

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 51 (1976)

**Artikel:** Isometrische und Konforme Verheftung  
**Autor:** Huber, Alfred  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39446>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Isometrische und Konforme Verheftung

ALFRED HUBER

Seien  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  einfach zusammenhängende Gebiete in der komplexen Ebene. Ihre Ränder  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  seien rektifizierbare Jordankurven gleicher Länge. Wir sagen,  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  seien längs dieser Ränder *isometrisch verheftet*, falls die Randpunkte derart miteinander identifiziert werden, dass zugeordnete Randbogen stets dieselbe Länge aufweisen. Sind  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  *von beschränkter Drehung* und besitzen sie keine Nullwinkel, so ist diese Verheftung—wie in [2] bewiesen wurde—im Sinne von Pfluger [6] überall *konform zulässig*, d.h. sie hat eine Verheftung der konformen Strukturen von  $\Omega_1$  und von  $\Omega_2$  zur Folge. In der vorliegenden Note wird durch Konstruktion eines Gegenbeispiels gezeigt, dass *nicht jede isometrische Verheftung konform zulässig* ist.

**SATZ.** *Es gibt isometrische Verheftungen, welche nicht überall konform zulässig sind.*

*Bemerkung.* Es liegt nahe zu vermuten, dass man durch Iteration der nun folgenden Konstruktion—durch eine “Verdichtung der singulären Punkte”—zu rektifizierbaren Jordankurven gelangen kann, deren isometrische Verheftung mit Kreisen gleicher Länge in *keinem* Punkte konform zulässig ist. Dies werden wir jedoch hier nicht beweisen.

*Beweis des Satzes.* Sei  $G$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet in einer  $\zeta$ -Ebene, dessen Rand einen freistehenden analytischen Bogen  $R$  enthält, und sei  $a$  ein innerer Punkt von  $R$ . Sei ferner  $D$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet in einer  $w$ -Ebene, dessen Rand einen freistehenden analytischen Bogen  $B$  enthält, und sei  $b$  ein innerer Punkt von  $B$ .

Die isometrische Verheftung von  $G$  mit  $D$  längs  $R$  und  $B$  unter Identifikation von  $a$  mit  $b$  ist trivialerweise (konform) zulässig. In der nun folgenden Konstruktion zerstören wir diese Zulässigkeit in  $a$  (bezw.  $b$ ), indem wir  $R$  ersetzen durch ein abgeändertes Kurvenstück  $\Gamma$ , das in der Umgebung von  $a$  immer noch rektifizierbar ist. Ausserhalb des Punktes  $a$  wird die isometrische Verheftung des abgeänderten—nun von  $\Gamma$  anstelle von  $R$  begrenzten—Gebietes  $\Omega$  mit  $D$

weiterhin zulässig sein. In  $a$  wird dies jedoch nicht mehr zutreffen, und zwar wird sich dies daraus ergeben, dass die durch die Verheftung ausserhalb  $a$  entstehende Riemannsche Fläche gegen diesen Punkt hin ein hyperbolisches Ende besitzt. (Wäre die Fortsetzung der Verheftung nach  $a$  hinein zulässig, so müsste dieses Ende parabolisch sein).

Sei  $f$  diejenige konforme Abbildung von  $G$  auf  $H^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > \sigma\}$ , deren Laurententwicklung um  $a$  mit

$$z = f(\zeta) = \frac{a_{-1}}{\zeta - a} + a_0 + a_1(\zeta - a) + \dots, \quad (1)$$

wobei  $|a_{-1}| = 1$ ,  $\operatorname{Re} a_0 = 0$ , beginnt. Sei  $g$  diejenige konforme Abbildung von  $D$  auf  $H^- = \{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ , deren Laurententwicklung um  $b$  mit

$$z = g(w) = \frac{b_{-1}}{w - b} + b_0 + b_1(w - b) + \dots, \quad (2)$$

wobei  $|b_{-1}| = 1$ ,  $\operatorname{Re} b_0 = 0$ , beginnt. (Die Punkte  $a$  und  $b$  werden also durch die stetigen Erweiterungen von  $f$  und  $g$  auf  $R$  und  $B$  auf den Punkt  $\infty$  abgebildet).

