Klassen von Moduln über Dedekind-Ringen und Satz von Stein-Serre

Autor(en): **Huber, Martin**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **51 (1976)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-39457

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 39(51) 527–546 Birkhäuser Verlag, Basel

Klassen von Moduln über Dedekind-Ringen und Satz von Stein-Serre

von MARTIN HUBER

Einleitung

1. Es sei R ein kommutativer Ring (kein Körper) und A ein beliebiger R-Modul. Wir untersuchen die folgende Frage: Wie weit kann aus Eigenschaften des dualen Moduls $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ und des von ihm "abgeleiteten" Moduls $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ auf entsprechende Eigenschaften von A geschlossen werden? Im Fall $R = Z$ (*ganze Zahlen*) kennt man die Spezialfälle:

(1) *Ist* $\mathrm{Hom}_Z(A, Z) = 0$ *und* $\mathrm{Ext}_Z(A, Z) = 0$, *so ist auch* $A = 0$, und
(2) *Mit* $\mathrm{Hom}_Z(A, Z)$ *und* $\mathrm{Ext}_Z(A, Z)$ *ist auch* A *endlich erzeugt* (siehe [1]).

Präziser formuliert lautet unsere Frage: *Welche Klassen* $\mathbf{C}$ *von* R*-Moduln besitzen die* "Hom-Ext-*Eigenschaft*": *dass mit* $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ *und* $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ *auch* A *zu* $\mathbf{C}$ *gehört*? Dabei wollen wir nur Klassen $\mathbf{C}$ betrachten, welche bezüglich Untermoduln und Erweiterungen abgeschlossen sind (wir nennen sie *SE-abgeschlossen*).

Für Dedekind-Ringe R können wir diese Frage weitgehend beantworten. Wir zeigen zunächst, dass im Falle $\mathrm{Ext}_R(Q, R) \neq 0$ jede SE-abgeschlossene Klasse von endlich erzeugten R-Moduln die Hom-Ext-Eigenschaft besitzt; dabei bezeichnet Q den Quotientenkörper von R. Genauer gilt

SATZ A (Theorem 2.1). *Für einen Dedekind-Ring* R *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\mathrm{Ext}_R(Q, R) \neq 0$.
(b) *Aus* $\mathrm{Hom}_R(A, R) = 0$ *und* $\mathrm{Ext}_R(A, R) = 0$ *folgt stets* $A = 0$.
(c) *Sind* $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ *und* $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ *endlich erzeugt, so ist auch* A *endlich erzeugt.*
(d) *Jede SE-abgeschlossene Klasse von endlich erzeugten* R*-Moduln besitzt die* Hom-Ext-*Eigenschaft.*
(e) *Jeder* R*-Modul* A *von abzählbarem Rang mit* $\mathrm{Ext}_R(A, R) = 0$ *ist projektiv.*

Es gilt $\mathrm{Ext}_R(Q, R) = 0$ genau für diejenigen Dedekind-Ringe R, welche vollständig sind (in der R-Topologie); solche sind von selbst (vollständige) diskrete Bewertungsringe. Die durch Satz A charakterisierten Ringe sind also die *nicht-vollständigen Dedekind-Ringe.* Im Fall der abelschen Gruppen sind (a)–(e) erfüllt; die Aussage (e) ist dann bekannt als "*Satz von Stein-Serre*" [2, Theorem III. 6.1].

2. Bei der Suche nach weiteren Klassen mit der Hom-Ext-Eigenschaft haben die Mächtigkeitsbetrachtungen, welche im Fall der abelschen Gruppen zum Beweis des Satzes von Stein-Serre führen, den Weg gewiesen. Für einen nicht-vollständigen Dedekind-Ring R und für eine beliebige Kardinalzahl $\aleph_\alpha \geqslant |R|$ wird die Klasse $\mathbf{C}(\aleph_\alpha)$ aller R-Moduln mit Mächtigkeit $<\aleph_\alpha$ untersucht (dabei ist $|R|$ die Mächtigkeit von R). Dies führt zum zweiten Hauptresultat der Arbeit:

SATZ B (Theorem 3.3). *Es sei R ein beliebiger nicht-vollständiger Dedekind-Ring und $\aleph_\alpha$ eine Kardinalzahl mit der Eigenschaft*

(*) *Für jede Kardinalzahl c ist mit $2^c \leqslant \aleph_\alpha$ auch $|R|^c \leqslant \aleph_\alpha$.*

Dann besitzt jeder R-Modul A mit $|\mathrm{Hom}_R(A, R)| \leqslant \aleph_\alpha$ und $|\mathrm{Ext}_R(A, R)| \leqslant \aleph_\alpha$ ein Erzeugendensystem S mit $2^{|S|} \leqslant \aleph_\alpha$.

Die Bedingung (*) ist für jede Kardinalzahl $\aleph_\alpha \geqslant 2^{|R|}$ erfüllt. Damit erhalten wir

(KOROLLAR 3.4). *Ist R ein nicht-vollständiger Dedekind-Ring, so gilt für jeden R-Modul A die Abschätzung*

$$2^{|A|} \leqslant 2^{|R|}\,|\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|.$$

Für die Klassen $\mathbf{C}(\aleph_\alpha)$ erhält man insbesondere:

SATZ C (Theorem 3.5). *Ist R ein nicht-vollständiger Dedekind-Ring, so besitzt die Klasse $\mathbf{C}(\aleph_\alpha)$ für jede Kardinalzahl $\aleph_\alpha \geqslant 2^{|R|}$ die* Hom-Ext-*Eigenschaft.*

3. Im vierten Paragraphen wird R stets als *abzählbarer* Dedekind-Ring vorausgesetzt. Solche Ringe sind nicht-vollständig und haben den Vorteil, dass die Bedingung (*) für jede unendliche Kardinalzahl erfüllt ist. Aus Satz B folgt damit

SATZ D (Theorem 4.1). *Ist R ein abzählbarer Dedekind-Ring, so besitzt jeder R-Modul A ein Erzeugendensystem S mit*

$$2^{|S|} \leqslant |\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|.$$

Im Hinblick auf unsere Fragestellung interessieren vor allem die beiden folgenden Korollare:

SATZ E (Theorem 4.2). *Ist R ein abzählbarer Dedekind-Ring, so besitzt die Klasse $\mathbf{C}(\aleph_\alpha)$ für jede unendliche Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ die* Hom-Ext-*Eigenschaft.*

SATZ F (Theorem 4.3). *Ist R ein abzählbarer Dedekind-Ring, so besitzt jede SE-abgeschlossene Unterklasse von $\mathbf{C}(2^{\aleph_0})$ die* Hom-Ext-*Eigenschaft.*

Als bemerkenswertes Nebenprodukt erhalten wir eine Aussage über R-Moduln, welche äquivalent ist zur Negation der speziellen Kontinuumshypothese $2^{\aleph_0}=\aleph_1$:

(KOROLLAR 4.4). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) $2^{\aleph_0}>\aleph_1$
(ii) *Jeder R-Modul A mit $|\mathrm{Hom}_R(A,R)|\leq\aleph_1$ und $|\mathrm{Ext}_R(A,R)|\leq\aleph_1$ ist endlich erzeugt.*

Wir wissen nicht, ob die Klasse aller Torsionsmoduln für einen abzählbaren Dedekind-Ring R die Hom-Ext-Eigenschaft besitzt. Immerhin können wir zeigen, dass die "Torsionsklassen" $\mathbf{T}(2^{\aleph_1})$ aller Torsionsmoduln mit Mächtigkeit $<2^{\aleph_1}$ und $\mathbf{T}(P)$ aller Torsionsmoduln mit verschwindender P-Primär-Komponente (für ein Primideal P) diese Eigenschaft haben (siehe Abschnitt 4.4).

Es sei noch bemerkt, dass sich die Resultate dieser Arbeit auf R-projektive Komplexe anwenden lassen. Neben Beziehungen zwischen Homologie- und Cohomologiemoduln mit Koeffizienten in R erhält man auch Kriterien für das Verschwinden von Homologie- und Cohomologiemoduln mit Koeffizienten in R/P^k und Q. Die ausführliche Formulierung findet sich in der vorläufigen Fassung [3] der vorliegenden Arbeit.

