Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 52 (1977)

Artikel: Ueber das quadratische Mittel der Riemannschen Zetafunktion auf der kritischen Linie.

Autor: Good, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39986

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

C.M.H.—80116

Comment. Math. Helvetici **52** (1977) 35–48 Birkhäuser Verlag, Basel

Ueber das quadratische Mittel der Riemannschen Zetafunktion auf der kritischen Linie

A. Good

1. Einleitung

Kürzlich bewies R. Balasubramanian [1], [2] für die Riemannsche Zetafunktion ζ den folgenden Mittelwertsatz

$$\int_1^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2\,dt = T\log T-(1+\log 2\pi-2\gamma)T+O(T^\alpha), \qquad T\to\infty, \tag{1}$$

wobei γ die Eulerkonstante bezeichnet und $\alpha>\frac{27}{82}$ ist. Dazu zeigte er zuerst, dass

$$\int_1^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2\,dt = T\log T-(1+\log 2\pi-2\gamma)T+4(W_1+W_2)+O(\log^2 T), \qquad T\to\infty, \tag{2}$$

ist, wenn W_1 und W_2 mit Hilfe von $K=[(T/2\pi)^{1/2}]$ wie folgt definiert sind:

$$W_1=\sum_{m=1}^{K}\sum_{n<m}\frac{\sin\left(T\log\frac{m}{n}\right)}{(mn)^{1/2}\log\frac{m}{n}},$$

$$W_2=\sum_{m=1}^{K}\sum_{n<m}\frac{\sin(\theta(T)-T\log mn)}{(mn)^{1/2}(\theta'(T)-\log mn)},$$

$$\theta(t)=-\arg\left(\pi^{it}\frac{\Gamma(\frac{1}{4}-it/2)}{\Gamma(\frac{1}{4}+it/2)}\right), \qquad \theta'(t)=\frac{d\theta}{dt}(t).$$

Hiefür benutzte er die asymptotische Entwicklung der Approximation von ζ durch Partialsummen, die Siegel [4] in einer Bearbeitung von Riemanns Nachlass bewiesen hat. Ersetzt man ζ auf der linken Seite von (2) durch diese Entwicklung und multipliziert aus, so hatte Balasubramanian vorerst in umfangreichen Rechnungen (etwa 40 Seiten) nachzuweisen, dass viele der auftretenden Terme entweder klein sind oder sich gegenseitig wegheben.

Wir wollen hier zeigen, dass ein Resultat, das (2) in Bezug auf Anwendungen (z.B. für den Beweis von (1)) entspricht, ziemlich rasch bewiesen werden kann. Dazu verwenden wir eine Art asymptotischer Approximation von ζ durch gewichtete Partialsummen. In [3] wurden solche Approximationen für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind, bewiesen. Ein entsprechendes Resultat ist auch für ζ gültig (siehe Satz 1). Benutzt man nun dieses Ergebnis auf der linken Seite von (2), so erscheinen auf der rechten Seite anstelle von W_1, W_2 gewichtete Formen von W_1, W_2 und $O(\log^2 T)$ kann zu $O(1)$ verbessert werden (siehe Satz 2). Begnügt man sich schon mit dem O-Term in (2), so lässt sich der Beweis von Satz 2 weiter verkürzen (siehe die Bemerkung nach dem Beweis von Satz 2).

An dieser Stelle möchte ich Prof. K. Chandrasekharan dafür danken, dass er mich in Balasubramanians Preprints Einsicht nehmen liess und mich zur Niederschrift dieser Arbeit anregte.

2. Eine approximative Funktionalgleichung für die Riemannsche Zetafunktion

Zur Formulierung des Resultates führen wir folgende Definitionen ein: Sei $\mathfrak{K}$ die Menge der C^∞-Funktionen φ auf $[0, \infty]$, für welche

$$\varphi(\rho) = 1, \quad \text{wenn} \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \tfrac{1}{2},$$

und

$$\varphi(\rho) = 0, \quad \text{wenn} \quad \rho \geqslant 2,$$

ist. Durch

$$\varphi_0(\rho) = 1 - \varphi(1/\rho), \qquad \rho \geqslant 0, \tag{3}$$

wird eine Funktion φ_0 definiert, die ebenfalls zu $\mathfrak{K}$ gehört. Ist φ aus $\mathfrak{K}$ und $z = x + iy$ komplex, so setzen wir

$$\varphi^{(j)}(\rho) = \frac{d^j \varphi}{d\rho^j}(\rho), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\|\varphi^{(j)}\| = \int_0^\infty |\varphi^{(j)}(\rho)|\, d\rho,$$

und

$$K(z, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(\rho) \rho^{z-1}\, d\rho, \qquad x > 0. \tag{4}$$