Sei  $N$  eine natürliche Zahl, gross genug, so dass  $f^{-1}(N-1) \in R$ . Sei  $\{\varepsilon_n\}$ ,  $n = N, N+1, N+2, \dots$ , eine Nullfolge von positiven Zahlen, an welche später noch verschiedentlich Bedingungen gestellt werden; auf jeden Fall sei  $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{8}$  für alle  $n$ . Wir definieren

$$a_n := f^{-1}(n - \varepsilon_n), \quad b_n := f^{-1}(n + \varepsilon_n),$$

$n = N, N+1, N+2, \dots$ . Es bezeichne  $C$  eine (beliebig wählbare) positive Zahl. Wir ersetzen den Teilbogen  $a_N b_N$  von  $R$  durch eine ins Aussengebiet von  $G$  hinausragende Polygonschleife der Länge  $Cn^{-3/2}$ , den Teilbogen  $a_{N+1} b_{N+1}$  durch eine ebensolche Schleife der Länge  $C(N+1)^{-3/2}$ , usf. (Diese Schleifen sollen weder den Rand von  $G$  noch einander noch sich selber überschneiden oder berühren. Wir setzen hier voraus, dass die Zahl  $\varepsilon_n$  für alle  $n$  derart klein gewählt sei, dass der Teilbogen  $a_n b_n$  kürzer als  $Cn^{-3/2}$  ist). Durch das Ersetzen der Bogen  $a_n b_n$  durch solche Schleifen der Länge  $Cn^{-3/2}$  ( $n = N, N+1, N+2, \dots$ ), entsteht aus  $R$  ein rektifizierbares Kurvenstück  $\Gamma$ , welches ausserhalb einer jeden Umgebung von  $a$  stückweise analytisch ist.

Es bezeichne  $G_N$  das Vereinigungsgebiet von  $G$  mit dem Innern der ersten Schleife (incl. Inneres des Bogens  $a_N b_N$ ). Sei  $f_N$  die "normierte" (d.h. in ihrer Laurententwicklung um  $a$  auf dieselbe Art wie (1) beginnende) konforme

Abbildung von  $G_N$  auf  $H^+$ . Die Zahl  $\varepsilon_N$  soll so klein sein, dass

$$|f_N(\zeta) - f(z)| < \frac{1}{16} \quad (3)$$

für die ausserhalb des Bogens  $a_N b_N$  liegenden  $\zeta \in R$ . Sei ferner  $G_{N+1}$  das Vereinigungsgebiet von  $G_N$  mit dem Innern der zweiten Schleife, und sei  $f_{N+1}$  die normierte konforme Abbildung von  $G_{N+1}$  auf  $H^+$ . Die Zahl  $\varepsilon_{N+1}$  soll so klein sein, dass

$$|f_{N+1}(\zeta) - f_N(\zeta)| < \frac{1}{32} \quad (4)$$

für die ausserhalb der Bogen  $a_N b_N$  und  $a_{N+1} b_{N+1}$  liegenden  $\zeta \in R$ , usf. Die in  $\Omega = \bigcup_{n=N}^{\infty} G_n$  definierte Funktion  $F = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  bildet dieses Gebiet konform ab auf  $H^+$ , wobei sich aus (3), (4) usf. ergibt, dass

$$|F(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{1}{8} \quad (5)$$

für diejenigen  $\zeta \in R$ , welche ausserhalb der durch Schleifen ersetzten Bogenstücke liegen.

Sei nun  $V: w \mapsto \zeta = V(w)$  die von  $b$  (bezw.  $a$ ) ausgehende isometrische Verheftung von  $D$  mit  $\Omega$  längs  $B$  und  $\Gamma$ . Wir ziehen es vor, anstelle von  $V$  die induzierte Verheftung  $\alpha = F \circ V \circ g^{-1}$  von  $H^-$  mit  $H^+$  zu untersuchen, welche dieselbe (abstrakte) Riemannsche Fläche erzeugt. Unser Ziel ist es nun also zu zeigen, dass die durch die Verheftung  $\alpha$  hervorgerufene Riemannsche Fläche  $S(\alpha)$  im Unendlichen hyperbolisch ist.

Sei  $x$  eine grosse positive Zahl, die wir als Randpunkt von  $H^-$  auffassen. Für die Länge  $L^-(x)$  des Kurvenstücks  $g^{-1}([x, +\infty])$  gilt

$$L^-(x) = \frac{B}{x}, \quad (6)$$

wobei  $B = B_0 + O(1/x)$ , mit positiver Konstante  $B_0$ .

Sei  $\alpha$  eine grosse positive Zahl, die wir als Randpunkt von  $H^+$  auffassen. Für die Länge  $l^+(\alpha)$  des Kurvenstücks  $f^{-1}([\alpha, +\infty])$  gilt

$$l^+(\alpha) = \frac{C}{\alpha}, \quad (7)$$

wobei  $C = C_0 + O(1/\alpha)$ , mit positiver Konstante  $C_0$ . Daraus folgt mit Hilfe von Beziehung (5) und unter Berücksichtigung der hinzutretenden Schleifenlängen

sowie der Annahme, dass  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , für die Länge  $L^+(\alpha)$  von  $F^{-1}([\alpha, +\infty])$  die Aussage

$$L^+(\alpha) = \frac{D}{\sqrt{\alpha}} + \frac{E}{\alpha}, \quad (8)$$

wobei  $D = D_0 + O(1/\alpha)$ ,  $E = E_0 + O(1/\alpha)$ , mit positiven Konstanten  $D_0$  und  $E_0$ .