4. Satz A ist nur teilweise neu; die Aequivalenz der Aussagen (a), (b) und (e) steht schon bei Nunke [9]. Unser Beweis des "Satzes von Stein-Serre" ist aber vom dort angegebenen verschieden (vgl. 2.3 unserer Arbeit). Hingegen sind die Sätze B, C, D, E und F neu—auch im Fall der abelschen Gruppen, mit Ausnahme eines Spezialfalls von Satz D, welcher in [10, Theorem 9] enthalten ist.

Unser Vorgehen beim Beweis von Satz B, der die Grundlage für die Sätze C, D, E und F bildet, kann kurz so skizziert werden: Zunächst zeigen wir, dass $\mathrm{Hom}_R(A,Q)$ derselben Mächtigkeitsschranke unterliegt wie $\mathrm{Hom}_R(A,R)$ und $\mathrm{Ext}_R(A,R)$; hiefür wird die Vektorraumstruktur des Moduls A/PA (für ein Primideal P) herangezogen. Die weiteren wesentlichen Beweisschritte sind die Auswahl des Erzeugendensystems S und das "Abzählen" der R-Homomorphismen von A in Q/R mithilfe des Systems S.

Dass wir R als Dedekind-Ring annehmen, hat folgende Gründe: Wir verwenden wesentlich, dass Q/R ein injektiver R-Modul ist und die Eigenschaft besitzt, dass für jeden R-Modul $A \neq 0$ auch $\mathrm{Hom}_R(A, Q/R) \neq 0$ ist. Die Injektivität von Q/R bewirkt u.a., dass der Funktor $\mathrm{Ext}_R(-, R)$ rechtsexakt ist. Ferner benützen wir Struktursätze für R-Torsionsmoduln, welche darauf beruhen, dass die Ideale eines Dedekind-Rings invertierbar sind (vgl. 1.1). Einige Resultate gelten auch für allgemeinere kommutative Ringe, die an anderer Stelle diskutiert werden sollen.

Die vorliegende Arbeit ist ein überarbeiteter Auszug aus meiner Dissertation.* Herrn Professor Beno Eckmann möchte ich meinen herzlichsten Dank ausdrücken; sein Interesse und seine Erfahrung haben sehr viel zur Verwirklichung dieser Arbeit beigetragen. Daneben habe ich auch von den Herren Prof. Urs Stammbach und Peter Neumann wertvolle Anregungen erhalten, für die ich an dieser Stelle ebenfalls danken möchte.

1. Moduln über Dedekind-Ringen

Dieser Paragraph hat vorbereitenden Charakter. Die Beweise für die in 1.1 zusammengestellten Aussagen sind in [13], [11] und [6] zu finden. Die Abschnitte 1.2 und 1.3 handeln von den Funktoren Hom_R und $\otimes_R$. Es werden Hilfssätze hergeleitet, die auf die Fragestellung unserer Arbeit zugeschnitten sind.

1.1. Es sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper Q. Ist $I \neq 0$ ein Ideal von R, so ist $\{q \in Q \mid qI \subseteq R\}$ ein R-Modul, der mit I^{-1} bezeichnet wird. Gilt $I^{-1}I = R$, so heisst I *invertierbar.* Ein *Dedekind-Ring* ist ein Integritätsbereich mit der Eigenschaft, dass jedes Ideal $I \neq 0$ invertierbar ist. Invertierbare Ideale sind endlich erzeugt, also sind Dedekind-Ringe Noethersch. Diese besitzen ferner die Eigenschaft, dass jedes Primideal $P \neq 0$ maximal ist.

Ist P ein Primideal eines Integritätsbereiches R, so bilden die Elemente der Form r/s, $r \in R$, $s \in R - P$, einen Unterring von Q, der mit R_P bezeichnet wird. Der Ring R_P ist lokal mit maximalem Ideal PR_P; man nennt R_P die *P-Lokalisierung* von R. Ein Hauptidealbereich mit genau einem Primideal $P \neq 0$ heisst *diskreter Bewertungsring.* Ist R ein Dedekind-Ring, so ist für jedes Primideal $P \neq 0$ die P-Lokalisierung R_P ein diskreter Bewertungsring.

Ein Ideal $I \neq 0$ ist genau dann invertierbar, wenn es als R-Modul projektiv ist; Dedekind-Ringe können also charakterisiert werden als diejenigen Integritätsbereiche, für welche jedes Ideal projektiv ist.

---

* ETH Zürich, Dezember 1975; vervielfältigt in [3].

Von nun an sei R immer ein Dedekind-Ring mit Quotientenkörper $Q \neq R$. Der Torsionsuntermodul eines R-Moduls A werde mit tA beziechnet. Unter der *Ordnung* eines Elements $a \in A$ verstehen wir das Ideal $O(a) = \{r \in R \mid ra = 0\}$. Die *P-(Primär-)Komponente* $t_P A$ (für ein Primideal $P \neq 0$) des R-Moduls A besteht aus denjenigen Elementen von A, deren Ordnung eine Potenz von P ist. Gilt $t_P A = A$, so heisst A ein *P-Primärmodul.* Man nennt einen Modul A *beschränkt,* falls es ein $r \in R$, $r \neq 0$, gibt, derart dass $rA = 0$ ist. Für R-Torsionsmoduln gelten folgende Struktursätze:

(1.1a) *Jeder Torsionsmodul ist die direkte Summe seiner P-Komponenten* (wo P die Menge aller Primideale durchläuft).

(1.1b) *Jeder P-Primärmodul besitzt eine R_P-Modulstruktur, welche die gegebene R-Struktur fortsetzt.*

Da die Ringe R_P Hauptidealbereiche sind, folgt

(1.1c) *Jeder beschränkte R-Modul ist eine direkte Summe von zyklischen Torsionsmoduln.*

Jeder R-Modul A besitzt einen maximalen teilbaren Untermodul dA; ist $dA = 0$, so heisst A *reduziert.* Ein R-Modul ist genau dann teilbar, wenn er injektiv ist. Jeder injektive R-Modul ist eine direkte Summe von unzerlegbaren injektiven R-Moduln; diese sind entweder isomorph zu Q oder zu $R(P^\infty)$, der injektiven Hülle von R/P (für ein Primideal $P \neq 0$). Ist $I \neq 0$ ein Ideal von R, so schreiben wir I^{-n} für $(I^{-1})^n$; die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} I^{-n}$ ist ein Unterring von Q. Ist P ein Primideal, so wird $\bigcup_{n=1}^{\infty} P^{-n}$ mit Q_P bezeichnet. Ein R-Modul A heisst P-teilbar, falls $PA = A$ ist; z.B. ist Q_P als R-Modul P-teilbar. Ist ein Modul P-teilbar für jedes Primideal $P \neq 0$, so ist er teilbar.

Ein Untermodul B des R-Moduls A heisst *rein,* wenn für jedes $r \in R$ die Gleichung $rA \cap B = rB$ erfüllt ist. Ist A torsionsfrei, so ist ein beliebiger Durchschnitt von reinen Untermoduln wieder rein. Im Hinblick darauf existiert zu jeder Teilmenge S eines torsionsfreien R-Moduls A ein *kleinster* reiner Untermodul, der S enthält, nämlich der Durchschnitt aller reinen Untermoduln, welche S enthalten. Dieser besteht genau aus denjenigen Elementen von A, welche von S linear abhängig sind.

1.2 Es sei R immer ein Dedekind-Ring, und A, B seien R-Moduln. Im gegenwärtigen Abschnitt befassen wir uns mit den Funktoren Hom_R und Ext_R. Jeder Quotient eines injektiven (= teilbaren) R-Moduls ist wieder injektiv. Dies bewirkt, dass der Funktor $\mathrm{Ext}_R(-,-)$ in beiden Argumenten rechsexakt ist. Folglich ist jeder Untermodul eines projektiven Moduls projektiv, d.h. die globale Dimension von R ist $= 1$.

