Familien komplexer Räume mit streng pseudokonvexer spezieller Faser

Autor(en): **Riemenschneider, Oswald**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **51 (1976)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-39458

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 39(51) 547–565 Birkhäuser Verlag, Basel

Familien komplexer Räume mit streng pseudokonvexer spezieller Faser

OSWALD RIEMENSCHNEIDER

Einleitung

In [8] wurde das folgende Resultat bewiesen, das ein nützliches Hilfsmittel zur Untersuchung von Deformationen rationaler Singularitäten darstellt (vgl. z.B. [1], [3], [4], [9]):

SATZ 0. *Es sei $\tilde{\pi}:\tilde{Z}\to S$ eine reguläre Familie komplexer Mannigfaltigkeiten mit regulärer Basis S. Die Faser $\tilde{Z}_0$ über einem festen Punkt $s_0\in S$ sei Auflösung einer rationalen Singularität (X, x_0). Dann läßt sich $\tilde{\pi}$ faserweise zu einer Deformation $\pi:Z\to S$ von $(X, x_0)=\pi^{-1}(s_0)$ zusammenblasen (nach evtl. Verkleinerung von S).*

Da sich jedoch die Voraussetzung der Regularität von S bei den Anwendungen als hinderlich erwies, werden wir in dieser Arbeit einen Beweis für beliebiges S nachtragen. Wir haben dazu die beiden Hauptschritte des Beweises als eigenständige Aussagen herauspräpariert, zumal sie nicht von der Rationalität der Singularität (X, x_0) abhängen und deswegen auch zur Untersuchung nichtrationaler Singularitäten herangezogen werden könen. Wir beweisen in Abschnitt 1:

SATZ 1. *Es sei $\pi:Z\to S$ eine holomorphe Abbildung komplexer Räume mit streng pseudokonvexer spezieller Faser $X=\pi^{-1}(s_0)$, $s_0\in S$ fest. Dann gibt es zu jeder kompakten Menge $K\subset X$ offene Mengen $U\subset Z$, $V\subset S$ mit $K\subset U$, $s_0\in V$, $\pi(U)\subset V$, s.d. $\pi\mid U:U\to V$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung ist.*

In Abschnitt 2 zeigen wir, daß unter gewissen Voraussetzungen Plattheit beim Zusammenblasen 1-konvexer holomorpher Abbildungen erhalten bleibt (zur Definition 1-konvexer holomorpher Abbildungen und zur Existenz ihrer Reduktion vgl. die Abschnitte 1 und 2 und die dort angegebene Literatur). Es gilt:

SATZ 2. *Es sei*

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & Z \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

das kanonische Reduktionsdiagramm einer 1-konvexen holomorphen Abbildung $\tilde{\pi}$. $\mathcal{F}$ *sei eine kohärente analytische Garbe auf* $\tilde{Z}$, *die entlang einer Faser* $\tilde{Z}_0 = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$ *platt über* S *sei. Ferner sei eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt* ($\mathcal{F}_s$ *bezeichnet die analytische Einschränkung von* $\mathcal{F}$ *auf die Faser* $\tilde{Z}_s$):

(i) $H^1(\tilde{Z}_0, \mathcal{F}_{s_0}) = 0$
(ii) $\dim_{\mathbf{C}} H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s)$ *konstant in einer Umgebung von* s_0 *und* S *reduziert in* s_0.

Die Bildgarbe $\sigma_* \mathcal{F}$ *ist dann* π*-platt entlang der Faser* $Z_0 = \pi^{-1}(s_0)$.

Zum Beweis von Satz 2 ist es notwendig, einen der Halbstetigkeitssätze aus [7] zu verallgemeinern (Lemma 1).

Im Abschnitt 3 wenden wir die Sätze 1 und 2 auf Deformationen analytischer Singularitäten an. Zunächst vervollständigen wir ein Resultat aus [10]: Ist $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \to S$ eine platte 1-konvexe Deformation der streng pseudokonvexen Mannigfaltigkeit $\tilde{X} = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$ mit reduziertem S und $\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$, so ist in dem Reduktionsdiagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & Z \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

π eine *platte* Deformation von $Z_0 = \pi^{-1}(s_0)$ und $X = Z_0$ ist der Remmert-Quotient von $\tilde{X}$ (Satz 3). Hieraus folgt sofort Satz 0 bei beliebigem Grundraum S (Satz 4). Satz 5 liefert eine partielle Umkehrung von Satz 3, mit deren Hilfe für bestimmte 1-konvexe Deformationen $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \to S$ von $\tilde{X}$ maximale Teilfamilien $\tilde{Z} \mid S_a \to S_a$, $S_a \hookrightarrow S$, gefunden werden können, die sich simultan zu Deformationen von X zusammenblasen lassen (Satz 6). Dieses Ergebnis wird sodann bei der Konstruktion simultaner Auflösungen isolierter Singularitäten verwendet. Schließlich beweisen wir einen Satz von Huikeshoven [4] über Brieskorns Auflösung der versellen Deformation eines rationalen Doppelpunktes in einer schärferen Fassung.

1. Beweis von Satz 1

Wir erinnern zunächst an die Definition streng pseudokonvexer komplexer Räume und 1-konvexer holomorpher Abbildungen. Die auftretenden komplexen Räume sind nicht notwendig reduziert.

DEF. 1. Eine holomorphe Abbildung $\pi: Z \to S$ heißt 1-*konvex*, wenn es eine C^∞-Funktion $\varphi: Z \to \mathbf{R}$ und eine Konstante $c_* \in \mathbf{R}$ gibt, s.d. folgendes gilt:

(i) $\varphi \mid \{z \in Z: \varphi(z) > c_*\}$ ist streng plurisubharmonisch,
(ii) für jedes $c \in \mathbf{R}$ ist die Abbildung

$$\pi \mid \{z \in Z: \varphi(z) \leq c\}$$

eigentlich.

Man nennt dann φ eine *Ausschöpfungsfunktion* mit *Konvexitätsschranke* c_*.

Ein komplexer Raum X heißt *streng pseudokonvex*, wenn die Abbildung von X auf den reduzierten einpunktigen Raum 1-konvex ist.