Die Voraussetzung der Isometrie der Verheftung  $V$  besagt, dass  $L^+(\alpha(x)) = L^-(x)$  für alle  $x$ , also zufolge (6) und (8)

$$\frac{B}{x} = \frac{D}{\sqrt{\alpha}} + \frac{E}{\alpha}. \quad (9)$$

Daraus folgt zunächst sofort die Existenz von positiven Zahlen  $C_1$  und  $C_2$  mit der Eigenschaft, dass  $C_1 x^2 < \alpha(x) < C_2 x^2$  für grosse positive  $x$ . Nach einiger Rechnung erhält man aus (9) die präziseren Resultate

$$\alpha(x) = Ax^2 + O(x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$x(\alpha) = a\sqrt{\alpha} + O(1) \quad \text{für } \alpha \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Dabei bezeichnen  $A$  und  $a$  positive Konstante ( $A \cdot a^2 = 1$ ).

Betrachten wir nun die zu  $\alpha$  inverse Abbildung  $\beta := \alpha^{-1} = g \circ V^{-1} \circ F^{-1}$ . Auf der (hier als Rand von  $H^+$  aufzufassenden) reellen Achse führen wir folgende Punktmengebezeichnungen ein:

$$U := (-\infty, x_0],$$

$$I_n := [N + n + \frac{1}{4}, N + n + \frac{3}{4}] \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$I := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Dabei sei  $x_0$  eine derart kleine negative Zahl, dass  $U$  durch  $f^{-1}$  in einen samt Rand im Innern von  $R$  liegenden Teilbogen von  $R$  abgebildet wird. Wir behaupten: Konvergiert die Folge  $\{\varepsilon_n\}$  genügend rasch gegen 0, so gibt es eine Zahl  $k > 1$  mit der Eigenschaft, dass die (auf  $U \cup I$  analytische) Funktion  $\beta$  für alle  $x \in U$  die Bedingung

$$\frac{1}{k} < \beta'(x) < k \quad (12)$$

und für alle  $x \in I$  die Ungleichung

$$\frac{1}{k} < \frac{x^2 \cdot \beta'(x)}{\beta^2(x)} < k \quad (13)$$

erfüllt.

Zum Beweis betrachten wir vorerst die von  $b$  (bezw.  $a$ ) ausgehende “ungestörte” isometrische Verheftung  $V_0$  von  $D$  mit  $G$  sowie die durch sie induzierte Verheftung  $\beta_0 := g \circ V_0 \circ f^{-1}$  von  $H^+$  mit  $H^-$ . Die vorausgesetzte Isometrie besagt, dass

$$|f^{-1}'(x)| dx = |g^{-1}'(\beta_0)| d\beta_0, \quad (14)$$

wobei zufolge (1) und (2)

$$x^2 |f^{-1}'(x)| = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (15)$$

für  $x \rightarrow \pm\infty$  und

$$\beta_0^2 |g^{-1}'(\beta_0)| = 1 + O\left(\frac{1}{\beta_0}\right) \quad (16)$$

für  $\beta_0 \rightarrow \pm\infty$ . Aus (14), (15) und (16) schliessen wir auf die Existenz einer Zahl  $k_0 > 1$  mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{1}{k_0} < \frac{x^2 \cdot \beta_0^1(x)}{\beta_0^2(x)} < k_0 \quad (17)$$

für alle  $x$  mit genügend grossem Betrag. Bei der “gestörten” Verheftung  $V$  bleiben die Beziehungen (14) und (16) ( $f$  durch  $F$  ersetzt, Index 0 weggelassen) bestehen. Entsprechend (15) gilt zunächst

$$x^2 |f_n^{-1}'(x)| = 1 + O_n\left(\frac{1}{x}\right), \quad (18)$$

$n = N, N+1, N+2, \dots$ . Lassen wir die Folge  $\{\epsilon_n\}$  genügend rasch gegen 0 streben, und beschränken wir uns auf  $x \in U \cup I$ , so gelingt unter Zuhilfenahme von (5) eine gleichmässige Abschätzung der Grössenordnung: es gibt dann ein

$K < 0$  derart, dass

$$|x^2 |f_n^{-1}(x)| - 1| < \frac{K}{|x|} \quad (19)$$

für  $n = N, N+1, N+2, \dots$ , und alle  $x \in U \cup I$ . Für solche  $x$  bleibt somit auch (15) ( $f$  durch  $F$  ersetzt) bestehen, und es gilt (13) für ein  $k > k_0$  und alle  $x$ , welche im Durchschnitt von  $U \cup I$  mit einer geeigneten Umgebung von  $\infty$  liegen. Durch ein Anheben von  $k$  ergibt sich schliesslich die Gültigkeit von (13) für alle  $x \in U \cup I$ . Aus (2), (1) und (5) schliessen wir dass ausserdem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \beta(x)/x = 1$ . Aus (13) folgt damit (12) für alle  $x \in U$  (nicht notwendigerweise für dasselbe  $k$ ).