Wichtige Hilfsmittel für unsere Betrachtungen sind die durch

$$0 \to R \to Q \to Q/R \to 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 \to tA \to A \to A/tA \to 0$$

induzierten exakten Hom-Ext-Folgen

$$\text{(1.2a)} \quad 0 \to \mathrm{Hom}_R(A, R) \to \mathrm{Hom}_R(A, Q) \to \mathrm{Hom}_R(A, Q/R) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}_R(A, R)$$
$$\text{(1.2b)} \quad 0 \to \mathrm{Hom}_R(A/tA, R) \to \mathrm{Hom}_R(A, R) \to \mathrm{Hom}_R(tA, R) = 0 \to$$

$$\to \mathrm{Ext}_R(A/tA, R) \to \mathrm{Ext}_R(A, R) \to \mathrm{Ext}_R(tA, R) \to 0.$$

Ist A ein Torsionsmodul, so ist $\mathrm{Hom}_R(A, Q) = 0$, also

$$\mathrm{Hom}_R(A, Q/R) \cong \mathrm{Ext}_R(A, R).$$

Wir bezeichnen mit r gleichzeitig ein Ringelement und den durch $a \mapsto ra$ definierten Endomorphismus des R-Moduls A. Die durch $A \xrightarrow{r} A$ bzw. $B \xrightarrow{r} B$ induzierten Abbildungen

$$\mathrm{Ext}_R(A, B) \xrightarrow{r^*} \mathrm{Ext}_R(A, B) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Ext}_R(A, B) \xrightarrow{r_*} \mathrm{Ext}_R(A, B)$$

stimmen mit dem Endomorphismus r von $\mathrm{Ext}_R(A, B)$ überein.

PROPOSITION 1.3. *Es seien A und B R-Moduln.*
(a) *Ist A torsionsfrei und B beliebig, so ist* $\mathrm{Ext}_R(A, B)$ *teilbar.*
(b) *Ist A teilbar und B torsionsfrei, so ist* $\mathrm{Ext}_R(A, B)$ *torsionsfrei.*

Beweis. (a) Ist A torsionsfrei, so ist $A \xrightarrow{r} A$ für jedes $r \in R$, $r \neq 0$, monomorph. Dann ist $\mathrm{Ext}_R(A, B) \xrightarrow{r} \mathrm{Ext}_R(A, B)$ für jedes $r \in R$, $r \neq 0$, epimorph, dh. $\mathrm{Ext}_R(A, B)$ ist teilbar.

(b) Es sei $r \in R$, $r \neq 0$; da B torsionsfrei ist, induziert $B \xrightarrow{r} B$ eine exakte Folge

$$\mathrm{Hom}_R(A, B/rB) \to \mathrm{Ext}_R(A, B) \xrightarrow{r} \mathrm{Ext}_R(A, B).$$

Nun ist A teilbar und B/rB beschränkt, also gilt $\mathrm{Hom}_R(A, B/rB) = 0$. Dann ist $\mathrm{Ext}_R(A, B) \xrightarrow{r} \mathrm{Ext}_R(A, B)$ monomorph. Dies gilt für alle $r \in R$, $r \neq 0$; also ist $\mathrm{Ext}_R(A, B)$ torsionsfrei.

LEMMA 1.4. *Ist $I \neq 0$ ein Ideal von R, so gilt* $\mathrm{Ext}_R(R/I, R) \cong R/I$.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & & R & & \subseteq & & I^{-1} & & \\ & & \downarrow\cong & & & & \downarrow f & & \\ 0 & \to & \mathrm{Hom}_R(R, R) & \to & & \to & \mathrm{Hom}_R(I, R) & \to & \mathrm{Ext}_R(R/I, R) \to 0 \end{array}$$

Die Abbildung f sei gegeben durch $f(q): r \mapsto qr$, $r \in R$, $q \in I^{-1}$. Dann kommutiert das Diagramm, und die untere Zeile ist exakt. Bekanntlich ist f ein Isomorphismus; also ist $\mathrm{Ext}_R(R/I, R) \cong I^{-1}/R$, und nach [9, Lemma 4.4] gilt $I^{-1}/R \cong R/I$.

PROPOSITION 1.5. *Für einen endlich erzeugten R-Modul A gilt:*

(a) $A = tA \oplus B$ *für einen gewissen Untermodul B von A.*

(b) $\mathrm{Ext}_R(A, R) \cong tA$.

(c) *Es gibt einen Monomorphismus* $B \rightarrowtail \mathrm{Hom}_R(A, R)$.

Die Aussage (a) ist bekannt; (b) folgt aus (a), (1.1c) und Lemma 1.4.

Beweis von (c). Als endlich erzeugter torsionsfreier R-Modul ist B Untermodul eines endlich erzeugten freien R-Moduls F, derart dass F/B ein Torsionsmodul ist. Folglich ist $\mathrm{Hom}_R(F, R) \to \mathrm{Hom}_R(B, R)$ monomorph; da ferner $\mathrm{Hom}_R(B, R) \cong \mathrm{Hom}_R(A, R)$ ist, liefert die Zusammensetzung $B \subseteq F \cong \mathrm{Hom}_R(F, R) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(B, R) \cong \mathrm{Hom}_R(A, R)$ den gesuchten Monomorphismus.

LEMMA 1.6. *Für jeden R-Modul $A \neq 0$ ist auch* $\mathrm{Hom}_R(A, Q/R) \neq 0$.

Beweis. Ist $a \in A$, $a \neq 0$, so existiert ein Primideal $P \neq 0$ von R, derart dass $O(a) \subseteq P$ ist. Folglich gibt es einen Epimorphismus $\langle a \rangle \twoheadrightarrow R/P$. Da nach [9, Lemma 4.4] $R/P \cong P^{-1}/R$ ist, kann R/P monomorph in Q/R abgebildet werden; das Bild der Zusammensetzung $f: \langle a \rangle \to R/P \to Q/R$ ist P^{-1}/R. Nun ist Q/R injektiv; also kann f zu $\bar{f}: A \to Q/R$ erweitert werden. Mit f ist auch $\bar{f} \neq 0$; folglich ist $\mathrm{Hom}_R(A, Q/R) \neq 0$.

LEMMA 1.7. *Es sei $P \neq 0$ ein Primideal und A ein R-Modul mit* $\mathrm{Hom}_R(A, R) = 0$ *und* $t_P \mathrm{Ext}_R(A, R) = 0$. *Dann ist A P-teilbar.*

Beweis. Zu $0 \to PA \to A \to A/PA \to 0$ gehört die exakte Folge

$$\mathrm{Hom}_R(A, R) = 0 \to \mathrm{Hom}_R(PA, R) \to \mathrm{Ext}_R(A/PA, R) \to \mathrm{Ext}_R(A, R).$$

Da $t_P \mathrm{Ext}_R(A, R)$ verschwindet und $\mathrm{Hom}_R(PA, R)$ torsionsfrei ist, gilt auch

$t_P \operatorname{Ext}_R (A/PA, R) = 0$. Der Modul A/PA ist ein R/P-Vektorraum und zerfällt daher in eine direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} E_i$ mit $E_i \cong R/P$ für alle $i \in I$. Mit Lemma 1.4 folgt $\operatorname{Ext}_R (A/PA, R) \cong \prod_{i \in I} E_i$; also ist $\operatorname{Ext}_R (A/PA, R)$ ein P-Primärmodul. Da nun $t_P \operatorname{Ext}_R (A/PA, R) = 0$ ist, muss die Indexmenge I leer sein. Also gilt $A = PA$, d.h. A ist P-teilbar.

1.3. Ein Modul über einem Dedekind-Ring ist genau dann flach, wenn er torsionsfrei ist. Nun sind Untermoduln von torsionsfreien Moduln wieder torsionsfrei, also ist $\operatorname{Tor}^R (-, -)$ in beiden Argumenten linksexakt.

LEMMA 1.8. *Es sei $P \neq 0$ ein Primideal und A ein P-teilbarer R-Modul mit $t_P A = 0$. Dann besitzt A eine Q_P-Modulstruktur, welche die gegebene R-Struktur fortsetzt.*

Beweis. Da der R-Modul Q_P/R eine teilbare wesentliche Erweiterung von P^{-1}/R und $P^{-1}/R \cong R/P$ ist, gilt $Q_P/R \cong R(P^\infty)$. Es gibt also eine exakte Folge

$$0 \to \operatorname{Tor}^R (R(P^\infty), A) \to A \to Q_P \otimes_R A \to R(P^\infty) \otimes_R A \to 0.$$

Nach [9, Theorem 3.2] ist $\operatorname{Tor}^R (R(P^\infty), A) \cong t_P A = 0$; es bleibt zu zeigen, dass auch $R(P^\infty) \otimes_R A = 0$ ist.