Ist $\lambda > 0$ und $s = \sigma + it$ komplex, so definieren wir

$$\omega(s) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ \exp\left(-\dfrac{i\pi t}{4|t|}\right), & t \neq 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$G(s; \lambda, \varphi) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s/2)} \int_{(3/2-\sigma)} \Gamma\left(\frac{s+z}{2}\right) \zeta(s+z) K(z, \varphi) (\lambda \pi^{-1/2} \omega(s))^z \, dz \tag{6}$$

und

$$\gamma_j(s; \lambda) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s/2)} \int_{\mathfrak{F}_j} \Gamma\left(\frac{s+z}{2}\right) \frac{(\lambda \omega(s))^z}{z(z+1)\cdots(z+j)} \, dz, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

wobei $\int_{(x)}$ in (6) die Integration über den Weg $z = x + iy$, $-\infty < y < \infty$, y wachsend, und $\mathfrak{F}_j$ in (7) eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve bezeichnet, die von den Polen des Integranden genau die Punkte $z = 0, -1, \ldots, -j$ umschliesst.

Mit der Methode aus [3] lässt sich dann folgendes beweisen:

SATZ 1. *Sind φ und φ_0 aus $\mathfrak{K}$ durch* (3) *miteinander verknüpft, so gilt für $\lambda > 0$:*

(i) *ζ lässt sich darstellen als*

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)G(s; \lambda, \varphi) + \pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)G(1-s; 1/\lambda, \varphi_0)$$
$$+ K(-s, \varphi)(\lambda\omega(s))^{-s} - K(1-s, \varphi)(\lambda\omega(s))^{1-s}.$$

(ii) *Wenn $\mu = \lambda(|t|/2\pi)^{1/2}$ ist, besitzt G für $l \geq 1$ die Entwicklungen*

$$G(s; \lambda, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \left\{ \sum_{j=0}^{l} \varphi^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j \gamma_j\left(s, \left(\frac{2}{|t|}\right)^{1/2}\right) \right\}$$
$$+ O(\|\varphi^{(l+1)}\| \, \mu^{1-\sigma} |t|^{-l/2}), \qquad |t| \to \infty,$$

gleichmässig für $0 \leq \sigma \leq 1$ und φ aus $\mathfrak{K}$.

(iii) *Es ist für $\tau = (2/|t|)^{1/2}$*

$$\gamma_0(s, \lambda) \equiv 1, \qquad \gamma_1(s, \tau) = (\tfrac{3}{2} - \sigma)\frac{i}{2t} + O(|t|^{-2}),$$

$$\gamma_2(s, \tau) = -\frac{i}{4t} + O(|t|^{-2}), \qquad \gamma_3(s, \tau) = O(|t|^{-2}), \qquad |t| \to \infty,$$

und für $j>3$

$$\gamma_j(s,\tau)=O(|t|^{-j/2}),\qquad |t|\to\infty, \tag{8}$$

gleichmässig für $0\leqslant\sigma\leqslant 1$.

Bemerkungen zum Beweis von Satz 1. Ersetzt man die Funktionen G und γ_j in [3] durch die in (6) und (7) definierten Funktionen, so lässt sich der Beweis von [3] praktisch wörtlich übertragen.

Der 3. und 4. Term auf der rechten Seite von (i), welche hier zusätzlich auftreten, sind die Residuen des Integranden von $G(s;\lambda,\varphi)$ bei $z=-s$ und $z=1-s$. Da diese Terme für jedes $A>0$ von der Ordnung $O(e^{-\pi|t|/4}|t|^{-A}(1+\lambda)\lambda^{-\sigma})$, $|t|\to\infty$, sind, spielen sie im folgenden keine Rolle.