In einer Umgebung von  $\infty$  definieren wir nun eine Modifikation  $\beta^*$  der Verheftung  $\beta$ . Es bezeichne

$$K_n := \left[ N + n + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}, N + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

$$(n = 16, 17, 18, \dots), \quad K := \bigcup_{n=16}^{\infty} K_n.$$

Die Verheftung  $\beta^*$  sei definiert, stetig und stückweise stetig differenzierbar auf  $U \cup X$ , wobei  $X := [N+16, \infty)$ , und erfülle dazu folgende Bedingungen:

- (1)  $\beta^*(x) = x$  für alle  $x \in U$ ,
- (2)  $\beta^*(N+16) = \beta(N+16)$ ,
- (3)  $\beta^{*'}(x) = \beta'(x)$  für diejenigen  $x$  aus  $X \setminus K$ , in welchen  $\beta'$  existiert,
- (4)  $\beta^{*'}(x) = \frac{1}{2}$ , falls  $x$  innerer Punkt von  $K$  ist.

Auf demselben Bereich definieren wir zwei weitere Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$ :  $\psi$  sei die Identität,  $\psi(x) = x$  für alle  $x \in U \cup X$ , und  $\varphi$  werde festgelegt durch

$$\begin{cases} \varphi(x) = \beta(x), & \text{falls } x \in U, \\ \varphi(x) = \beta(x) - \beta^*(x) + x, & \text{falls } x \in X. \end{cases}$$

Diese Funktionen sind *quasisymmetrisch* auf der Menge  $U \cup [M, \infty)$ , falls  $M$  genügend gross gewählt wird. (Für die hier verwendeten Begriffe und Resultate aus der Theorie der quasikonformen Abbildungen sei auf das Lehrbuch von Lehto und Virtanen [4] verwiesen). Die Funktion  $\varphi$  ist nämlich stückweise stetig differenzierbar. Ferner gilt  $\varphi'(x) = \beta'(x)$  für alle  $x \in U$ , also vermöge (12) die Ungleichung  $(1/k) < \varphi'(x) < k$  für ein  $k > 1$ . In denjenigen Punkten  $x \in X \setminus K$ , in welchen  $\beta'$  existiert, ist  $\varphi'(x) = \beta'(x) - \beta^{*'}(x) + 1 = 1$ . Ist schliesslich  $x$  innerer

Punkt von  $K$ , ergibt sich aus der Definition von  $\varphi$ , Eigenschaft (4) von  $\beta^*$  und Ungleichung (13) für ein  $k > 1$  die Abschätzung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{k} \cdot \frac{\beta^2(x)}{x^2} < \varphi'(x) < \frac{1}{2} + k \cdot \frac{\beta^2(x)}{x^2}. \quad (20)$$

Da nach (11)  $\beta(x) = O(\sqrt{x})$ , folgt daraus die Existenz von Zahlen  $K > 1$  und  $M > 0$  derart, dass

$$\frac{1}{K} < \varphi'(x) < K$$

für alle  $x \geq M$ .

Die Funktionen  $\beta$ ,  $\beta + \psi$ ,  $\beta^*$  und  $\beta^* + \varphi$  definieren auf  $W := U \cup [M, +\infty)$  Verheftungen von  $H^+$  mit  $H^-$ , welche im Endlichen überall zulässig sind und Riemannsche Flächen vom Typus des Kreisrings  $S(\beta)$ ,  $S(\beta + \psi)$ ,  $S(\beta^*)$  und  $S(\beta^* + \varphi)$  erzeugen. Wir beweisen nun, dass diese Riemannschen Flächen im Unendlichen im konformen Typ übereinstimmen. Da  $\beta + \psi = \beta^* + \varphi$ , ist nur zu zeigen, dass dies einerseits für  $S(\beta^*)$  und  $S(\beta^* + \varphi)$  und andererseits für  $S(\beta)$  und  $S(\beta + \psi)$  zutrifft.