Zu jedem $b \in R(P^\infty)$ gibt es eine Zahl n, derart dass $P^n b = 0$ ist. Da A P-teilbar ist, gilt $A = P^n A$; also besitzt jedes $a \in A$ die Darstellung $a = \sum_{i=1}^r x_i a_i$, $x_i \in P^n$, $a_i \in A$, $1 \leq i \leq r$. Folglich ist

$$b \otimes a = b \otimes \left(\sum_{i=1}^r x_i a_i \right) = \sum_{i=1}^r (x_i b \otimes a_i) = 0.$$

Da $R(P^\infty) \otimes_R A$ von den Elementen dieser Form erzeugt wird, gilt $R(P^\infty) \otimes_R A = 0$.

Wie vorher bezeichnen wir die Mächtigkeit einer beliebigen Menge bzw. eines R-Moduls A mit $|A|$. Da jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist, sind die Dedekind-Ringe, die wir betrachten, stets von *unendlicher* Mächtigkeit. Ist $|R|$ unendlich, so gilt für den freien R-Modul $R[S]$ über der beliebigen Menge S die Gleichung $|R[S]| = |R|\,|S|$.

2. Klassen von Moduln und der Satz von Stein-Serre

2.1. Wir erinnern daran, dass wir stets Moduln über einem Dedekind-Ring R betrachten, der kein Körper ist. Die Klassen von R-Moduln, die wir im Hinblick

auf die Fragestellung der Einleitung untersuchen, haben immer gewisse Abschlusseigenschaften und sind damit den Methoden der Homologischen Algebra leicht zugänglich. Sie stehen übrigens in engem Zusammenhang mit den Klassen, die von Serre in [12] untersucht wurden.

Eine nichtleere Klasse $\mathbf{C}$ von R-Moduln nennen wir *SE-abgeschlossen*, falls sie den Bedingungen (S) und (E) genügt:

(S) *Ist* $B \subseteq A$ *und* $A \in \mathbf{C}$, *so ist auch* $B \in \mathbf{C}$.
(E) *Ist* $0 \to B \to A \to C \to 0$ *eine exakte Folge von* R*-Moduln, so ist mit* $B \in \mathbf{C}$ *und* $C \in \mathbf{C}$ *auch* $A \in \mathbf{C}$.

Die meisten Klassen, die im folgenden vorkommen, erfüllen auch die Bedingung (F):

(F) *Ist* $B \subseteq A$ *und* $A \in \mathbf{C}$, *so ist auch* $A/B \in \mathbf{C}$.

Wir nennen eine nichtleere Klasse, welche (S), (E) und (F) erfüllt, wie üblich eine *Serre-Klasse.*

Wir geben nun einige *Beispiele* von SE-abgeschlossenen Klassen. Mit Q bezeichnen wir wie immer den Quotientenkörper von R; ${}_R\mathfrak{M}$ ist die Kategorie aller R-Moduln.

Die Klasse $\{0\}$ ist eine Serre-Klasse.

Die endlich erzeugten R-Moduln bilden eine Serre-Klasse.

Es sei $\aleph_\alpha$ irgendeine unendliche Kardinalzahl; dann ist die Klasse $\mathbf{C}(\aleph_\alpha) := \{A \in {}_R\mathfrak{M} \mid |A| < \aleph_\alpha\}$ eine Serre-Klasse.

Die Klasse aller projektiven R-Moduln ist SE-abgeschlossen, aber keine Serre-Klasse.

Ist $F: {}_R\mathfrak{M} \to {}_S\mathfrak{M}$ ein linksexakter kovarianter oder ein rechtsexakter kontravarianter Funktor, so ist die Klasse $\mathbf{K}(F) := \{A \in {}_R\mathfrak{M} \mid F(A) = 0\}$ SE-abgeschlossen. Für exakte Funktoren F ist $\mathbf{K}(F)$ eine Serre-Klasse.

Auf diese Art können z.B. folgende Klassen beschrieben werden:

Die Klasse $\mathbf{T}$ aller Torsionsmoduln; es gilt offenbar $\mathbf{T} = \mathbf{K}(Q \otimes_R -)$. Die Klasse $\mathbf{T}$ ist eine Serre-Klasse, da der Funktor $Q \otimes_R -$ exakt ist.

Die Klasse aller torsionsfreien R-Moduln gehört zum linksexakten Funktor $\mathrm{Tor}^R(Q/R, -)$. Sie ist also SE-abgeschlossen, aber keine Serre-Klasse.

Die Klasse $\mathbf{T}(P)$ (für ein Primideal $P \neq 0$) aller Torsionsmoduln A mit $t_P A = 0$ gehört zum Funktor $R_P \otimes_R -$. Dies folgt aus (1.1a), (1.1b) und aus der Tatsache, dass R_P ein flacher R-Modul ist.

Schliesslich bemerken wir, dass ein beliebiger Durchschnitt von SE-abgeschlossenen Klassen wieder SE-abgeschlossen ist.

2.2. Der Hauptsatz dieses Kapitels charakterisiert diejenigen Dedekind-Ringe R, für welche jede SE-abgeschlossene Klasse von endlich erzeugten R-Moduln die Hom-Ext-Eigenschaft besitzt. Er zeigt ferner, dass es genügt, wenn dies für sehr spezielle Klassen (die Klasse $\{0\}$ bzw. die Klasse aller endlich erzeugten R-Moduln) gilt. Diese Aussagen sind überdies äquivalent mit der Gültigkeit des Satzes von Stein-Serre.

THEOREM 2.1 *Für einen Dedekind-Ring R mit Quotientenkörper Q sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\mathrm{Ext}_R(Q, R) \neq 0$.

(b) *Es sei A ein beliebiger R-Modul. Dann ist mit* $\mathrm{Hom}_R(A, R) = 0$ *und* $\mathrm{Ext}_R(A, R) = 0$ *auch* $A = 0$.

(c) *Es sei A ein beliebiger R-Modul. Dann ist mit* $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ *und* $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ *auch A endlich erzeugt.*

(d) *Es sei* $\mathbf{C}$ *eine beliebige SE-abgeschlossene Klasse von endlich erzeugten R-Moduln und A irgendein R-Modul. Dann gehört mit* $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ *und* $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ *auch A zu* $\mathbf{C}$.

(e) *"Satz von Stein-Serre": Jeder R-Modul A von abzählbarem Rang mit* $\mathrm{Ext}_R(A, R) = 0$ *ist projektiv.*

Unter dem *Rang* $\mathrm{Rg}\, A$ eines R-Moduls A verstehen wir die Dimension des Q-Vektorraums $Q \otimes_R A$.

Bemerkung. Die Aussage (a) von Theorem 2.1 steht im Zusammenhang mit topologischen Eigenschaften des Rings R. Ist nämlich R ein beliebiger Integritätsbereich (kein Körper), so verschwindet $\mathrm{Ext}_R(Q, R)$ genau dann, wenn R in der durch die Ideale $I \neq 0$ definierten Topologie *vollständig* ist (s. [7, Korollar 6.11]). Ein vollständiger Dedekind-Ring ist übrigens von selbst lokal und damit ein (vollständiger) diskreter Bewertungsring (vgl. [9, Korollar 7.9]). Die durch Theorem 2.1 charakterisierten Ringe sind also die *nicht-vollständigen Dedekind-Ringe.*

Wir ordnen den *Beweis* von Theorem 2.1 in folgender Weise an: Die Implikation (b)$\Rightarrow$(a) ist trivial; den Beweis der Umkehrung findet man bei Nunke [9, Theorem 8.5], er wird deshalb weggelassen. Im nächsten Abschnitt beweisen wir in dieser Reihenfolge: (b)$\Rightarrow$(c), (c)$\Rightarrow$(d) und (b)$\Rightarrow$(e). Der "Satz von Stein-Serre" wird übrigens (auf anderem Wege) in [9] ebenfalls bewiesen. Schliesslich sind die Implikationen (d)$\Rightarrow$(b) und (e)$\Rightarrow$(a) wiederum trivial.