Liegt eine 1-konvexe holomorphe Abbildung $\pi: Z \to S$ mit Ausschöpfungsfunktion φ vor, so schreiben wir abkürzend für alle $a, b \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$:

$$Z_a^b = \{z \in Z: a < \varphi(z) < b\}$$

$$Z_{-\infty}^b = Z^b, \qquad Z_a^\infty = Z_a,$$

$$\pi^b = \pi \mid \{z \in Z: \varphi(z) \leq b\}.$$

Wir können nun mit dem *Beweis von Satz 1* beginnen. Da $X = \pi^{-1}(s_0)$ streng pseudokonvex ist, besitzt X eine Ausschöpfungsfunktion φ mit Konvexitätsschranke c_*. Mithin gibt es ein $c \in \mathbf{R}$ mit $K \subset X^c$, wobei wir ohne Einschränkung $c > c_*$ voraussetzen können.

Wir werden U sogar so konstruieren, daß $U \cap X = X^c$ gilt.

Wähle reelle Konstanten $a_1, \ldots, a_5, b_1, b_2$ mit $c_* = a_1 < \cdots < a_5 < c < b_2 < b_1$. Nun gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U_x \subset Z$ von x, eine Umgebung $V_x \subset S$ von s_0 und eine abgeschlossene holomorphe Einbettung $j_x: U_x \hookrightarrow U_x \times V_x$, s.d. $\pi(U_x) \subset V_x$ und mit $\pi_x = \pi \mid U_x$ das kanonische Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r, hook, "j_x"] \arrow[dr, "\pi_x"'] & U_x \times V_x \arrow[d, "pr_2"] \\ & V_x \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei pr_2 die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichnet. Da nach Voraussetzung $\overline{X^{b_1}}$ kompakt ist, genügen endlich viele Punkte x_j, $j = 1, \ldots, t$, s.d.

die U_{x_j}, $j=1,\dots,t$, die Menge $\overline{X^{b_1}}$ überdecken. Setze

$$V_0=\bigcap_{j=1}^{t} V_{x_j}, \qquad U_0=\bigcup_{j=1}^{t} \pi_{x_j}^{-1}(V_0).$$

Dann ist U_0 eine offene Menge in Z mit $U_0\cap X\supset\overline{X^{b_1}}$, es gilt $\pi(U_0)\subset V_0$, und U_0 besitzt abzählbare Topologie, wenn die U_x hinreichend klein gewählt wurden.

Da $X_{a_1}^{b_1}\Subset U_0\cap X$ und φ dort streng plurisubharmonisch ist, gibt es nach Richberg [6] eine offene Menge U_1 in Z mit $U_1\Subset U$, $U_1\cap X=X_{a_1}^{b_1}$ und eine streng plurisubharmonische Funktion $\Phi_1: U_1\to\mathbf{R}$ mit $\Phi_1\mid U_1\cap X=\varphi$. Wegen $X_{a_2}^{b_2}\Subset X_{a_1}^{b_1}$ und $X^{a_3}\Subset X^{a_4}\Subset X^{b_1}$ findet man weitere offene Mengen U_2, U_3, U_4 in Z mit

$$U_2\Subset U_1, \qquad U_2\cap X=X_{a_2}^{b_2},$$
$$U_3\Subset U_4\Subset U_0, \qquad U_i\cap X=X^{a_i}, \qquad i=3,4.$$

Setze $\varphi\mid X^{a_4}$ beliebig zu einer C^∞-Funktion Φ_4 auf U_4 fort. Ist dann $\{\delta_1,\delta_4\}$ eine Teilung der 1 bzgl. der Überdeckung $\{U_1, U_4\}$ von $W_1=U_1\cup U_4$, so ist

$$\Phi:=\delta_1\Phi_1+\delta_4\Phi_4$$

eine C^∞-Funktion auf W_1 mit

$$\Phi\mid W_1\cap X=\varphi\mid X^{b_1},$$

und

$$\Phi\mid W_1\setminus\bar{U}_4=\Phi_1\mid U_1\setminus\bar{U}_4$$

ist streng plurisubharmonisch. Setze schließlich noch $W_2=U_2\cup U_3$; es gilt dann $W_2\Subset W_1$, $W_2\cap X=X^{b_2}$.

Nach diesen Vorbereitungen führen wir den Beweis von Satz 1 in drei Schritten.

BEHAUPTUNG 1. *Es existiert eine Umgebung* $V_1=V_1(s_0)\subset V_0$, *s.d.*

$$\{z\in W_1\cap\pi^{-1}(V_1):\Phi(z)>a_5\}\subset W_1\setminus\bar{U}_4.$$

Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es zu jedem $V=V(s_0)\subset V_0$ ein $z\in W_1\cap\pi^{-1}(V_1)\cap\bar{U}_4$ mit $\Phi(z)>a_5$. Man findet somit eine unend-

liche Folge $z_j \in W_1 \cap \bar{U}_4$ mit $\Phi(z_j) > a_5$ und $\lim \pi(z_j) = s_0$. Da $\bar{U}_4$ kompakt ist, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß die Folge (z_j) gegen ein Element $z_0 \in \bar{U}_4$ konvergiert. Also ist $z_0 \in \bar{U}_4 \cap X \subset X^{a_5}$, d.h. $z_0 \in W_1$ und $\Phi(z_0) = \varphi(z_0) < a_5$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\Phi(z_j) > a_5$ für alle j.

BEHAUPTUNG 2. *Es existiert eine Umgebung $V = V(s_0) \subset V_1$, s.d. die Abbildungen*

$$\omega^d = \pi \,|\, \{z \in W_2 \cap \pi^{-1}(V) : \Phi(z) \leq d\}, \qquad d \leq c,$$

eigentlich sind.

Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es zu beliebigem $V = V(s_0)$ ein Kompaktum $K \subset V$ und ein $d \leq c$, s.d. $L = (\omega^d)^{-1}(K)$ nicht kompakt ist. Wähle dann eine Folge (z_j) in L, die keine in L konvergente Teilfolge besitzt. Da $\overline{W_2}$ kompakt ist, existiert jedoch eine Teilfolge, die in $\overline{W_2}$ konvergiert. Der Grenzwert z_0 besitzt dann die folgenden Eigenschaften:

$$\Phi(z_0) \leq d, \qquad z_0 \in \overline{W_2} \setminus W_2 = \partial W_2, \qquad \pi(z_0) \in K.$$

Läßt man nun V immer kleiner werden, so erhält man auf diese Weise eine Folge (z_{0j}) mit

$$\Phi(z_{0j}) \leq c, \qquad z_{0j} \in \partial W_2, \qquad \lim \pi(z_{0j}) = s_0.$$

Da ∂W_2 kompakt ist, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß diese Folge gegen ein Element $z_{00} \in \partial W_2$ konvergiert. Für dieses gilt dann

$$\Phi(z_{00}) \leq c,$$

andererseits aber

$$z_{00} \in \partial W_2 \cap X = \partial X^{b_2} \subset \{x \in X : \varphi(x) = b_2\}$$

und damit $\Phi(z_{00}) = \varphi(z_{00}) = b_2 > c$. Widerspruch!