Seien  $P$  und  $P_0$  konform äquivalente Kreisringe zu  $S(\beta^*)$  und  $S(\beta^* + \varphi)$ . Dann existieren konforme Abbildungen  $g: H^+ \rightarrow P$  und  $h: H^- \rightarrow P$  derart, dass  $h(\beta^*(x)) = g(x)$  für alle  $x \in W$ . (Hier bezeichnen  $H^+$  und  $H^-$  nicht wie früher die obere und untere Halbebene, sondern vielmehr deren Durchschnitt mit einer geeigneten—nicht immer derselben—Umgebung von  $\infty$ ). Ebenso gibt es Abbildungen  $g_0: H^+ \rightarrow P_0$  und  $h_0: H^- \rightarrow P_0$  derart, dass  $h_0(\beta^*(x) + \varphi(x)) = g_0(x)$  für alle  $x \in W$ . Da  $\varphi$  quasisymmetrisch ist, existiert eine quasikonforme Abbildung  $\Phi: H^- \rightarrow H^+$  mit der Eigenschaft, dass  $\Phi(x) = \varphi(x)$  für alle  $x \in W$  (Ahlfors und Beurling [1]). Die Abbildungen  $h_0 \circ \Phi \circ h^{-1}$  und  $g_0 \circ g^{-1}$  ergänzen sich zu einer quasikonformen Abbildung, aus welcher ersichtlich ist, dass  $P$  und  $P_0$  in denjenigen Enden vom gleichen konformen Typ sind, welche bei  $S(\beta^*)$  und  $S(\beta^* + \varphi)$  dem Unendlichen entsprechen. Dieselbe Schlussweise kann bei  $S(\beta)$  und  $S(\beta + \psi)$  angewandt werden.

Die Riemannschen Flächen  $S(\beta)$  und  $S(\beta^*)$ —und somit auch  $S(\alpha) = S(\beta^{-1})$  und  $S(\beta^{*-1})$ —sind vom gleichen konformen Typ. Es bleibt zu zeigen, dass die Verheftung  $\alpha^* := \beta^{*-1}$  im Unendlichen ein hyperbolisches Ende erzeugt. Diese besitzt folgende Eigenschaften:

- (A)  $\alpha^*(x) = x$  für genügend kleine  $x$ .
- (B)  $\alpha^*(x) = Bx^2 + O(x)$  für  $x \rightarrow \infty$ , wobei  $B$  eine positive Zahl bezeichnet. Dies



folgt unmittelbar daraus, dass eine Zahl  $b > 0$  existiert mit der Eigenschaft, dass

$$\beta^*(x) = b\sqrt{x} + O(1) \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Zum Beweis von (21) stützt man sich einerseits auf (11), andererseits darauf, dass zufolge der Definition von  $\beta^*$ , (20) und (11) bei genügend grossem  $x_0$

$$\int_{x_0}^x [\beta^{*'}(t) - \beta'(t)] dt = \int_{K_n[x_0, x]} [1 - \varphi'(t)] dt = \text{const.} \cdot \sqrt{x} + O(1) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

(C) Es gibt Zahlen  $k$ ,  $C_1$  und  $C_2$  (mit  $0 < k < 1$  und  $C_1 > C_2 > 0$ ), eine Zahlfolge  $\{D_n\}$  sowie eine Intervallfolge  $\{T_n\} = \{[s_n - (k/n), s_n + (k/n)]\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , derart, dass Folgendes gilt:

$$T_n \cap T_m = \Phi \quad \text{für } n \neq m; \quad C_2 < s_{n+1} - s_n < C_1$$

für alle  $n$ ;  $\alpha^*(x) = 2x + D_n$  für alle  $x \in T_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Zur Konstruktion einer derartigen Intervallfolge führen wir eine natürliche Zahl  $p$  ein, welche für genügend grosse  $x$  die Ungleichung

$$\rho > 3 |\beta^*(x) - b\sqrt{x}| \quad (22)$$

erfüllen soll, wobei  $b$  die in (21) auftretende Zahl bezeichnet. Dann besitzt die Intervallfolge  $\{\beta^*(K_{p^2n^2})\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , wobei die Intervalle  $K_j$  wie bei Einführung der Verheftung  $\beta^*$  definiert sind, von einem gewissen Index an alle von  $\{T_n\}$  geforderten Eigenschaften bis auf die vorgeschriebenen Längenproportionen. Letztere können aber nachträglich durch eine geeignete Verkleinerung der Intervalle erreicht werden.

Wir haben nun also einen Kreisring  $\{z \mid R < |z| < \infty\}$ ,  $R > 0$ , zu betrachten, diesen längs der positiven reellen Achse aufzuschneiden, ihn nach der Vorschrift  $\alpha^*$  wiederzuverheften und zu zeigen, dass die entstehende Riemannsche Fläche im Unendlichen hyperbolisch ist. Wir verwenden dabei die Methode der Extremallängen (vgl. Jenkins [3], Pfluger [5] u.a.). Von nun an bezeichnen wir die modifizierte Verheftung  $\alpha^*$  mit den Eigenschaften (B) und (C) kurz mit  $\alpha$ .