2.3. Der Modul $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ heisst auch der zu A *duale* Modul und wird mit A^* bezeichnet. Die Abbildung $i_A : A \to A^{**}$, welche gegeben ist durch $i_A(a) : f \mapsto f(a)$ für $a \in A$ und $f \in A^*$, vermittelt eine natürliche Transformation der Identität in den Funktor $(-)^{**}$. Ist i_A monomorph, so nennt man A *torsionslos.*

LEMMA 2.2. *Es sei R ein Dedekind-Ring, für den die Aussage* (b) *von Theorem* 2.1 *erfüllt ist. Dann ist jeder R-Modul A mit* $\mathrm{Ext}_R(A, R) = 0$ *torsionslos.*

Beweis. Es ist $\mathrm{Ker}\, i_A = \{a \in A \mid f(a) = 0$ für alle $f \in A^*\}$. Die Inklusion $K := \mathrm{Ker}\, i_A \subseteq A$ induziert folglich die Nullabbildung $A^* \xrightarrow{0} K^*$ und somit eine exakte Folge

$$0 \to K^* \to \mathrm{Ext}_R(A/K, R) \to \mathrm{Ext}_R(A, R) = 0.$$

Als Untermodul von A^{**} ist A/K torsionsfrei; nach Prop. 1.3(a) ist dann $\mathrm{Ext}_R(A/K, R)$ teilbar. Damit ist K^* sowohl teilbar als auch reduziert, also gilt $K^* = 0$. Andererseits verschwindet mit $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ auch $\mathrm{Ext}_R(K, R)$; aus (b) folgt $K = 0$ und damit die Behauptung.

Nun sind wir imstande, die Implikation (b)$\Rightarrow$(c) von Theorem 2.1 zu beweisen: Es sei A ein R-Modul mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ und $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ endlich erzeugt sind. Wegen (1.2b) sind damit auch $\mathrm{Hom}_R(A/tA, R)$, $\mathrm{Ext}_R(A/tA, R)$ und $\mathrm{Ext}_R(tA, R)$ endlich erzeugt. Nach Prop. 1.3(a) ist aber $\mathrm{Ext}_R(A/tA, R)$ auch teilbar und muss daher verschwinden. Aus Lemma 2.2 folgt dann, dass es einen Monomorphismus $A/tA \rightarrowtail (A/tA)^{**}$ gibt. Nun ist mit $(A/tA)^*$ auch $(A/tA)^{**}$ endlich erzeugt, also ist auch A/tA endlich erzeugt.

Es bleibt zu zeigen, dass tA endlich erzeugt ist. Wegen (b) gilt $\mathrm{Ext}_R(Q, R) \neq 0$; dann ist tA nach [9, Lemma 8.2] beschränkt und zerfällt daher in eine direkte Summe $tA = \bigoplus_{i \in I} C_i$ von zyklischen Torsionsmoduln C_i (vgl. (1.1c)). Nach Lemma 1.4 gilt dann $\mathrm{Ext}_R(tA, R) \cong \prod_{i \in I} C_i$; mit $\mathrm{Ext}_R(tA, R)$ ist somit auch tA endlich erzeugt.

Beweis von (c)$\Rightarrow$(d). Es sei $\mathbf{C}$ eine SE-abgeschlossene Klasse von endlich erzeugten R-Moduln und A ein R-Modul mit $\mathrm{Hom}_R(A, R) \in \mathbf{C}$ und $\mathrm{Ext}_R(A, R) \in \mathbf{C}$. Dann folgt mit (c), dass A endlich erzeugt ist. Nach Prop. 1.5 besitzt also A die Darstellung $A = tA \oplus B$; ferner ist $\mathrm{Ext}_R(A, R) \cong tA$, und es gibt einen Monomorphismus $B \rightarrowtail \mathrm{Hom}_R(A, R)$. Weil $\mathbf{C}$ die Bedingungen (S) und (E) erfüllt, gilt daher $tA \in \mathbf{C}$, $B \in \mathbf{C}$ und damit auch $A \in \mathbf{C}$.

Bemerkung. Wir haben nur verwendet, dass die Klasse $\mathbf{C}$ gegenüber Untermoduln und direkten Summen abgeschlossen ist. Folglich besitzt auch jede Klasse von endlich erzeugten R-Moduln, welche diesen beiden Bedingungen genügt, die Hom-Ext-Eigenschaft.

Für unsern Beweis des Satzes von Stein-Serre benötigen wir zwei weitere Hilfssätze, welche für beliebige Dedekind-Ringe richtig sind:

LEMMA 2.3. *Jeder torsionslose R-Modul von endlichem Rang ist projektiv.*

Beweis. Jeder torsionslose R-Modul von endlichem Rang ist nach [8, Prop. 1.3] endlich erzeugt. Ein endlich erzeugter torsionsloser R-Modul ist aber ein Untermodul eines freien R-Moduls und damit projektiv.

LEMMA 2.4. *Es sei A ein R-Modul von abzählbarem Rang mit der Eigenschaft, dass jeder Untermodul von endlichem Rang projektiv ist. Dann ist A projektiv.*

Für einen Beweis siehe [9, Lemma 8.3].

Beweis des Satzes von Stein-Serre (d.h. der Implikation (b)$\Rightarrow$(e) von Theorem 2.1). Es sei R ein Dedekind-Ring, für den (b) erfüllt ist, und A ein R-Modul von abzählbarem Rang mit $\mathrm{Ext}_R(A, R) = 0$. Dann ist A nach Lemma 2.2 torsionslos, und dasselbe gilt für jeden Untermodul von A. Wir schliessen mit Lemma 2.3, dass jeder Untermodul von endlichem Rang projektiv ist; nach Lemma 2.4 ist dann A selbst projektiv.

3. Mächtigkeitsschranken

Im gegenwärtigen Paragraphen beweisen wir die stärkste Aussage, die wir für einen beliebigen nicht-vollständigen Dedekind-Ring R bei vorgegebenen Mächtigkeitsschranken von $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ und $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ über den R-Modul A machen können (Theorem 3.3). Alle weiteren Sätze der Arbeit (mit Ausnahme der Propositionen 4.6 und 4.7) sind Folgerungen daraus.

3.1. Der Beweis von Theorem 3.3 beruht auf den folgenden beiden Hilfssätzen:

LEMMA 3.1. *Es sei R ein nicht-vollständiger Dedekind-Ring. Dann gibt es zu jedem R-Modul A einen Untermodul B, derart dass folgende Abschätzungen gelten:*

(i) $2^{\mathrm{Rg}B} \leq |\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|$;

(ii) $2^{\mathrm{Rg}A/B} \leq |\mathrm{Hom}_R(B, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|$.

Beweis. Zunächst nehmen wir an, A sei ein torsionsfreier R-Modul; ferner sei $P \neq 0$ ein Primideal von R und $p \in P$, $p \neq 0$. Wir definieren eine Abbildung $f: A \to PA$ durch $a \mapsto pa$, $a \in A$. Da der Cokern von f ein Torsionsmodul ist, gibt es eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(PA, R) \to \mathrm{Hom}_R(A, R);$$

also gilt $|\mathrm{Hom}_R(PA, R)| \leq |\mathrm{Hom}_R(A, R)|$. Andererseits induziert die Inklusion $PA \subseteq A$ eine exakte Folge

$$\mathrm{Hom}_R(PA, R) \to \mathrm{Ext}_R(A/PA, R) \to \mathrm{Ext}_R(A, R);$$

daher gilt $|\mathrm{Ext}_R(A/PA, R)| \leq |\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|$.

Da R/P ein Körper ist, zerfällt A/PA (als R/P-Vektorraum) in eine direkte Summe $\bigoplus_{i \in I}(R/P)_i$. Somit ist $\mathrm{Ext}_R(A/PA, R) \cong \prod_{i \in I}(R/P)_i$, und wir erhalten die Abschätzung

$$\text{(iii)}\quad 2^d \leq \left|\prod_{i \in I}(R/P)_i\right| \leq |\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|$$

mit $d = \dim_{R/P}(A/PA)$.

Nun sei $X = \{x_i \in A \mid i \in I\}$ ein Repräsentantensystem einer R/P-Basis von A/PA. Definieren wir dann B als den kleinsten reinen Untermodul von A, der X enthält, so gilt $\mathrm{Rg}\, B = \mathrm{Rg}\langle X \rangle \leq d$ und mit (iii) folgt die Abschätzung (i).