BEHAUPTUNG 3. *Man wähle V wie in Behauptung 2 und*

$$U = \{z \in W_2 \cap \pi^{-1}(V) : \Phi(z) < c\}.$$

Dann ist $\pi: U \to V$ *eine* 1-*konvexe holomorphe Abbildung mit Ausschöpfungsfunktion*

$$\psi = (c - \Phi)^{-1}$$

und Konvexitätsschranke $a_* = (c - a_5)^{-1}$.

Denn ψ ist eine C^∞-Funktion auf U, die dort streng plurisubharmonisch ist, wo dies auch für Φ zutrifft, nach Behauptung 1 also auf $\{z \in U : \Phi(z) > a_5\} = \{z \in U : \psi(z) > a_*\}$. Ist weiter $a \in \mathbf{R}$ und $K \subset V$ kompakt, so ist

$$\{z \in U \cap \pi^{-1}(K) : \psi(z) \leq a\} = \begin{cases} \phi, & a \leq 0 \\ \left\{z \in U \cap \pi^{-1}(K) : \Phi(z) \leq c - \dfrac{1}{a}\right\}, & a > 0. \end{cases}$$

Da die rechts stehende Menge nach Behauptung 2 kompakt ist, ist

$$\pi^a = \pi \mid \{z \in U : \psi(z) \leq a\}$$

eigentlich für alle $a \in \mathbf{R}$.—Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Bemerkung. Die Definition einer 1-konvexen holomorphen Abbildung π schließt nicht aus, daß einzelne oder sogar alle Fasern der Abbildung kompakt sein können und damit nicht streng pseudokonvex im eigentlichen Sinne sind. Setzt man jedoch voraus, daß π platt und eine Faser $\pi^{-1}(s_0)$ nicht kompakt ist, so sind auch alle hinreichend nahe bei $\pi^{-1}(s_0)$ liegenden Fasern nicht kompakt. Nur unter dieser Voraussetzung liefert Satz 1 die Existenz einer "schönen" Familie mit streng pseudokonvexen Fasern.

2. Beweis von Satz 2

Es sei im folgenden $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \to S$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung mit Ausschöpfungsfunktion φ, es sei $s_0 \in S$, und $\mathcal{F}$ sei eine kohärente analytische Garbe auf $\tilde{Z}$, die $\tilde{\pi}$-platt entlang $\tilde{Z}_0 = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$ sei. Da uns nur lokale Aussagen bzgl. s_0 interessieren, können wir annehmen, daß S klein ist. Da weiter Plattheit eine offene Eigenschaft ist, $\tilde{\pi} \mid \tilde{Z}^c$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung ist für alle $c > c_*$ und die Restriktionsabbildungen

$$H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) \to H^q(\tilde{Z}_s^c, \mathcal{F}_s)$$

bijektiv sind für alle $q \geqslant 1$ und alle $c > c_*$, können wir außerdem voraussetzen, daß $\mathcal{F}$ in jedem Punkt von $\tilde{Z}$ platt über S ist.

Setzt man ohne Einschränkung S als Steinsch voraus, so gelten die folgenden Aussagen (vgl. [5], [11]):

1. $\tilde{Z}$ ist holomorph-konvex.
2. Ist $Z = Q(\tilde{Z})$ der Remmert-Quotient von $\tilde{Z}$ (i.e. der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Steinsche Raum Z, für den es eine eigentliche holomorphe Abbildung $\sigma : \tilde{Z} \to Z$ mit $\mathcal{O}_Z = \sigma_* \mathcal{O}\tilde{Z}$, gibt), und ist $\tilde{E} = \bigcup_{s \in S} \tilde{E}_s$ die Vereinigung aller maximalen kompakten analytischen Mengen $\tilde{E}_s$ in den streng pseudokonvexen Fasern $\tilde{Z}_s$, $s \in S$, so ist $\sigma \mid \tilde{Z} \backslash \tilde{E}$: $\tilde{Z} \backslash \tilde{E} \to Z \backslash E$, $E = \sigma(\tilde{E})$, biholomorph. Insbesondere ist σ eine eigentliche Modifikation, wenn $\tilde{\pi}$ platt entlang $\tilde{Z}_0$, $\tilde{Z}_0$ nicht kompakt und S hinreichend klein ist.
3. Die Abbildung $\tilde{\pi}$ faktorisiert eindeutig über σ; d.h. es existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $\pi : Z \to S$, s.d. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & Z \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutiert. (Dies ist das kanonische Reduktionsdiagramm aus Satz 2).
4. Die Abbildung π ist Steinsch (d.h. Urbilder offener Steinscher Mengen sind Steinsch), und $\pi \mid E$ ist endlich. Insbesondere ist dann $R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F}$ für alle $q \geqslant 1$ wegen

$$R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F} = \pi_*(R^q \sigma_* \mathcal{F}), \qquad Tr R^q \sigma_* \mathcal{F} \subset E, \qquad q \geqslant 1,$$

kohärent.