Auf die Relation $\mu=\lambda(|t|/2\pi)^{1/2}$ in (ii) wird man durch Stirlings Formel geführt. Wie in [3] Lemma 4(i) lassen sich die Abschätzungen (8) für jedes $j\geqslant 1$ beweisen. Im Beweis von Satz 2 brauchen wir aber noch eine genauere Kenntnis von γ_1, γ_2 und γ_3. Ausgedrückt als Summe von Residuen ergibt sich nach (7)

$$\gamma_1(s,\lambda)=1-\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma(s/2)}(\lambda\omega(s))^{-1},$$

$$\gamma_2(s,\lambda)=\frac{1}{2}-\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma(s/2)}(\lambda\omega(s))^{-1}+\frac{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}{2\Gamma(s/2)}(\lambda\omega(s))^{-2}=\gamma_1(s,\lambda)-\frac{1}{2}+\frac{(\lambda\omega(s))^{-2}}{s-2},$$

$$\gamma_3(s,\lambda)=\frac{1}{6}-\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{2\Gamma(s/2)}(\lambda\omega(s))^{-1}+\frac{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}{2\Gamma(s/2)}(\lambda\omega(s))^{-2}-\frac{\Gamma\left(\frac{s-3}{2}\right)}{6\Gamma(s/2)}(\lambda\omega(s))^{-3}$$

$$=\gamma_1(s,\lambda)\left(\frac{1}{2}+\frac{(\lambda\omega(s))^{-2}}{3(s-3)}\right)-\frac{1}{3}+(\lambda\omega(s))^{-2}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{3(s-3)}\right).$$

Mit der Formel

$$\Gamma(s)=(2\pi)^{1/2}|t|^{\sigma-1/2}\exp\left\{-\frac{\pi}{2}|t|+i\left(t\log|t|-t+\frac{\pi t}{2|t|}(\sigma-\tfrac{1}{2})\right)\right\}$$
$$\times\left(1+\frac{i}{2t}(\sigma-\sigma^2-\tfrac{1}{6})+O(|t|^{-2})\right), \tag{9}$$

gleichmässig für $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, wenn $|t| \to \infty$ strebt, erhält man also nach (5)

$$\gamma_1(s,\tau) = 1 - \left(\frac{2}{|t|}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{i\pi t}{4|t|}\right\}\left(1 + \frac{i}{2t}(\tfrac{3}{2}-\sigma) + O(|t|^{-2})\right)\left(\frac{|t|}{2}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{i\pi t}{4|t|}\right\}$$
$$= \frac{i}{2t}(\tfrac{3}{2}-\sigma) + O(|t|^{-2}),$$

$$\gamma_2(s,\tau) = \frac{i}{2t}(\tfrac{3}{2}-\sigma) - \frac{1}{2} + \frac{it}{2(s-2)} + O(|t|^{-2}) = -\frac{i}{4t} + O(|t|^{-2}),$$

$$\gamma_3(s,\tau) = \frac{i}{2t}(\tfrac{3}{2}-\sigma)\left(\frac{1}{2} + \frac{it}{6(s-3)}\right) - \frac{1}{3} + \frac{it}{2}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3(s-3)}\right) + O(|t|^{-2}) = O(|t|^{-2}).$$

Aus Satz 1 ergibt sich das

KOROLLAR. *Ist* $\mu = (|t|/2\pi)^{1/2}$, $\tau = (2/|t|)^{1/2}$ *und* $l \geqslant 1$, *so gilt*
(i) *für jedes feste* φ *aus* $\mathfrak{K}$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\left\{\sum_{j=0}^{l} \varphi^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j \gamma_j(s,\tau)\right\} + \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma(s/2)}$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}\left\{\sum_{j=0}^{l} \varphi_0^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j \gamma_j(1-s,\tau)\right\} + O(|t|^{(1-\sigma-l)/2}), \qquad |t| \to \infty,$$

(ii) *für jedes Paar* ψ, $\tilde{\psi}$ *von* C^∞*-Funktionen, die ausserhalb des Intervalls* $[\frac{1}{2}, 2]$ *verschwinden und durch*

$$\tilde{\psi}(\rho) = \psi(1/\rho), \qquad \rho \geqslant 0,$$

miteinander verknüpft sind,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\left\{\sum_{j=0}^{l} \psi^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j \gamma_j(s,\tau)\right\} = \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma(s/2)}$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}\left\{\sum_{j=0}^{l} \tilde{\psi}^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j \gamma_j(1-s,\tau)\right\} + O(|t|^{(1-\sigma-l)/2}), \qquad |t| \to \infty,$$

gleichmässig für $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Bemerkung. Da $\varphi - \psi$ ebenfalls zu $\mathfrak{K}$ gehört, ergibt sich Korollar (ii) aus (i) durch Substraktion.

