aber -1 Nichtrest mod p. Also ist (V) sicher dann erfüllt, wenn alle Zahlen

$$u + u^2, \qquad u = 1, \ldots, n-1,$$

quadratische Reste mod p sind. Dazu genügt es, dass alle in diesen Zahlen aufgehenden Primfaktoren

$$2, q_1, \ldots, q_r$$

quadratische Reste mod p sind. Wir betrachten nun die $r+1$ simultanen Kongruenzen

$$p \equiv -1\,(8) \tag{10}$$

$$p \equiv 1(q_j), \quad \text{wenn} \quad q_j \equiv 1\,(4), \tag{11}$$

$$p \equiv -1(q_j), \quad \text{wenn} \quad q_j \equiv 3\,(4), \tag{12}$$

wobei die Unbekannte p vorerst nicht notwendig eine Primzahl bedeuten soll. Da die Moduln dieser Kongruenzen paarweise teilerfremd sind, bilden ihre gemeinsamen Lösungen eine volle Restklasse mod $2q_1 \cdots q_r$ und zwar offensichtlich eine zu diesem Modul teilerfremde. Dann gibt es nach Dirichlet auch eine Primzahl p, welche alle $r+1$ Kongruenzen erfüllt. Für dieses p gilt nun wegen (10):

$$\left(\frac{2}{p}\right) = 1.$$

Wenn $q_i \equiv 1$ (4), so folgt aus (11) und dem quadratischen Reziprozitätsgesetz:

$$1 = (-1)^{(q_j - 1/2)(p - 1/2)} = \left(\frac{q_j}{p}\right)\left(\frac{p}{q_j}\right) = \left(\frac{q_j}{p}\right)\left(\frac{1}{q_j}\right) = \left(\frac{q_j}{p}\right).$$

Wenn dagegen $q_j \equiv 3$ (4), so folgt aus (12)

$$-1 = (-1)^{(q_j - 1/2)(p-1/2)} = \left(\frac{q_j}{p}\right)\left(\frac{p}{q_j}\right) = \left(\frac{q_j}{p}\right)\left(\frac{-1}{q_j}\right) = -\left(\frac{q_j}{p}\right).$$

Somit sind in der Tat alle Primzahlen $2, q_1, \ldots, q_r$ Reste mod p und daher gibt es eine Fläche $\mathcal{F}$ mit $\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} \geqslant 2n+1$.

LITERATUR

[1] Fricke, R. und Klein, F., *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen I*, (Teubner, Leipzig 1897).

[2] Hobson, E. W., *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, (Cambridge University Press 1931).

[3] Huber, H., *Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen*, I: Math. Annalen *138* (1959), 1–26, II: Math. Annalen *142* (1961), 385–398, III: Math. Annalen *143* (1961), 463–464.

[4] McKean, H. P., *Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface*, Comm. Pure Appl. Math. XXV (1972), 225–246.

[5] Randol, B., *Small eigenvalues of the Laplace operator on compact Riemann surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. *80* (1974), 996–1000.

[6] Selberg, A., *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. *20* (1956), 47–87.

Eingegangen den 30. Oktober 1975