Zunächst zerschneiden wir die zu untersuchende Riemannsche Fläche in Teilbereiche. Sei  $R > 2$ . Wir definieren

$$A := \{z \mid |z| > R, \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

$$U\{z \mid |z| > R, |\operatorname{Im} z| > 2\},$$

$$B_n := \{z \mid |z| > R, s_n < \operatorname{Re} z < s_{n+1}, -2 < \operatorname{Im} z \leq 0\}$$

$$U\{z \mid |z| > R, \alpha(s_n) < \operatorname{Re} z < \alpha(s_{n+1}), 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(Auf der positiven reellen Achse gelegene Punkte haben wir in dieser Definition bald zum untern, bald zum obern Verheftungsufer gezählt. Die Bedeutung von  $s_n$  ist aus der Eigenschaft (C) der Verheftung ersichtlich). Für genügend grosse  $n$  ist  $B_n$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet auf  $S(\alpha)$ .

Nun führen wir auf dieser Riemannschen Fläche eine Metrik  $\rho(z) |dz|$  ein. Wir definieren

$$\rho(z) = \frac{1}{|z| \cdot \log |z|} \quad \text{für alle } z, |z| > R,$$

mit folgenden Ausnahmen: Es sei

$$\rho(z) = \frac{1}{\log n}, \quad \text{falls } z \in V_n,$$

$$\rho(z) = \frac{1}{2 \log n}, \quad \text{falls } z \in W_n,$$

$$\rho(z) = \frac{1}{\operatorname{Re} z \cdot \log \operatorname{Re} z}, \quad \text{falls } z \in X_n,$$

$$\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re} z} \cdot \log \operatorname{Re} z}, \quad \text{falls } z \in Y_n.$$

Dabei bezeichnen

$$V_n := \left\{ z \mid s_n - \frac{k}{n} \leq \operatorname{Re} z \leq s_n + \frac{k}{n}, -2 \leq \operatorname{Im} z \leq 0 \right\},$$

$$W_n := \left\{ z \mid \alpha\left(s_n - \frac{k}{n}\right) \leq \operatorname{Re} z \leq \alpha\left(s_n + \frac{k}{n}\right), 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2 \right\},$$

$$X_n := \left\{ z \mid s_n + \frac{k}{n} < \operatorname{Re} z < s_{n+1} - \frac{k}{n+1}, -2 \leq \operatorname{Im} z \leq -1 \right\},$$

$$Y_n := \left\{ z \mid \alpha\left(s_n + \frac{k}{n}\right) < \operatorname{Re} z < \alpha\left(s_{n+1} - \frac{k}{n+1}\right), 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2 \right\},$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ . Jedes Gebiet  $B_n$  wird so durch einen "Rahmen mit stärkerer Metrik" begrenzt. Man verifiziert leicht, dass

$$\iint_{|z| > R} \rho^2(z) \, dx \, dy < \infty \quad (z = x + iy).$$

Nun soll gezeigt werden, dass eine positive Zahl  $\mu$  existiert mit der Eigenschaft, dass

$$\int_{\gamma} \rho(z) \, |dz| \geq \mu \tag{23}$$

für jede "Trennende"  $\gamma$  (d.h. für jede stückweise glatte, das Unendliche vom endlichen Rand trennende, geschlossene Kurve  $\gamma$  auf  $S(\alpha)$ ). Bekanntlich darf man dann schliessen, dass  $S(\alpha)$  hyperbolisch ist. Beim Nachweis von (23) dürfen wir uns auf Kurven  $\gamma$  beschränken, welche "nahe bei  $\infty$ ", d.h. in der  $z$ -Ebene ausserhalb eines beliebig grossen Kreises liegen.

Wir betrachten zunächst folgende spezielle Verheftung: Der Kreisring  $\{z \mid R < |z| < \infty\}$  werde längs der positiven reellen Achse aufgeschnitten und nach der Vorschrift  $\alpha_0: x \mapsto Bx^2$  (vgl. Eigenschaft (B) der Verheftung  $\alpha$ ) wiederverheftet. Die so entstehende Riemannsche Fläche  $S(\alpha_0)$  ist bekanntlich im Unendlichen hyperbolisch. Zum Beweis kann man die Metrik  $\rho_0(z) \, |dz|$ , wobei

$$\rho_0(z) = \frac{1}{|z| \cdot \log |z|},$$

verwenden. Offensichtlich ist

$$\iint_{|z| > R} \rho_0^2(z) \, dx \, dy < \infty,$$

und man kann ferner zeigen, dass eine positive Zahl  $\mu_0$  existiert mit der Eigenschaft, dass

$$\int_{\gamma_0} \rho_0(z) \, |dz| \geq \mu_0 \tag{24}$$

für jede Trennende  $\gamma_0$  auf  $S(\alpha_0)$ . (Z.B. werden durch konforme Verpflanzung vom aufgeschnittenen Kreisring auf einen Halbstreifen Verheftung  $\alpha_0$  und Metrik

$\rho_0(z) |dz|$  in einen Spezialfall eines von Sutter [7, §1] behandelten Problems übergeführt, woraus sich die Gültigkeit von (24) sofort ergibt).