Es sei nun L ein Steinsches Kompaktum in S mit $s_0 \in \mathring{L}$ (vgl. hierzu und dem Folgenden [7], §2). Dann gibt es für alle $c > c_*$ ein Steinsches Kompaktum $K \subset Z$ mit $Z_0 \cap E \subset \mathring{K}$, $\pi^{-1}(L) \supset K$, und einen nach oben beschränkten Komplex platter $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_S)$-Moduln

$$C^{\cdot} : \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots,$$

s.d. folgendes gilt:

i) $H^q(C^{\cdot}) = H^q(\tilde{K}, \mathcal{F})$, $\tilde{K} = \sigma^{-1}(K)$, $q \geqslant 0$
$\qquad = \Gamma(L, R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F})$, $q \geqslant 1$.

ii) Ist $s \in S$ und $\mathfrak{m}_s$ das zu s gehörende maximale Ideal von A, so gilt

$$\begin{aligned} H^q(C^{\cdot} \otimes_A (A/\mathfrak{m}_s)) &= H^q(\{z \in \tilde{Z}_s : \varphi(z) \leqslant c\}, \mathcal{F}_s), \qquad q \geqslant 0, \\ &= H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s), \qquad q \geqslant 1. \end{aligned}$$

Da wegen der Kohärenz von $R^q\tilde{\pi}_*\mathcal{F}$ die Moduln $H^q(C^{\cdot})$ für $q \geqslant 1$ endlich sind, können wir sogar ohne Einschränkung voraussetzen, daß alle C^q frei und für $q \geqslant 1$ endlich sind.

Mit diesen Vorbereitungen ist es möglich, die folgende Verallgemeinerung von Theorem (3.1.II) aus [7] zu beweisen.

LEMMA 1. *Es sei $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \to S$ eine 1-konvexe holomorphe Abbildung, und $\mathcal{F}$ sei eine $\tilde{\pi}$-platte kohärente analytische Garbe auf $\tilde{Z}$. Gilt für eine natürliche Zahl $q \geqslant 1$*

i) $H^q(\tilde{Z}_0, \mathcal{F}_{s_0}) = 0$

oder

ii) $\dim_{\mathbf{C}} H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) = \text{const}$, *und S ist reduziert in s_0,*

dann ist $R^q\tilde{\pi}_*\mathcal{F}$ lokal frei nahe s_0 (und im Falle i) sogar Null). Bezeichnet $\mathfrak{m}(s)$ die maximale Idealgarbe des Punktes $s \in S$, so sind außerdem die kanonischen Abbildungen

$$t_s^k : (R^k\tilde{\pi}_*\mathcal{F}/\mathfrak{m}(s)R^k\tilde{\pi}_*\mathcal{F})_s \to H^k(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_{s_0})$$

für $k = q$, $\max(q-1, 1)$ nahe s_0 bijektiv, und im Falle $q = 1$ ist

$$\Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{F}) \to \Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{F}_{s_0})$$

surjektiv für alle $c > c_*$.

Beweis. Der Fall ii) ist Theorem (3.1.II) zusammen mit dem Zusatz (3.8) aus [7] und der Bemerkung auf p. 94 aus [10]. Es genügt also, den Fall i) zu behandeln. Wegen [7] Theorem (3.1.I) können wir annehmen, daß $H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) = 0$ für alle $s \in S$. Wir betrachten dann den Komplex $C^{\cdot}$ an der Stelle q:

$$C^{q-1} \xrightarrow{\delta^{q-1}} C^q \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}.$$

Für den ersten Teil der Aussage genügt der Nachweis, daß $H^q = H^q(C^{\cdot}) = 0$ ist,

denn dann gilt für alle $s \in L$:

$$(R^q\tilde{\pi}_*\mathcal{F})_s^{\wedge} = \Gamma(L, R^q\tilde{\pi}_*\mathcal{F})_{\mathfrak{m}_s}^{\wedge} = (H^q_{\mathfrak{m}_s})^{\wedge} = 0$$

(hierbei bezeichnet $\hat{}$ die entsprechenden Komplettierungen), und damit

$$R^q\tilde{\pi}_*\mathcal{F} \mid \mathring{L} = 0.$$

Für den zweiten Teil genügt der Nachweis, daß

$$Z_c^{q+1} = \operatorname{coker} \delta^q$$

ein platter A-Modul ist. Denn aus den exakten Sequenzen

$$0 \to \operatorname{im} \delta^q \to C^{q+1} \to Z_c^{q+1} \to 0$$
$$0 = H^q \to Z_c^q \to \operatorname{im} \delta^q \to 0$$

folgt dann auch die Plattheit von Z_c^q, und dies impliziert gemäß [7], Satz (2.3.d) die Bijektivität der kanonischen Abbildungen

$$t_M^k: H^k(C^{\cdot}) \otimes M \to H^k(C^{\cdot} \otimes M), \qquad k = q, \qquad q-1$$

für beliebige A-Moduln M. Mit $M = A/\mathfrak{m}_s$, $s \in L$, folgt dann die zweite Behauptung.

Es sei nun $\mathfrak{m} \subset A$ ein beliebiges maximales Ideal. Wir lokalisieren den Komplex $C^{\cdot}$ zu

$$(*) \quad C_{\mathfrak{m}}^{q-1} \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{m}}^{q-1}} C_{\mathfrak{m}}^q \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{m}}} C_{\mathfrak{m}}^{q+1},$$

und erhalten durch Tensorieren mit $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$:

$$C_{\mathfrak{m}}^{q-1}/\mathfrak{m}C_{\mathfrak{m}}^{q-1} \to C_{\mathfrak{m}}^q/\mathfrak{m}C_{\mathfrak{m}}^q \to C_{\mathfrak{m}}^{q+1}/\mathfrak{m}C_{\mathfrak{m}}^{q+1}.$$

Die letzte Sequenz ist aber exakt, da es ein $s \in L$ gibt $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_s$, so daß nach Voraussetzung

$$H^{q'}(C_{\mathfrak{m}}^{\cdot}/\mathfrak{m}C_{\mathfrak{m}}^{\cdot}) = H^q(C^{\cdot}/\mathfrak{m}C^{\cdot}) = H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) = 0.$$

Da die Moduln $C_{\mathfrak{m}}^l$ frei und für $l \geqslant 1$ endlich sind, folgt hieraus nach einem bekannten Lemma der kommutativen Algebra die Exaktheit von (*), und

coker $\delta^q_{\mathfrak{m}}$ ist direkter Summand von $C^{q+1}_{\mathfrak{m}}$, also frei. Wegen der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes ist coker $\delta^q_{\mathfrak{m}} = (\text{coker } \delta^q)_{\mathfrak{m}} = (Z^{q+1}_c)_{\mathfrak{m}}$. Damit ist Z^{q+1}_c platt und $H^q = H^q(C^{\cdot}) = 0$, q.e.d.