Der Modul B ist so gewählt worden, dass der Faktormodul $C := A/B$ torsionsfrei und P-teilbar ist. Dann ist C nach Lemma 1.8 ein Q_P-Modul. Ist C_0 ein maximaler freier Q_P-Untermodul von C, so ist $\mathrm{Rg}\, C_0 = \mathrm{Rg}\, C$, und wegen der exakten Folge

$$\mathrm{Ext}_R(C, R) \to \mathrm{Ext}_R(C_0, R) \to 0$$

gilt $|\mathrm{Ext}_R(Q_P, R)|^{\mathrm{Rg}\, C} \leq |\mathrm{Ext}_R(C, R)|$. Da R nicht-vollständig ist und $\mathrm{Hom}_R(Q_P, R)$ verschwindet, ist $\mathrm{Ext}_R(Q_P, R) \neq 0$; also gilt die Abschätzung

$$\text{(iv)}\quad 2^{\mathrm{Rg}\, C} \leq |\mathrm{Ext}_R(C, R)|.$$

Nun gibt $0 \to B \to A \to C \to 0$ Anlass zu einer exakten Folge

$$\mathrm{Hom}_R(B, R) \to \mathrm{Ext}_R(C, R) \to \mathrm{Ext}_R(A, R).$$

Es folgt $|\mathrm{Ext}_R(C, R)| \leq |\mathrm{Hom}_R(B, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|$ und somit wegen (iv) die Abschätzung (ii).

Es sei jetzt A ein beliebiger R-Modul. Wie soeben gezeigt, besitzt dann $A' := A/tA$ einen Untermodul B', derart dass die Abschätzungen (i) und (ii) gelten. Wir bezeichnen die Projektion $A \twoheadrightarrow A/tA$ mit π und definieren $B := \pi^{-1}(B')$. Dann ist $tB = \mathrm{Ker}\,\pi|_B = tA$, und π induziert einen Isomorphismus $A/B \cong A'/B'$. Somit gilt $\mathrm{Rg}\,B = \mathrm{Rg}\,B'$ und $\mathrm{Rg}\,A/B = \mathrm{Rg}\,A'/B'$; mit (1.2b) und den Abschätzungen (i) und (ii) für A' und B' folgt, dass diese Abschätzungen auch für A und B gelten.

LEMMA 3.2. *Ist R ein beliebiger Dedekind-Ring, so besitzt jeder R-Modul A ein Erzeugendensystem S mit*

$2^{|S|} \leq |\mathrm{Hom}_R(A, Q/R)|$.

Beweis. Es gibt ein wohlgeordnetes Erzeugendensystem $S = \{a_i \in A \mid i < \alpha\}$ von A, α eine Ordinalzahl, derart dass $a_i \notin \langle a_j \in S \mid j < i\rangle$ für alle $i < \alpha$. Wir definieren für jedes $i < \alpha$ Untermoduln $A_i := \langle a_j \in S \mid j \leq i\rangle$ und $A_i^0 := \bigcup_{j<i} A_j$ $(A_0^0 := 0)$. Nach der Wahl von S sind die Moduln $A_i/A_i^0 \neq 0$.

Wir werden nun eine Mengenabbildung

$$\Phi : \prod_{i<\alpha} \mathrm{Hom}_R(A_i/A_i^0, Q/R) \to \mathrm{Hom}_R(A, Q/R)$$

konstruieren. Zu diesem Zweck sei für jedes $i < \alpha$ und für jede Abbildung $f : A_i^0 \to Q/R$ eine Abbildung $\varepsilon_i(f) : A_i \to Q/R$ mit $\varepsilon_i(f)|_{A_i^0} = f$ ausgezeichnet. Da Q/R injektiv ist, existieren solche Erweiterungen immer.

Nun sei ein Element $(h_i) \in \prod_{i<\alpha} \mathrm{Hom}_R(A_i/A_i^0, Q/R)$ gegeben. Wir konstruieren dazu induktiv eine Folge $(f_i)_{i<\alpha}$ von Abbildungen $f_i \in \mathrm{Hom}_R(A_i, Q/R)$ mit $f_i|_{A_j} = f_j$ für alle $j < i$: Wir setzen $f_0 := h_0 \in \mathrm{Hom}_R(A_0, Q/R)$. Sind die f_j für $j < i$ schon verträglich definiert, so gibt es genau ein $f_i^0 \in \mathrm{Hom}_R(A_i^0, Q/R)$ mit $f_i^0|_{A_j} = f_j$ für alle $j < i$. Wir definieren $f_i := \varepsilon_i(f_i^0) + h_i\pi_i \in \mathrm{Hom}_R(A_i, Q/R)$, wo π_i die Projektion $A_i \twoheadrightarrow A_i/A_i^0$ bezeichnet; nach Konstruktion gilt $f_i|_{A_j} = f_j$ für alle $j < i$. Die derart konstruierte Folge $(f_i)_{i<\alpha}$ legt nun eindeutig eine Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_R(A, Q/R)$ fest mit $f|_{A_i} = f_i$ für alle $i < \alpha$. Wir definieren

$$\Phi : \prod_{i<\alpha} \mathrm{Hom}_R(A_i/A_i^0, Q/R) \to \mathrm{Hom}_R(A, Q/R) \quad \text{durch} \quad (h_i) \mapsto f.$$

Wir behaupten, die Abbildung Φ sei eine Injektion. Sind (g_i), (h_i) zwei verschiedene Folgen aus $\prod_{i<\alpha} \mathrm{Hom}_R(A_i/A_i^0, Q/R)$, so gibt es einen kleinsten

Index β mit $g_\beta \neq h_\beta$. Folglich ist $\Phi(g_i)|_{A_\beta^0} = \Phi(h_i)|_{A_\beta^0}$, aber es existiert ein $a \in A_\beta - A_\beta^0$ mit $g_\beta \pi_\beta(a) \neq h_\beta \pi_\beta(a)$. Setzen wir $g := \Phi(g_i)|_{A_\beta^0}$, so gilt daher

$$[\Phi(g_i)](a) = [\varepsilon_\beta(g) + g_\beta \pi_\beta](a) \neq [\varepsilon_\beta(g) + h_\beta \pi_\beta](a) = [\Phi(h_i)](a),$$

d.h. $\Phi(g_i) \neq \Phi(h_i)$.

Da nach Lemma 1.6 $\mathrm{Hom}_R(A_i/A_i^0, Q/R)$ für jedes $i < \alpha$ nichttrivial ist, gilt

$$2^{|S|} \leq \left| \prod_{i<\alpha} \mathrm{Hom}_R(A_i/A_i^0, Q/R) \right| \leq |\mathrm{Hom}_R(A, Q/R)|.$$

3.2. Das Hauptresultat dieses Paragraphen lautet nun:

THEOREM 3.3. *Es sei R ein beliebiger nicht-vollständiger Dedekind-Ring und $\aleph_\alpha$ eine unendliche Kardinalzahl, welche der folgenden Bedingung genügt:*

(*) *Für jede Kardinalzahl c mit $2^c \leq \aleph_\alpha$ gilt $|R|^c \leq \aleph_\alpha$.*

Dann besitzt jeder R-Modul A mit $|\mathrm{Hom}_R(A, R)| \leq \aleph_\alpha$ und $|\mathrm{Ext}_R(A, R)| \leq \aleph_\alpha$ ein Erzeugendensystem S, für welches die Abschätzung $2^{|S|} \leq \aleph_\alpha$ gilt.

Beweis. Nach Lemma 3.1 gibt es einen Untermodul B von A, derart dass die Abschätzungen

(i) $2^{\mathrm{Rg}B} \leq |\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|$ und
(ii) $2^{\mathrm{Rg}A/B} \leq |\mathrm{Hom}_R(B, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|$

erfüllt sind. Folglich ist $2^{\mathrm{Rg}B} \leq \aleph_\alpha$, und wegen (*) gilt damit $|R|^{\mathrm{Rg}B} \leq \aleph_\alpha$. Ist nun B_0 ein maximaler freier Untermodul von B, so ist B/B_0 ein Torsionsmodul, und es gilt daher $|\mathrm{Hom}_R(B, R)| \leq |\mathrm{Hom}_R(B_0, R)| = |R|^{\mathrm{Rg}B}$ und damit $|\mathrm{Hom}_R(B, R)| \leq \aleph_\alpha$. Daraus folgt mit (i) und (ii) die Abschätzung $2^{\mathrm{Rg}A} \leq \aleph_\alpha$, und wegen (*) gilt somit $|R|^{\mathrm{Rg}A} \leq \aleph_\alpha$.