3. Das quadratische Mittel von ζ auf der kritischen Linie

Sei jetzt φ eine reellwertige Funktion aus $\mathfrak{R}$, die den Bedingungen

$$\begin{aligned} &\varphi(\rho)=1, \quad \text{für} \quad \rho\leqslant\tfrac{2}{3},\\ &\varphi(\rho)=0, \quad \text{für} \quad \rho\geqslant\tfrac{3}{2}, \end{aligned} \tag{10}$$

genügt. Mit φ erfüllt auch φ_0 diese Bedingungen. Wir wählen nun reellwertige C^∞-Funktionen ψ_j, ψ_{0j}, $j=1, 2$, auf $[0,\infty)$ so, dass gilt

$$\begin{aligned} &\varphi=\psi_1+\psi_2, \qquad \varphi_0=\psi_{01}+\psi_{02},\\ &\psi_1(\rho)=\psi_{01}(\rho)=0, \quad \text{für} \quad \rho\geqslant\tfrac{2}{3},\\ &\psi_2(\rho)=\psi_{02}(\rho)=0, \quad \text{für} \quad \rho\leqslant\tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Mit diesen Bezeichnungen zeigen wir den folgenden

SATZ 2. *Ist γ die Eulerkonstante und $M=(T/2\pi)^{1/2}$ so gilt*

$$\begin{aligned} \int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2\,dt &= T\log T+(2\gamma-1-\log 2\pi)T\\ &+\sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{(m/n)^{iT}}{i(mn)^{1/2}\log\dfrac{m}{n}}\,\Phi\left(\frac{m}{M},\frac{n}{M}\right)\\ &+2\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+T+T\log\left(\dfrac{mn}{M^2}\right)\right)}{(mn)^{1/2}\log\left(\dfrac{mn}{M^2}\right)}\,\psi_1\left(\frac{m}{M}\right)\psi_{01}\left(\frac{n}{M}\right)+O(1), \qquad T\to\infty, \end{aligned}$$

wobei Φ durch

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda,\rho)=\varphi(\lambda)\varphi(\rho)+\varphi_0(\lambda)\varphi_0(\rho)+\tilde{\psi}_{02}(\lambda)\varphi(\rho)+\varphi_0(\lambda)\tilde{\psi}_2(\rho)\\ +\tilde{\psi}_2(\lambda)\psi_{01}(\rho)+\psi_1(\lambda)\tilde{\psi}_{02}(\rho), \qquad \lambda\geqslant 0, \qquad \rho\geqslant 0, \end{aligned}$$

definiert ist.

Zunächst beweisen wir das

LEMMA. *Seien m, n, δ positiv, $\lambda\geqslant 0$, $\mu=(|t|/2\pi)^{1/2}$ und $M=(T/2\pi)^{1/2}$. Sind g_1, g_2 zwei C^∞-Funktionen auf $[0,\infty)$ mit $g_j(\rho)=0$, $j=1, 2$, für $\rho\geqslant\delta$, so gilt*

(i)

$$\int_0^T \left| g_1\left(\frac{n}{\mu}\right) g_2\left(\frac{m}{\mu}\right) \right| t^{-\lambda}\, dt = \begin{cases} 0, & \textit{falls} \quad n \geqslant \delta M \quad \textit{oder} \quad m \geqslant \delta M, \\ O((mn)^{1-\lambda}), & \textit{falls} \quad \lambda > 1, \end{cases}$$

(ii) *für* $m,\ n \leqslant \delta M,\ m \neq n$

$$\int_0^T \left(\frac{m}{n}\right)^{it} g_1\left(\frac{n}{\mu}\right) g_2\left(\frac{m}{\mu}\right) t^{-\lambda}\, dt$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{iT}}{i \log \frac{m}{n}} g_1\left(\frac{n}{M}\right) g_2\left(\frac{m}{M}\right) T^{-\lambda} + O\left(T^{-1-\lambda}\left(\log \frac{m}{n}\right)^{-2}\right) + O\left((mn)^{-2-\lambda} \left| \log \frac{m}{n} \right|^{-3}\right),$$