Wir kommen nun zum *Beweis von Satz 2.* Die Abbildung σ ist außerhalb $\tilde{E}$ biholomorph. Wir brauchen daher nur Punkte $z_0 \in Z_0 \cap E$ zu betrachten. Wähle Steinsche Kompakta $L \subset S$ und $K \subset Z$ wie zu Beginn dieses Abschnittes. Es genügt zu zeigen, daß $M = \Gamma(K, \sigma_* \mathcal{F})$ ein platter $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_S)$-Modul ist; denn bezeichnet $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{n}$ das zu s_0 bzw. z_0 in A bzw. $B = \Gamma(K, \mathcal{O}_Z)$ gehörende maximale Ideal, so folgt daraus die Plattheit von

$$(\sigma_* \mathcal{F})^{\wedge}_{z_0} = (M_{\mathfrak{n}})^{\wedge} \quad \text{über} \quad \mathcal{O}^{\wedge}_{S,s_0} = (A_{\mathfrak{m}})^{\wedge}$$

und damit die Plattheit von $(\sigma_* \mathcal{F})_{z_0}$ über $\mathcal{O}_{S,s_0}$. Da σ eigentlich und K Steinsch ist, folgt aber

$$\begin{aligned} M = \Gamma(K, \sigma_* \mathcal{F}) &= \varinjlim_{\substack{K \subset U \\ U \text{ Steinsch}}} \Gamma(U, \sigma_* \mathcal{F}) \\ &= \varinjlim_{\substack{K \subset U \\ U \text{ Steinsch}}} \Gamma(\sigma^{-1}(U), \mathcal{F}) = \Gamma(\sigma^{-1}(K), \mathcal{F}) \\ &= \Gamma(\tilde{K}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

und damit $M = H^0 = H^0(C^{\cdot})$, wobei $C^{\cdot}$ der oben beschriebene Komplex platter A-Moduln ist. Da $\mathcal{F}$ die Voraussetzungen von Lemma 1 für $q = 1$ erfüllt, ist

$$Z^1_c = \text{coker } \delta^0$$

ein platter A-Modul (dies folgt im Fall *i*) aus dem Beweis von Lemma 1 und im Fall ii) aus [7], (3.6)). Aus den exakten Sequenzen

$$0 \to \text{im } \delta^0 \to C^1 \to Z^1_c \to 0$$
$$0 \to \ker \delta^0 \to C^0 \to \text{im } \delta^0 \to 0$$
$$0 = \text{im } \delta^{-1} \to \ker \delta^0 \to H^0 \to 0$$

folgt dann die Plattheit von H^0. q.e.d.

3. Anwendungen

Wir ziehen sofort eine Folgerung aus Satz 2:

SATZ 3. *Es sei*

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & Z \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

das Reduktionsdiagramm einer platten 1*-konvexen holomorphen Abbildung* $\tilde{\pi}$. *Es gelte für einen festen Punkt* $s_0 \in S$:

i) $H^1(\tilde{Z}_0, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_0}) = 0$

oder

ii) $\dim_{\mathbf{C}} H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$ *konstant nahe* s_0 *und* S *reduziert in* s_0.

Dann ist π *(nach evtl. Verkleinerung von* S *bzgl.* s_0*) eine platte holomorphe Abbildung mit dem Remmert-Quotienten* $Q(\tilde{Z}_0)$ *als spezieller Faser* Z_0.

Beweis. Lemma 1, angewendet auf die $\tilde{\pi}$-platte Garbe $\mathcal{O}_{\tilde{Z}}$, liefert die Surjektivität der Restriktionsabbildung

$$\Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{O}_{\tilde{Z}}) \to \Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_0}).$$

Nach [10] Satz 1 impliziert dies die Gleichung $Z_0 = Q(\tilde{Z}_0)$. Die Plattheit von π folgt unmittelbar aus Satz 2 wegen $\mathcal{O}_Z = \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$. q.e.d.

Die Bedeutung von Satz 3 für die Deformationstheorie analytischer Singularitäten liegt in Folgendem: Ist (X, x_0) eine normale isolierte analytische Singularität und ist $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \to S$ eine (wegen Satz 1 ohne Einschränkung 1-konvexe) Deformation einer Auflösung $\tilde{X}$ von X mit einer der Eigenschaften i) oder ii), so liefert das Reduktionsdiagramm eine Deformation $\pi: Z \to S$ von X über S.

Da die Herleitung von Satz 0 bei beliebigem Grundraum S mit Hilfe der Sätze 1 und 3 ohne Schwierigkeiten wie in [8] geschehen kann, begnügen wir uns mit der Formulierung und überlassen die Einzelheiten des Beweises dem Leser.

SATZ 4. *Es sei* $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \to S$ *eine platte Familie komplexer Räume. Die Faser* $\tilde{Z}_0$ *über einem festen Punkt* $s_0 \in S$ *sei Auflösung einer rationalen Singularität* (X, x_0). *Dann läßt sich* $\tilde{\pi}$ *(nach evtl. Verkleinerung von* S*) faserweise zu einer Deformation* $\pi: Z \to S$ *von* $\pi^{-1}(s_0) = (X, x_0)$ *zusammenblasen, und die Nachbarfasern* Z_s, $s \in S$, *besitzen höchstens rationale Singularitäten in der Nähe von* x_0.

Wir zeigen jetzt in Ergänzung zu Satz 3, daß in gewissen 1-konvexen Deformationen $\tilde{\pi}:\tilde{Z}\to S$ von $\tilde{X}$ eine maximale Teilfamilie $\tilde{Z}_a\to S_a$ mit reduziertem $S_a\subset S$ enthalten ist, deren Reduktionsdiagramm zu einer (platten) Deformation $\pi_a:Z_a\to S_a$ von X führt. Dazu benötigen wir die folgende partielle Umkehrung von Satz 3:

SATZ 5. *Es sei $\tilde{\pi}:\tilde{Z}\to S$ eine platte 1-konvexe holomorphe Abbildung mit Reduktionsdiagramm*

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & Z \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

für die folgendes gilt:

i) $Q(\tilde{Z}_s)=Z_s$ *für alle* $s\in S$,
ii) $\dim_{\mathbf{C}} H^2(\tilde{Z}_s,\mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$ *lokal konstant auf* S.

Dann ist auch $\dim_{\mathbf{C}} H^1(\tilde{Z}_s,\mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$ *lokal konstant auf* S.