Nun betrachten wir die exakte Folge

$$\mathrm{Hom}_R(A, Q) \to \mathrm{Hom}_R(A, Q/R) \to \mathrm{Ext}_R(A, R).$$

Da $\mathrm{Hom}_R(A, Q) \cong \mathrm{Hom}_Q(A \otimes_R Q, Q)$ ist, gelten die (Un-) Gleichungen

$$|\mathrm{Hom}_R(A, Q)| = |Q|^{\mathrm{Rg}A} = |R|^{\mathrm{Rg}A} \leq \aleph_\alpha.$$

Wegen $|\mathrm{Ext}_R(A, R)| \leq \aleph_\alpha$ ist dann auch $|\mathrm{Hom}_R(A, Q/R)| \leq \aleph_\alpha$; es folgt mit Lemma 3.2, dass A ein Erzeugendensystem S besitzt, für welches die Abschätzung $2^{|S|} \leq \aleph_\alpha$ gilt.

3.3. Ist R ein Ring von beliebiger unendlicher Mächtigkeit, so ist die Bedingung (*) der Voraussetzung von Theorem 3.3 für jede Kardinalzahl $\aleph_\alpha \geqslant 2^{|R|}$ erfüllt: Es sei c eine Kardinalzahl mit $2^c \leqslant \aleph_\alpha$. Ist $c \leqslant |R|$, so gilt $|R|^c \leqslant 2^{|R|} \leqslant \aleph_\alpha$; ist aber $c > |R|$, so haben wir $|R|^c = 2^c \leqslant \aleph_\alpha$.

Als erste Folgerung aus Theorem 3.3 erhalten wir

KOROLLAR 3.4. *Ist R ein nicht-vollständiger Dedekind-Ring, so gilt für jeden R-Modul A die Abschätzung*

$$2^{|A|} \leqslant 2^{|R|}\,|\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|.$$

Beweis. Es sei $\aleph_\alpha = 2^{|R|}\,|\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|$. Nach obiger Bemerkung erfüllt $\aleph_\alpha$ die Bedingung (*), und es gilt $|\mathrm{Hom}_R(A, R)| \leqslant \aleph_\alpha$ und $|\mathrm{Ext}_R(A, R)| \leqslant \aleph_\alpha$. Dann folgt aus Theorem 3.3, dass A ein Erzeugendensystem S besitzt mit $2^{|S|} \leqslant \aleph_\alpha$. Nun ist $2^{|A|} \leqslant 2^{|S|} 2^{|R|}$; also gilt, wie behauptet, $2^{|A|} \leqslant \aleph_\alpha$.

Wir erinnern daran, dass die Klasse $\mathbf{C}(\aleph_\alpha)$ aus denjenigen R-Moduln besteht, deren Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\alpha$ ist. Es sei nun $\aleph_\alpha \geqslant 2^{|R|}$; gilt dann $|\mathrm{Hom}_R(A, R)| < 2^{\aleph_\alpha}$ und $|\mathrm{Ext}_R(A, R)| < 2^{\aleph_\alpha}$, so folgt aus Korollar 3.4 die Abschätzung $|A| < \aleph_\alpha$. Wir erhalten damit folgendes Resultat für die Klassen $\mathbf{C}(\aleph_\alpha)$:

THEOREM 3.5. *Es sei R ein beliebiger nicht-vollständiger Dedekind-Ring, $\aleph_\alpha$ eine Kardinalzahl $\geqslant 2^{|R|}$ und A ein beliebiger R-Modul. Dann gehört mit* $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ *und* $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ *auch A zu* $\mathbf{C}(\aleph_\alpha)$.

Mit andern Worten besitzt die Klasse $\mathbf{C}(\aleph_\alpha)$ für jede Kardinalzahl $\aleph_\alpha \geqslant 2^{|R|}$ die Hom-Ext-Eigenschaft.

4. Abzählbare Dedekind-Ringe

4.1. Von nun an sei R immer ein *abzählbarer* Dedekind-Ring (kein Körper). Solche Ringe sind stets *nicht-vollständig.* Dies kann anhand der exakten Folge

$$\mathrm{Hom}_R(Q, Q) \to \mathrm{Hom}_R(Q, Q/R) \to \mathrm{Ext}_R(Q, R)$$

eingesehen werden: Nach Lemma 3.2 gilt $|\mathrm{Hom}_R(Q, Q/R)| \geqslant 2^{\aleph_0}$; ohnehin ist $|\mathrm{Hom}_R(Q, Q/R)| \leqslant 2^{\aleph_0}$, also gilt Gleichheit. Da $\mathrm{Hom}_R(Q, Q) \cong Q$ abzählbar ist, muss somit auch $|\mathrm{Ext}_R(Q, R)| = 2^{\aleph_0}$ sein; R ist also nicht-vollständig. Genauer gilt sogar $\mathrm{Rg}[\mathrm{Ext}_R(Q, R)] = 2^{\aleph_0}$ (dies folgt z.B. aus Lemma 4.5).

Die Beschränkung auf abzählbare Dedekind-Ringe R hat ferner den Vorteil, dass jede unendliche Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ die Bedingung (*) der Voraussetzung von Theorem 3.3 erfüllt: Ist c endlich, so gilt sicher $|R|^c \leqslant \aleph_\alpha$; ist aber c eine unendliche Kardinalzahl mit $2^c \leqslant \aleph_\alpha$, so gilt $|R|^c = 2^c \leqslant \aleph_\alpha$. Dies bewirkt, dass die Aussage von Korollar 3.4 verschärft werden kann:

THEOREM 4.1. *Es sei R ein abzählbarer Dedekind-Ring. Dann besitzt jeder R-Modul A ein Erzeugendensystem S, derart dass folgende Abschätzung gilt:*

$$2^{|S|} \leqslant |\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|.$$

Beweis. Ist die Kardinalzahl $|\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|$ unendlich, so erfüllt sie, wie soeben gezeigt, die Bedingung (*). Die Behauptung des Satzes ist dann eine unmittelbare Folgerung aus Theorem 3.3. Ist $|\mathrm{Hom}_R(A, R)|\,|\mathrm{Ext}_R(A, R)|$ hingegen endlich, so ist A nach Theorem 2.1 (d) selbst endlich. Dann gibt es ein Erzeugendensystem S mit $2^{|S|} \leqslant |A|$. Da nach Prop. 1.5(b) $A \cong \mathrm{Ext}_R(A, R)$ ist, gilt für dieses System S die Behauptung.

Es folgen daraus Verbesserungen der bisherigen Resultate betreffend Klassen mit der Hom-Ext-Eigenschaft (vgl. Theoreme 3.5 bzw. 2.1):

THEOREM 4.2. *Es sei R ein abzählbarer Dedekind-Ring, $\aleph_\alpha$ eine beliebige unendliche Kardinalzahl und A irgendein R-Modul. Dann gehört mit* $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ *und* $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ *auch A zu* $\mathbf{C}(\aleph_\alpha)$.

Beweis. Für überabzählbare Kardinalzahlen folgt diese Aussage aus Theorem 4.1; für $\aleph_0$ hingegen ist sie eine Konsequenz aus Theorem 2.1(d).

THEOREM 4.3. *Ist R ein abzählbarer Dedekind-Ring, so besitzt jede SE-abgeschlossene Unterklasse von* $\mathbf{C}(2^{\aleph_0})$ *die* Hom-Ext-*Eigenschaft.*

Beweis. Es sei $\mathbf{C}$ eine SE-abgeschlossene Unterklasse von $\mathbf{C}(2^{\aleph_0})$ und A ein R-Modul mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ und $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ zu $\mathbf{C}$ gehören. Dann ist A nach Theorem 4.1 endlich erzeugt, und dasselbe gilt für $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ und $\mathrm{Ext}_R(A, R)$. Folglich sind $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ und $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ in der Klasse $\mathbf{C}_e$ aller endlich erzeugten R-Moduln, welche zu $\mathbf{C}$ gehören. Die Klasse $\mathbf{C}_e$ ist SE-abgeschlossen; es folgt mit Theorem 2.1(d), dass auch A in $\mathbf{C}_e$ und damit erst recht in $\mathbf{C}$ liegt.

4.2 Als bemerkenswertes Nebenprodukt erhalten wir Aussagen über R-Moduln, welche äquivalent sind zur Negation der speziellen Kontinuumshypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$:

KOROLLAR 4.4. *Ist R ein abzählbarer Dedekind-Ring, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

(ii) *Jeder R-Modul A mit* $|\mathrm{Hom}_R(A, R)| \leq \aleph_1$ *und* $|\mathrm{Ext}_R(A, R)| \leq \aleph_1$ *ist endlich erzeugt.*

(iii) *Jede SE-abgeschlossene Unterklasse von* $\mathbf{C}(\aleph_2)$ *besitzt die* Hom-Ext-*Eigenschaft.*

Beweis. Die Implikation (i)$\Rightarrow$(ii) folgt aus Theorem 4.1, während (ii)$\Rightarrow$(iii) analog bewiesen wird wie Theorem 4.3 mit $\mathbf{C}(\aleph_2)$ anstelle von $\mathbf{C}(2^{\aleph_0})$.