Nun behaupten wir die Existenz einer positiven Zahl  $\rho$  mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Trennenden  $\gamma$  auf  $S(\alpha)$  gibt es eine Trennende  $\gamma_0$  auf  $S(\alpha_0)$  derart, dass

$$\int_{\gamma} \rho(z) |dz| \geq \rho \int_{\gamma_0} \rho_0(z) |dz|. \tag{25}$$

In Kombination mit (24) ergibt sich daraus unmittelbar die zu beweisende Eigenschaft (23) der Metrik  $\rho(z) |dz|$ .

Sei nun  $\gamma$  eine vorgegebene Trennende auf  $S(\alpha)$ . Wir ordnen ihr eine Trennende  $\gamma_0$  auf  $S(\alpha_0)$  zu nach folgender Konstruktion: Zuerst zerlegen wir  $\gamma$  in Teilbögen, welche ganz in einer der Mengen  $\bar{A}$  ( $:=$  abgeschlossene Hülle von  $A$ ),  $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots$ , enthalten sind und Randpunkte eines solchen Bereichs miteinander verbinden.

Ist  $\gamma'$  ein solcher Teilbogen, und schneidet  $\gamma'$  die Verheftungskante *nicht*, so betrachten wir  $\gamma'$  (in der  $z$ -Ebene) auch als Teilbogen  $\gamma'_0$  der zugeordneten Kurve  $\gamma_0$ . Ist  $|z|$  genügend gross, so gilt  $\rho(z) \geq \rho_0(z)$ . Wir dürfen also annehmen, dass

$$\int_{\gamma'} \rho(z) |dz| \geq \int_{\gamma'_0} \rho_0(z) |dz|. \tag{26}$$

Bei einem in  $\bar{B}_n$  liegenden Teilbogen  $\gamma''$ , welcher die Verheftungskante *schneidet*, unterscheiden wir zwei Fälle:

(1) Ist  $\gamma''$  "euklidisch" (dies soll hier bedeuten: gemessen unterhalb der Verheftungskante in der Metrik  $|dz|$ , oberhalb der Verheftungskante in der Metrik  $\frac{1}{2}|dz|$ ) *kürzer* als  $k/n + 1$ , so liegen die Endpunkte von  $\gamma''$  entweder beide auf  $\bar{B}_{n-1} \cap \bar{B}_n$  oder beide auf  $\bar{B}_n \cap \bar{B}_{n+1}$ . Ersetzen wir  $\gamma''$  durch die kürzeste (bis auf den Verheftungssprung euklidisch geradlinige) Verbindung  $\bar{\gamma}''$  seiner Endpunkte, so entsteht aus  $\gamma$  eine (in der Metrik  $\rho(z) |dz|$  gemessen) kürzere Trennende. Mit dieser neuen Trennenden arbeiten wir weiter, wobei wir  $\bar{\gamma}''$  mit den daran anschliessenden Teilbögen aus  $\bar{B}_{n-1}$  oder  $\bar{B}_{n+1}$  zusammenhängen.

(2) Ist  $\gamma''$  euklidisch gemessen *nicht* kürzer als  $k/n + 1$ , so muss für  $n \geq 3$  (und folglich  $(k/n + 1) < \frac{1}{4}$ ) mindestens eine der nachstehenden vier Aussagen gültig sein:

- (a)  $\gamma' \cap (V_n \cup W_n)$  ist nicht kürzer als  $k/n + 1$ ,
- (b)  $\gamma'' \cap (V_{n+1} \cup W_{n+1})$  ist nicht kürzer als  $k/n + 1$ ,
- (c)  $\gamma'' \cap X_n$  ist nicht kürzer als  $\frac{3}{4}$ ,
- (d)  $\gamma'' \cap Y_n$  ist nicht kürzer als  $\frac{1}{4}$ .

(Alle Längen sind "euklidisch" im oben definierten Sinn zu verstehen). Auf Grund der Eigenschaften (B) und (C) der Verheftung  $\alpha$  und der Definition der Metrik  $\rho(z) |dz|$  überlegt man sich leicht, dass jede dieser Aussagen für genügend grosse  $n$  folgende Abschätzung impliziert: Es gibt eine von  $n$  unabhängige positive Zahl  $K_1$  mit der Eigenschaft, dass

$$\int_{\gamma''} \rho(z) |dz| \geq \frac{K_1}{n \log n}. \quad (27)$$

Einem derartigen Bogen  $\gamma''$  auf  $S(\alpha)$  ordnen wir einen Bogen  $\gamma_0''$  auf  $S(\alpha_0)$  zu, welcher dieselben Punkte (in der  $z$ -Ebene) miteinander verbindet, und der die Eigenschaft besitzt, dass