Beweis. Durch Liften des Reduktionsdiagramms auf die Normalisierung von S, anschließendes Einschränken auf 1-dimensionale reduzierte Unterräume und erneutes Liften auf die Normalisierung reduziert sich der Beweis auf den Fall einer (regulären) Riemannschen Fläche S. Es sei dann $s_0\in S$ und $L\subset S$ ein Steinsches Kompaktum mit $s_0\in \mathring{L}$ und $\dim_{\mathbf{C}} H^2(\tilde{Z}_s,\mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})=\text{const.}$ auf L. Wir betrachten wie oben den Komplex C von platten $A=\Gamma(L,\mathcal{O}_S)$-Moduln bzgl. $\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\tilde{Z}}$. Für beliebiges $s\in L$ hat man eine exakte Sequenz

$$(*)\quad 0\to H^q(C^{\cdot})\otimes A/\mathfrak{m}_s \xrightarrow{\iota_s^q} H^q(C^{\cdot}\otimes A/\mathfrak{m}_s)\to Tor_1^A(H^{q+1}(C^{\cdot}),A/\mathfrak{m}_s)\to 0,$$

$q\geqslant 0$ (vgl. [7]). Nach Voraussetzung und Konstruktion des Komplexes $C^{\cdot}$ ist die Abbildung

$$H^0(C^{\cdot})\to H^0(C^{\cdot}\otimes A/\mathfrak{m}_s)$$

surjektiv ([10], Satz 1), und infolgedessen

$$Tor_1^A(H^1(C^{\cdot}),A/\mathfrak{m}_s)=0,\qquad s\in L.$$

Also ist $H^1(C^{\cdot})$ ein platter A-Modul, und damit (da $H^1(C^{\cdot})$ als endlicher A-Modul insbesondere projektiv ist)

$$\operatorname{cg} H^1(C^{\cdot})_{\mathfrak{m}_s} = \dim H^1(C^{\cdot}) \otimes A/\mathfrak{m}_s$$

lokal konstant auf L. Wegen $\dim H^2(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$ für $s \in L$ ist dann nach Lemma 1, ii) die Abbildung t_s^1 bijektiv für alle $s \in L$. Also ist $\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$ lokal konstant auf L. q.e.d.

Wir sind nun in der Lage, das folgende Resultat zu beweisen, das eine wichtige Rolle bei der Konstruktion simultaner Auflösungen von isolierten Singularitäten spielt:

SATZ 6. *Es sei $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \to S$ eine 1-konvexe Deformation von $\tilde{X} = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$ mit $\dim_{\mathbb{C}} H^2(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$ Dann gibt es einen (bzgl. Inklusion) maximalen reduzierten analytischen Unterraumkeim S_a von S in s_0, s.d. im Reduktionsdiagramm*

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z}_a = \tilde{Z} \mid S_a \arrow[rr, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}_a = \tilde{\pi}|Z_a"'] & & Z_a \arrow[dl, "\pi_a"] \\ & S_a & \end{tikzcd}$$

der 1-konvexen Abbildung $\tilde{\pi}_a: \tilde{Z}_a \to S_a$ die Abbildung π_a eine platte Deformation von $\pi_a^{-1}(s_0) = Q(\tilde{X})$ ist.

Beweis. Es sei T ein reduzierter Unterraumkeim von S durch s_0, $\tilde{\pi}_T: \tilde{Z}_T = \tilde{Z} \mid T \to T$, und im Reduktionsdiagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z}_T \arrow[rr, "\sigma_T"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}_T"'] & & Z_T \arrow[dl, "\pi_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

sei Z_{T,s_0} der Remmert-Quotient von $\tilde{Z}_{T,s_0} = \tilde{X}$. Da $\tilde{X}$ regulär ist, ist Z_{T,s_0} normal, und da weiter π_T als platt vorausgesetzt ist, sind auch alle Nachbarfasern $Z_{T,t}$, t hinreichend nahe bei s_0, normal. Die Abbildungen $\sigma_{T,t}: \tilde{Z}_{T,t} \to Z_{T,t}$ sind eigentlich und biholomorph außerhalb $\tilde{E}_t$; folglich gilt $Q(\tilde{Z}_{T,t}) = Z_{T,t}$ für alle diese t. Da nach Voraussetzung $\dim H^2(\tilde{Z}_{T,t}, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_{T,t}}) = \text{const.}$ ist, kann man Satz 5 anwenden und erhält lokal um s_0:

$$T \subset \{s \in S : \dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = d_0 := \dim H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})\}.$$

Wir setzen für die rechts stehende Menge S_a und brauchen nur noch zu zeigen, daß sie analytisch in der Nähe von s_0 ist. Denn dann erfüllt die Familie $\tilde{\pi}_a : \tilde{Z}_a = \tilde{Z} \mid S_a \to S_a$, wobei S_a mit der reduzierten Struktur versehen ist, die Voraussetzungen von Satz 3, und somit ist $\pi_a : Z_a \to S_a$ eine platte Deformation von $\pi_a^{-1}(s_0) = Q(\tilde{X})$.

Nach Siu [12] ist $S_0 = \{s \in S : \dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) \geq d_0\}$ eine analytische Menge in S. Da aufgrund der Halbstetigkeitssätze für 1-konvexe holomorphe Abbildungen

$$\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) \leq d_0$$

für alle s nahe bei s_0 gelten muß, stimmen die Mengenkeime von S_0 und S_a in s_0 überein. q.e.d.

Im folgenden sei $X = (X, x_0)$ eine normale isolierte analytische Singularität, und $\sigma : \tilde{X} \to X$ sei eine ein für allemal fest gewählte Auflösung von X. Ferner sei $\pi : Z \to S$ eine Deformation von $\pi^{-1}(s_0) = X$, $s_0 \in S$, über dem *reduzierten* Basisraum S.