Für (iii)$\Rightarrow$(i) beweisen wir die Kontraposition anhand der Klasse $\mathbf{C}$ aller torsionsfreien R-Moduln mit Mächtigkeit$\leq 2^{\aleph_0}$. Diese Klasse ist SE-abgeschlossen, besitzt aber die Hom-Ext-Eigenschaft nicht: Es gilt $\mathrm{Hom}_R(Q/R, R) = 0$; ferner ist $\mathrm{Ext}_R(Q/R, R)$ nach Prop. 1.3(b) torsionsfrei, und wegen $\mathrm{Ext}_R(Q/R, R) \cong \mathrm{Hom}_R(Q/R, Q/R)$ gilt $|\mathrm{Ext}_R(Q/R, R)| \leq 2^{\aleph_0}$. Folglich gehören $\mathrm{Hom}_R(Q/R, R)$ und $\mathrm{Ext}_R(Q/R, R)$ zu $\mathbf{C}$, aber Q/R liegt nicht in $\mathbf{C}$. Nehmen wir nun an, (i) sei falsch, so ist $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}(\aleph_2)$ enthalten; also ist auch (iii) falsch.

4.3. Dem Beweis von Korollar 4.4 entnehmen wir, dass die Klasse aller torsionsfreien R-Moduln mit Mächtigkeit$\leq 2^{\aleph_0}$ die Hom-Ext-Eigenschaft *nicht* besitzt. Dies widerlegt nicht nur die Vermutung, dass jede SE-abgeschlossene Klasse diese Eigenschaft besitze, sondern zeigt auch, dass die Mächtigkeitsschranke in Theorem 4.3 nicht vergrössert werden kann. Hingegen bleibt die Frage offen, ob für jede *Serre-Klasse* von Moduln über einem abzählbaren Dedekind-Ring die Hom-Ext-Eigenschaft erfüllt sei. Insbesondere wissen wir dies im Fall der Klasse $\mathbf{T}$ aller Torsionsmoduln nicht. Immerhin können wir zeigen, dass die Klasse $\mathbf{T}(2^{\aleph_1}) := \mathbf{T} \cap \mathbf{C}(2^{\aleph_1})$ und die Klassen $\mathbf{T}(P)$ aller Torsionsmoduln A mit $t_P A = 0$ die Hom-Ext-Eigenschaft besitzen. Dazu benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

LEMMA 4.5. *Jeder torsionsfreie R-Modul A von endlichem Rang ist entweder projektiv, oder es gilt* $\mathrm{Rg}[\mathrm{Ext}_R(A, R)] = 2^{\aleph_0}$.

Beweis. Ist A nicht projektiv, so gilt $\mathrm{Ext}_R(A, R) \neq 0$. Die Behauptung folgt nun aus [4, Prop. 1].

PROPOSITION 4.6. *Es sei R ein abzählbarer Dedekind-Ring und A ein beliebiger R-Modul. Dann gehört mit* $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ *und* $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ *auch A zur Klasse* $\mathbf{T}(2^{\aleph_1})$.

Beweis. Aus $|\mathrm{Hom}_R(A, R)| < 2^{\aleph_1}$ und $|\mathrm{Ext}_R(A, R)| < 2^{\aleph_1}$ folgt mit Theorem 4.1, dass A abzählbar ist. Es bleibt zu zeigen, dass A ein Torsionsmodul ist. Mit $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ ist nach (1.2b) auch $\mathrm{Ext}_R(A/tA, R)$ ein Torsionsmodul, und für jeden Untermodul B von A/tA ist $\mathrm{Ext}_R(B, R)$ ein Torsionsmodul. Nach Lemma 4.5 ist somit jeder Untermodul mit endlichem Rang von A/tA projektiv. Dann ist A/tA nach Lemma 2.4 selbst projektiv. Nun gilt aber $\mathrm{Hom}_R(A/tA, R) \cong \mathrm{Hom}_R(A, R) = 0$; also muss A/tA verschwinden, dh. A ist ein Torsionsmodul.

PROPOSITION 4.7. *Es sei R ein abzählbarer Dedekind-Ring, $P \neq 0$ ein Primideal von R und A ein beliebiger R-Modul. Dann ist mit* $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ *und* $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ *auch A in* $\mathbf{T}(P)$.

Beweis. Sind $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ und $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ aus $\mathbf{T}(P)$, so ist A nach Lemma 1.7 P-teilbar. Dann ist auch A/tA P-teilbar und damit nach Lemma 1.8 ein Q_P-Modul. Es sei nun A_0 ein maximaler freier Q_P-Untermodul von A/tA. Dann ist mit $\mathrm{Ext}_R(A/tA, R)$ auch $\mathrm{Ext}_R(A_0, R)$ ein Torsionsmodul; daraus folgt mit Lemma 4.5, dass A_0 und daher auch A/tA verschwindet.

Es bleibt zu zeigen, dass $t_P A = 0$ ist. Als direkter Summand eines P-teilbaren Moduls ist $t_P A$ selbst P-teilbar und damit teilbar, denn $t_P A$ ist ohnehin P'-teilbar für jedes nichttriviale Primideal $P' \neq P$. Folglich ist $t_P A \cong \bigoplus_{i \in I} R(p^\infty)_i$. Da $\mathrm{Ext}_R(t_P A, R)$ ein Torsionsmodul, $\mathrm{Ext}_R(R(P^\infty), R)$ hingegen torsionsfrei (nach Prop. 1.3(b)) und nichttrivial ist, muss die Indexmenge I leer sein; also gilt $t_P A = 0$.

Bemerkung. Es gibt (überabzählbare) Dedekind-Ringe R mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{Ext}_R(Q, R) \cong Q$ ist (vgl. [5]). Für einen solchen Ring besitzt z.B. der torsionsfreie R-Modul $A = \mathrm{Ext}_R(Q/R, R)$ die Eigenschaft, dass $\mathrm{Hom}_R(A, R) = 0$ und $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ ein Torsionsmodul ist. Es gibt also (überabzählbare) nichtvollständige Dedekind-Ringe, für welche die Klasse aller Torsionsmoduln die Hom-Ext-Eigenschaft *nicht* besitzt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R. Bieri und B. Eckmann, *Finiteness properties of duality groups*, Comment. Math. Helv. *49* (1974), 74–83.

[2] P. J. Hilton und U. Stammbach, *A course in homological algebra*, New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag 1971.

[3] M. Huber, *Klassen von Moduln über Dedekindringen und Satz von Stein-Serre*, Battelle Mathematics Report No. 102, Genf 1976.

[4] C. U. Jensen, *On the structure of* $\mathrm{Ext}_R^1(A, R)$, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 6, *Rings, modules and radicals*, Keszthely (Ungarn) 1971, 215–226.

[5] ——, *On* $\mathrm{Ext}_R^1(A, R)$ *for torsion-free A*, Bull. Amer. Math. Soc. *78* (1972), 831–834.

[6] I. KAPLANSKY, *Modules over Dedekind rings and valuation rings*, Trans. Amer. Math. Soc. *72* (1952), 327–340.
[7] E. MATLIS, *Cotorsion modules*, Memoirs Amer. Math. Soc. *49* (1964).
[8] ——, *Reflexive domains*, J. Algebra *8* (1968), 1–33.
[9] R. J. NUNKE, *Modules of extensions over Dedekind rings*, Ill. J. Math. *3* (1959), 222–241.
[10] —— und J. J. ROTMAN, *Singular cohomology groups*, J. London Math. Soc. *37* (1962), 301–306.
[11] J. J. ROTMAN, *Notes on homological algebra*, New York, Van Nostrand Reinhold 1968.
[12] J.-P. SERRE, *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*, Ann. of Math. *58* (1953), 258–294.
[13] ——, *Corps locaux*, Paris, Hermann 1962.

Dr. Martin Huber
Forschungsinstitut für Mathematik
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich

Eingegangen den 7. Mai 1976.