Bemerkungen über zwei Beweise von Herrn A. Ostrowski

Autor(en): **Murphy, Brian B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **51 (1976)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-39461

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 39(51) 597–599 Birkhäuser Verlag, Basel

Bemerkungen über zwei Beweise von Herrn A. Ostrowski

BRIAN B. MURPHY

In [1] wurde folgender Entwicklungssatz bewiesen.

SATZ. *Es sei $A=(a_{ij})$ eine quadratische Matrix n-ter Ordnung. Dann ist A_{ij}, das algebraische Komplement von a_{ij} in der Entwicklung von $|A|$, gleich*

$$\sum_{\gamma}(-a_{jk})(-a_{kl})\cdots(-a_{mi})D^{\{\gamma\}}$$

wobei $\gamma=(ijkl\cdots m)$ einen beliebigen Zyklus von der symmetrischen Gruppe $S_{\{1,2,\ldots,n\}}$ darstellt, und $D^{\{\gamma\}}$ die koaxiale Unterdeterminante von A, welche die Reihen und Kolonnen $i, j, k, l, \ldots, m$ nicht enthält, ist.[1]

Dieser Satz erlaubt eine neue Formulierung vom Beweis von Satz IX und einen neuen Beweis von Satz X von Herrn A. Ostrowski ([2], s204, 207). Dieses geschieht in den folgenden Paragraphen.

SATZ IX. *Sei A eine Determinante vom Typus*

$$A=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

wo sämtliche $\alpha_{\mu\nu}\geqslant 0$ und sämtliche koaxiale Unterdeterminanten, ebenso wie die Determinante A, selbst nicht negativ sind. Ist dann eines der Diagonalelemente $\alpha_{\nu\nu}=0$, so verschwindet A und zugleich verschwindet jeder der $n!$ Terme in der Entwicklung der Determinante A.

---

[1] Für die genauere Symbolik verweisen wir auf [1].

Beweis. Da die Behauptung für $n=1$ trivial ist, dürfen wir beim Beweis annehmen, dass der Satz für kleinere Werte von n bereits bewiesen ist.

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir annehmec, dass $\alpha_{11}=0$ ist. Entwicklung der Determinante nach der ersten Reihe ergibt

$$A=\alpha_{11}A_{11}-\alpha_{12}A_{12}-\cdots-\alpha_{1n}A_{1n},$$

wobei das erste Glied rechts verschwindet. Nach Anwendung des Entwicklungssatzes bekommen wir

$$A=-\alpha_{12}\sum_{\gamma}\alpha_{2k}\alpha_{kl}\cdots\alpha_{m1}D^{\{\gamma\}}-\cdots-\alpha_{1n}\sum_{\gamma}\alpha_{nk}\alpha_{kl}\cdots\alpha_{m1}D^{\{\gamma\}}.$$

In dieser Darstellung ist jeder Term auf der rechten Seite nicht positiv, während A selbst nicht negativ ist. Daher müssen sowohl A, als auch die einzelnen Terme rechts, verschwinden.

Es sei l die Länge des Zyklus γ. Dann ist das algebraische Komplement von $D^{\{\gamma\}}$ eine koaxiale Unterdeterminante von A von der Ordnung l. Im Falle $l=n$, ist $D^{\{\gamma\}}=1$ und daher muss der entsprechende Vorfaktor in der obigen Entwicklung verschwinden, da sonst $A=0$ unmöglich wäre. Im Falle $l<n$ ist das erwähnte Komplement eine koaxiale Unterdeterminante von A von einer ordnung $<n$, mit α_{11} auf der Hauptdiagonale. Der Satz IX darf also auf diese Unterdeterminante angewandt werden. Daraus schliesst man wieder, dass der Vorfaktor von $D^{\{\gamma\}}$ verschwindet. Damit ist der Satz IX völlig bewiesen.

Im nächsten Satz bedeutet E die Einheitsmatrix n-ter Ordnung, und 'eigentliche M-matrix' eine Matrix mit positiven Diagonalelementen, positiver Determinante, nicht negativen Hauptminoren, und lauter nicht positiven Elementen ausserhalb der Hauptdiagonale.

SATZ X. *Es sei A eine reelle $(n\times n)$-Matrix mit der Eigenschaft, dass sowohl A^{-1} als auch $(A+\lambda E)^{-1}$ für alle hinreichend grossen λ lauter nicht negative Elemente hat. Dann ist A eine eigentliche M-matrix.*

Beweis. Nach dem Hilfssatz H von Herrn Ostrowski [2, s206], genügt es zu beweisen, dass alle Elemente von A ausserhalb der Hauptdiagonale $\leqslant 0$ sind. Das ist der eigentliche Zweck der folgenden Überlegungen.

Es sei λ_0 mindestens so gross, dass $|A+\lambda E|$ und alle koaxialen Unterdeterminanten von $A+\lambda E$ positiv für $\lambda\geqslant\lambda_0$ sind. Um zu zeigen, z.B., dass $\alpha_{12}\leqslant 0$ ist, beachte man, dass das algebraische Komplement von α_{21} in $|A+\lambda E|$ nicht negativ

sein kann. Anwendung vom Entwicklungssatz auf die Matrix $A+\lambda E$ ergibt[2]

$$(A+\lambda E)_{2,1} = -a_{12}D^{\{1,2\}} + O(\lambda^{n-3})$$

wobei der erste Term rechts $O(\lambda^{n-2})$ ist. Diese Gleichung liefert für $\lambda \to \infty$

$$-a_{12}D^{\{1,2\}} \geqslant 0$$

woraus $a_{12} \leqslant 0$ folgt, weil $D^{\{1,2\}} > 0$ für $\lambda \geqslant \lambda_0$ ist. Damit ist der Satz X auch bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] MURPHY, B.: *Expansion of* $(n-1)$*-Rowed Subdeterminants.* Math. Z. *147* (1976) 205.
[2] OSTROWSKI, A.: *Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen.* Commentarii math. Helvet. *30* (1956) 175–210.

Corporate Research Unit
Mail Code 1804
Blue Cross Blue Shield of Michigan
600 *East Lafayette*
Detroit, Mich. 48226
U.S.A.

Eingegangen den 28. Mai 1976

[2] Diese Formel folgt auch wenn man den Kofaktor $(A+\lambda E)_{j,i}$ nach der i-ten Reihe entwickelt.