DEF. 2. Ein kommutatives Diagramm holomorpher Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & Z \arrow[d, "\pi"] \\ T \arrow[r, "\varepsilon"] & S \end{tikzcd}$$

heißt *simultane Auflösung von* π (*mit spezieller Faser* $\tilde{X}$), wenn folgendes gilt:

i) $\tilde{\sigma}$ ist eigentlich und surjektiv und ε ist endlich und surjektiv mit $\varepsilon^{-1}(s_0) = \{t_0\}$.
ii) $\tilde{\pi}$ ist eine Deformation von $\tilde{\pi}^{-1}(t_0) = \tilde{X}$ über dem reduzierten Basisraum T.
iii) Für alle $t \in T$ ist $\tilde{\sigma}_t = \tilde{\sigma} \mid \tilde{Z}_t : \tilde{Z}_t \to Z_s$, $s = \varepsilon(t)$, eine Auflösung der Singularitäten von Z_s. Es gilt $\tilde{\sigma}_{t_0} = \sigma$.

Ist $T = S$ und $\varepsilon = id$, so sprechen wir von einer simultanen Auflösung *ohne Basiswechsel.*

Wegen Satz 1 können wir stets annehmen, daß in einem simultanen Auflösungsdiagramm $\tilde{\pi}$ 1-konvex und π Steinsch ist. Ferner können wir S und T als Steinsch und damit Z als Steinsch und $\tilde{Z}$ als holomorph-konvex voraussetzen. Dann gilt

LEMMA 2. $Q(\tilde{Z}) \cong Z \times_S T$, *falls* $\dim_{\mathbf{C}} H^2(\tilde{Z}_t, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_t}) = \text{const}$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $S = T$, $\varepsilon = id$. Es genügt dann nachzuweisen, daß

$$(*) \quad \dim_{\mathbf{C}} H^1(\tilde{Z}_t, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_t}) = \text{const}.$$

Hieraus folgt nämlich nach Satz 3, daß in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Z} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\tilde{\pi}"'] & Z \arrow[dd, "\pi"] \\
& Q(\tilde{Z}) \arrow[ul, "\tau"'] \arrow[dl, "\pi'"] \\
T \arrow[r, "id"] & S
\end{tikzcd}$$

π' eine Deformation von $Q(\tilde{X}) = X$ ist. Da $Q(\tilde{Z})$ der Remmert-Quotient von $\tilde{Z}$, Z Steinsch und $\tilde{\sigma}$ eigentlich und surjektiv ist, existiert eine holomorphe Abbildung $\tau: Q(\tilde{Z}) \to Z$, die das obere Dreieck kommutativ macht. Da $\tau \mid X = id$ ist, muß τ biholomorph sein (bei hinreichend kleinem Z).

Um (*) zu beweisen, gehen wir zur Normalisierung $\nu: \hat{T} \to T$ über und setzen $\hat{Z} = \tilde{Z} \times_T \hat{T}$, $Z' = Z \times_T \hat{T}$. Z' ist als Totalraum einer Deformation des normalen Raumes X über der normalen Basis $\hat{T}$ normal. Hieraus folgt, daß die kanonische Abbildung $\hat{\sigma}: \hat{Z} \to Z'$ der Remmert-Quotient von $\hat{Z}$ ist. Wegen Definition 2, iii) gilt ferner

$$Z'_t = Z_{\nu(t)} = Q(\tilde{Z}_{\nu(t)}) = Q(\hat{Z}_t)$$

für alle $t \in \hat{T}$. Also sind die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, so daß

$$\dim H^1(\hat{Z}_t, \mathcal{O}_{\hat{Z}_t}) = \text{const.}, \qquad t \in \hat{T},$$

was sofort (*) nach sich zieht. q.e.d.

Wir setzen jetzt noch zusätzlich voraus:

1. $H^2(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$.
2. Es existiert eine Deformation $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \to T$ von $\tilde{\pi}^{-1}(t_0) = \tilde{X}$, die versell ist bzgl. Deformationen des Keimes von $\tilde{X}$ entlang der exzeptionellen Menge $\tilde{E}_0 = \sigma^{-1}(x_0)$.

Dann liefert Satz 6 einen reduzierten Unterraum $T_a \subset T$ (nach Verkleinerung von T) und ein Reduktionsdiagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z}_a = \tilde{Z} \mid T_a \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_a"'] & Z'_a \arrow[d, "\pi'_a"] \\ T_a \arrow[r, "id"] & T_a \end{tikzcd}$$

in welchem π'_a eine Deformation von X über T_a ist.

SATZ 7. *Das obige Diagramm ist versell bzgl. Deformationen von X über reduzierten Basen zusammen mit einer simultanen Auflösung (ohne Basiswechsel und spezieller Faser $\tilde{X}$).*

Beweis. Es sei $Z_1 \to S_1$ eine Deformation von X mit reduzierter Basis S_1 und simultaner Auflösung

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z}_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "\tilde{\pi}_1"'] & & Z_1 \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & S_1 & \end{tikzcd}$$

mit $\tilde{X}$ als spezieller Faser von $\tilde{\pi}_1$. Nach Lemma 2 gilt $Z_1 = Q(\tilde{Z}_1)$, und außerdem ist $Z_{1,s} = Q(\tilde{Z}_{1,s})$ für alle $s \in S_1$ nach Voraussetzung. Deshalb kann man Satz 5 anwenden und erhält

$$\dim H^1(\tilde{Z}_{1,s}, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_{1,s}}) = d_0 = \dim H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}).$$

Weiter existiert ein kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{Z} \arrow[d] \\ S_1 \arrow[r, "\varphi"] & T \end{tikzcd}$$

mit bis zur ersten Ordnung eindeutig bestimmtem φ. Wegen $T_a = \{t \in T : \dim H^1(\tilde{Z}_t, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_t}) = d_0\}$ gilt $\varphi(S_1) \subset T_a$. Da alle Basisräume reduziert sind, faktorisiert φ über die Inklusion $T_a \hookrightarrow T$, und es ergibt sich

$$\tilde{Z}_1 \cong \tilde{Z}_a \times_{T_a} S_1,$$

woraus $Z_1 = Q(\tilde{Z}_1) \cong Q(\tilde{Z}_a) \times_{T_a} S_1 = Z_a \times_{T_a} S_1$ folgt. q.e.d.

Bezeichnet $\pi: Z \to S$ die *verselle* Deformation von X, so existiert ein weiteres kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z'_a \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_a"'] & Z \arrow[d, "\pi"] \\ T_a \arrow[r, "\varepsilon"] & S. \end{tikzcd}$$

Aus [1] folgt, daß ε im Falle $\dim X = 2$, $\tilde{X}$ minimale Auflösung von X eine *endliche* holomorphe Abbildung ist. Ist X sogar rational, so ist wegen Satz 4 $T_a = T$ und ε bildet T surjektiv auf eine irreduzible Komponente von S ab ([1]).