$$\int_{\gamma_0''} \rho_0(z) |dz| \leq \frac{K_2}{n \log n} \quad (28)$$

für genügend grosse  $n$ . (Alle  $K_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , bezeichnen hier von  $n$  unabhängige positive Zahlen). Wie man dabei vorzugehen hat, zeigen wir am extremen Fall:  $\gamma''$  verbinde die beiden einander diametral gegenüberliegenden Eckpunkte  $s_n - 2i$  und  $\alpha(s_{n+1}) + 2i$  von  $\bar{B}_n$  miteinander. Hier wählen wir als erstes Teilstück  $\tau_1$  von  $\gamma_0''$  die (in der  $z$ -Ebene) geradlinige Verbindung von  $s_n - 2i$  mit  $s_n$ . Aus Eigenschaft (C) der Verheftung  $\alpha$  schliessen wir, dass  $s_n > K_3 n$  für genügend grosse  $n$ , und somit

$$\int_{\tau_1} \rho_0(z) |dz| \leq \frac{K_4}{n \log n}. \quad (29)$$

Im Teilstück  $\tau_2$  folgen wir dem untern Rand der Verheftungskante bis  $s_{n+1}$ . Dabei ist

$$\int_{\tau_2} \rho_0(z) |dz| \leq \rho_0(s_n)(s_{n+1} - s_n) \leq \frac{K_5}{n \log n}. \quad (30)$$

Nun überschreiten wir die Verheftungskante von  $S(\alpha_0)$  und gelangen in den Punkt  $Bs_{n+1}^2$  des obren Ufers. Im Abschnitt  $\tau_3$  folgen wir diesem Ufer von  $Bs_{n+1}^2$  bis  $\alpha(n+1)$ . Sei z.B.  $\alpha(n+1) > Bs_{n+1}^2$ . Auf Grund der Eigenschaften (B) und (C) der Verheftung  $\alpha$  gelten die Ungleichungen

$$K_6 n < s_{n+1} < K_7 n,$$

$$\alpha(s_{n+1}) - Bs_{n+1}^2 < K_8 s_{n+1},$$

und eine elementare Rechnung ergibt

$$\int_{\tau_3} \rho_0(z) |dz| < \int_{K_9 n^2}^{K_9 n^2 + K_{10} n} \frac{dt}{t \log t} < \frac{K_{11}}{n \log n}. \quad (31)$$

Schliesslich führen wir das letzte Teilstück  $\tau_4$  geradlinig von  $\alpha(s_{n+1})$  bis  $\alpha(s_{n+1}) + 2i$ . Dabei gilt

$$\int_{\tau_4} \rho_0(z) |dz| < \frac{K_{12}}{n \log n}. \quad (32)$$

Aus (29) bis (32) folgt (28). Aus (27) und (28) schliessen wir, dass

$$\int_{\gamma''} \rho(z) |dz| \geq \frac{K_1}{K_2} \int_{\gamma_0''} \rho_0(z) |dz|. \quad (33)$$

Die so definierten Bogen  $\gamma_0', \gamma_0'', \dots$  lassen sich zu einer Trennenden  $\gamma_0$  auf  $S(\alpha_0)$  zusammenfügen, welche nach (26) und (33) die Ungleichung (25) mit  $p = \min(1, K_1/K_2)$  erfüllt. Damit ist der Satz bewiesen.

Es kann natürlich vorkommen, dass ein Zerlegungspunkt von  $\gamma$ —also ein Anfangs- bzw. Endpunkt der zu betrachtenden Teilbogen—auf der Verheftungskante liegt. In diesem Falle hat man darauf zu achten, dass Anfangs- und Endpunkt zum gleichen Ufer gezählt werden. Man hat also den Verheftungssprung als zum einen Teilbogen zugehörig—der dann vom Typ  $\gamma''$  sein wird—aufzufassen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. BEURLING and L. AHLFORS: *The boundary correspondence under quasiconformal mapping*, Acta Math. 96 (1956), 125–142.
- [2] A. HUBER: *Konforme Verheftung von Gebieten mit beschränkter Randdrehung*, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 179–186.
- [3] J. A. JENKINS: *On a type problem*, Canadian J. Math. 11 (1959), 427–431.
- [4] O. LEHTO und K. I. VIRTANEN: *Quasikonforme Abbildungen*, Springer-Verlag 1965.
- [5] A. PFLUGER: *Theorie der Riemannschen Flächen*, Springer-Verlag 1957.
- [6] —: *Ueber die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verheftung*, J. Indian Math. Soc. 24 (Golden Jubilee Commemoration Volume 1960), 401–412.
- [7] J. SUTTER: *Ein Beitrag zum Typenproblem der Riemannschen Flächen*, Dissertation ETH Zürich 1964, Prom. Nr. 3347.

E.T.H.  
Rämistrasse  
8006 Zürich

Eingegangen den 2. Dezember, 1975.