(iii) *für* $m,\ n \leqslant \delta M,\ \delta < 1$

$$\int_0^T (\pi mn)^{it} \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} - it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} + it}{2}\right)} g_1\left(\frac{n}{\mu}\right) g_2\left(\frac{m}{\mu}\right) t^{-\lambda}\, dt = \frac{e^{i\beta(T)}}{iT^{\lambda}\beta'(T)} g_1\left(\frac{n}{M}\right) g_2\left(\frac{m}{M}\right) + O((mn)^{-\lambda-1}),$$

wobei

$$\beta(t) = \frac{\pi}{4} + t\left(1 + \log\left(\frac{mn}{\mu^2}\right)\right) \quad \textit{und} \quad \beta'(t) = \frac{d\beta}{dt}(t)$$

ist.

Beweis. Da $g_j(n/\mu)$ verschwindet, sobald $\mu \leqslant n/\delta$ ist, folgt (i) sofort. Definieren wir χ_0 durch

$$\chi_0(t) = g_1(n/\mu) g_2(m/\mu) t^{-\lambda},$$

so ergeben mehrere partielle Integrationen

$$\int_0^T \left(\frac{m}{n}\right)^{it} \chi_0(t)\, dt = \frac{(m/n)^{iT}}{i \log \frac{m}{n}} \left(\chi_0(T) - \frac{\chi_0^{(1)}(T)}{i \log \frac{m}{n}} - \frac{\chi_0^{(2)}(T)}{\left(\log \frac{m}{n}\right)^2} \right)$$

$$+ \frac{1}{i\left(\log \frac{m}{n}\right)^3} \int_0^T \left(\frac{m}{n}\right)^{it} \chi_0^{(3)}(t)\, dt. \quad (12)$$

Wegen

$$g_1\left(\frac{n}{\mu}\right)g_2\left(\frac{m}{\mu}\right)=0, \quad \text{für} \quad |t|\leqslant\frac{2\pi}{\delta^2}mn\leqslant\frac{2\pi}{\delta^2}\max(m^2, n^2),$$

und

$$|\chi_0^{(j)}(t)|=O(|t|^{-\lambda-j}), \qquad |t|\to\infty, \qquad j=1,2,3,$$

folgt nun (ii) aus (12) und (i).

Stirlings Formel (9) liefert

$$(\pi mn)^{it}\frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)}=e^{i\beta(t)}\left(1-\frac{i}{24t}+O(|t|^{-2})\right), \qquad |t|\to\infty.$$

Wegen

$$\beta'(t)=\log\left(\frac{2\pi mn}{t}\right)=\log\left(\frac{mn}{\mu^2}\right), \qquad t>0,$$

gilt also

$$|\beta'(t)|\geqslant 2\log(1/\delta)>0,$$

falls $g_1(n/\mu)g_2(m/\mu)\neq 0$ ist. Setzen wir

$$\chi_{j+1}(t)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\chi_j(t)}{\beta'(t)}\right\}, \qquad j=0,1,\ldots,$$

so erhält man nach mehreren partiellen Integrationen

$$\int_0^T e^{i\beta(t)}\chi_0(t)\,dt=\frac{e^{i\beta(T)}}{\beta'(T)}(-i\chi_0(T)+\chi_1(T))-\int_0^T e^{i\beta(t)}\chi_2(t)\,dt.$$

Wegen

$$\chi_0(t)=0, \quad \text{für} \quad t\leqslant\frac{2\pi}{\delta^2}mn$$

und

$$\chi_j(t)=O(|t|^{-\lambda-j}), \qquad |t|\to\infty, \qquad j=1,2,\ldots,$$

folgt nun (iii) aus (13), (14) und (i).