FRAGE 1. Ist ε stets endlich?

Wenn dies der Fall ist, so kann man $S_a = \varepsilon(T_a)$ mit der reduzierten Struktur versehen, und man erhält mit $\pi_a = \pi \mid \pi^{-1}(S_a)$, $Z_a = \pi^{-1}(S_a)$ ein simultanes Auflösungsdiagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z}_a \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\pi}_a"'] & Z_a \arrow[d, "\pi_a"] \\ T_a \arrow[r, "\varepsilon"] & S_a \end{tikzcd}$$

der Deformation π_a von X.

FRAGE 2. Ist das obige Diagramm versell bzgl. Deformationen von X über reduzierten Basen zusammen mit einer simultanen Auflösung (mit Basiswechsel und spezieller Faser $\tilde{X}$)?

Mit Hilfe von Lemma 2 und Satz 7 kann man sich leicht klarmachen, daß die Frage 2 mit ja zu beantworten ist, falls man folgende Aussage beweisen könnte: Sind $\pi_i: Z_i \to S_i$, $i = 0, 1, 2$, Deformationen einer isolierten Singularität X, ist π_0 versell, sind S_1 und S_2 reduziert, und gibt es eine holomorphe Abbildung $\varphi_0: S_i \to S_0$ und eine endliche surjektive Abbildung $\varphi_1: S_1 \to S_2$ mit $Z_0 \times_{S_0} S_1 \cong Z_1 \cong Z_2 \times_{S_2} S_1$, so existiert eine holomorphe Abbildung $\varphi_2: S_2 \to S_0$ mit $Z_2 \cong Z_0 \times_{S_0} S_2$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_0$.

In [2] konstruierte Brieskorn für die verselle Deformation $\pi : Z \to S$ eines rationalen *Doppelpunktes* X eine simultane Auflösung

$$\begin{array}{ccc} \hat{Z} & \longrightarrow & Z \\ {\scriptstyle \hat{\pi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \hat{T} & \xrightarrow{\varepsilon} & S, \end{array}$$

in der ε sogar eine Galois-Überlagerung ist. Huikeshoven [4] zeigte:

1. Dieses Diagramm ist versell bzgl. auflösbarer Deformationen von X.
2. $\hat{\pi}$ ist versell bzgl. Deformationen der minimalen Auflösung $\tilde{X}$ von X über regulären Basisräumen.

Ersetzt man in Huikeshovens Beweis von 2 das Zitat [8], Theorem 2 durch Satz 4 der vorliegenden Arbeit, so erhält man die Aussage 2 auch für Deformationen mit *reduzierter* Basis. Also stimmt unsere Konstruktion in diesem Fall mit der Brieskornschen überein.

Zum Schluß wollen wir noch zwei *Beispiele* angeben.

1. Es sei $X_{n,q}$ die zweidimensionale normale Singularität mit dem dualen Graphen

$$\overset{-b_1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-b_2}{\bullet}\cdots\overset{-b_{r-1}}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-b_r}{\bullet} \qquad \bullet \cong \mathbf{P}_1(\mathbf{C}),$$

   wobei $n/q = b_1 - \underline{1}/\overline{b_2} - \cdots - \underline{1}/\overline{b_r}$. In diesem Fall ist $T = T_a$ regulär von der Dimension $\sum_{\rho=1}^{r}(b_\rho - 1)$. Die Deformation $Z_a \to S_a$ ist die in [9] konstruierte "spezielle Familie." Ferner ergibt eine einfache Analyse der in [9] angegebenen Gleichungen, daß $\varepsilon : T \to S_a$ eine Galois-Überlagerung ist, deren Gruppe das direkte Produkt derjenigen Weyl-Gruppen ist, die zu den maximalen Konfigurationen von Kurven mit Selbstschnittzahl -2 gehören.
2. Es sei X_b eine einfach elliptische Singularität mit dem dualen Graphen

$$\overset{-b}{\circ}$$

   ($\circ$ = elliptische Kurve, $b \geqslant 1$). Dann ist T regulär von der Dimension $b+1$ und T_a ist regulär von der Dimension 1. In den Fällen $b = 1, 2, 3$ ist $T_a \to S$ eine abgeschlossene Einbettung und S ist regulär von der Dimension 11-b. Insbesondere ist S_a keine irreduzible Komponente von S.

LITERATUR

[1] M. Artin, *Algebraic construction of Brieskorn's resolutions.* J. of Algebra *29*, (1974), 330–348.
[2] E. Brieskorn, *Singular elements of semi-simple algebraic groups.* Actes Congrès intern. Math. Nice 1970. Tome II, 279–284.
[3] D. M. Burns and J. Wahl, *Local contributions to global deformations of surfaces.* Inventiones math. *26*, (1974), 67–88.
[4] F. Huikeshoven, *On the versal resolutions of deformations of rational double points.* Inventiones math. *20*, (1973), 15–33.
[5] K. Knorr, und M. Schneider, *Relativexzeptionelle analytische Mengen.* Math. Ann. *193*, (1971), 238–254.
[6] R. Richberg, *Stetige streng pseudokonvexe Funktionen.* Math. Ann. *175*, (1968), 257–286.
[7] O. Riemenschneider, *Halbstetigkeitssätze für 1-konvexe holomorphe Abbildungen.* Math. Ann. *192*, (1971), 216–226.
[8] ——, *Deformations of rational singularities and their resolutions.* Proc. of the Conf. on Complex Analysis at Rice University 1972. Rice Univ. Studies *59*, (1973), 119–130.
[9] ——, *Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen).* Math. Ann. *209*, (1974), 211–248.
[10] ——, *Bemerkungen zur Deformationstheorie nichtrationaler Singularitäten.* Manuscripta math. *14*, (1974), 91–99.
[11] Y.-T. Siu, *The 1-convex generalization of Grauert's direct image theorem.* Math. Ann. *190*, (1971), 203–214.
[12] ——, *Dimensions of sheaf cohomology groups under holomorphic deformation.* Math. Ann. *192*, (1971), 203–215.

Oswald Riemenschneider
Math. Seminar der Univ.
D-2000 *Hamburg* 13
Bundesstraße 55

Eingegangen den 25. Januar/5. November 1975