Beweis von Satz 2. Sei wieder $\mu = (|t|/2\pi)^{1/2}$ und $\tau = (2/|t|)^{1/2}$. Mit Hilfe der Funktionen ψ_l, ψ_{0l}, $l = 1, 2$, aus (11) definieren wir

$$f_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2-it} \sum_{j=0}^{3} \psi_k^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j \gamma_j(\tfrac{1}{2}+it, \tau), \qquad k = 1, 2,$$

$$f_k(t) = \pi^{it} \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+it}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2+it} \sum_{j=0}^{3} \psi_{0,k-2}^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j \gamma_j(\tfrac{1}{2}-it, \tau), \qquad k = 3, 4,$$

und

13) $$f_5(t) = \zeta(\tfrac{1}{2}+it) - \sum_{k=1}^{4} f_k(t).$$

Nach Korollar (i), (10) und (11) ist dann

$$f_5(t) = O(|t|^{-5/4}), \qquad |t| \to \infty. \tag{15}$$

Wir schreiben

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2\, dt = \sum_{\kappa,\nu=1}^{5} \Lambda_{\kappa\nu},$$

wobei $\Lambda_{\kappa\nu}$ durch

$$\Lambda_{\kappa\nu} = \int_0^T f_\kappa(t)\bar{f}_\nu(t)\, dt, \qquad \kappa, \nu = 1, \ldots, 5,$$

gegeben ist. Mit diesen Definitionen erhalten wir

14) $$\sum_{\kappa,\nu=1}^{2} \Lambda_{\kappa\nu} = \Sigma_1 + \sum_{m \neq n} (mn)^{-1/2} \int_0^T \left(\frac{m}{n}\right)^{it} \times \sum_{j,l=0}^{3} \varphi^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j \gamma_j(\tfrac{1}{2}+it, \tau)\varphi^{(l)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^l \bar{\gamma}_l(\tfrac{1}{2}+it, \tau)\, dt,$$

wobei Σ_1 die Summe über alle Diagonalterme $m = n$ bezeichnet:

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^T \sum_{j,l=0}^{3} \varphi^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j \gamma_j(\tfrac{1}{2}+it, \tau)\varphi^{(l)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^l \bar{\gamma}_l(\tfrac{1}{2}+it, \tau)\, dt. \tag{16}$$

Somit ergibt sich aus Satz 1(iii) und Lemma (i) (ii) mit $M=(T/2\pi)^{1/2}$

$$\sum_{\kappa,\nu=1}^{2} \Lambda_{\kappa\nu} = \Sigma_1 + \sum_{m\neq n} \frac{(m/n)^{iT}}{i\log\frac{m}{n}} \varphi\left(\frac{m}{M}\right)\varphi\left(\frac{n}{M}\right)(mn)^{-1/2} + O(1), \qquad T\to\infty, \tag{17}$$

wenn man in gewohnter Weise

$$\left|\log\frac{m}{n}\right|^{-1} \leq 1 + \frac{(mn)^{1/2}}{|m-n|}, \qquad m\neq n$$

zur Abschätzung der Doppelsummen benützt. In gleicher Weise erhält man auch

$$\sum_{\kappa,\nu=3}^{4} \Lambda_{\kappa\nu} = \Sigma_2 + \sum_{m\neq n} \frac{(m/n)^{iT}}{i\log\frac{m}{n}} \varphi_0\left(\frac{m}{M}\right)\varphi_0\left(\frac{n}{M}\right)(mn)^{-1/2} + O(1), \qquad T\to\infty, \tag{18}$$

wobei

$$\Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\int_0^T \sum_{j,l=0}^{3} \varphi_0^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j \gamma_j(\tfrac{1}{2}-it,\tau)\varphi_0^{(l)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^l \bar{\gamma}_l(\tfrac{1}{2}-it,\tau)\,dt \tag{19}$$

ist. Analog ergibt sich mit Satz 1(iii) und Lemma (i), (ii)

$$\Lambda_{13}+\Lambda_{31} = 2\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+T\left(1+\log\left(\frac{mn}{M^2}\right)\right)\right)}{(mn)^{1/2}\log\left(\frac{mn}{M^2}\right)} \psi_1\left(\frac{n}{M}\right)\psi_{01}\left(\frac{m}{M}\right) + O(1), \qquad T\to\infty. \tag{20}$$

Weiter ist

$$\sum_{\kappa=1}^{5} (\Lambda_{\kappa 5}+\Lambda_{5\kappa}) = O(1), \tag{21}$$

denn mit (15), der Schwarzschen Ungleichung und Lemma (i) (ii) erhält man z.B.

$$|\Lambda_{15}|^2 = O\left(\int_0^T |f_1(t)|^2\, t^{-5/4}\,dt \int_0^T |f_5(t)|\,dt\right) = O(1), \qquad T\to\infty. \tag{22}$$

Benutzen wir nun Korollar (ii), so folgt wie in (17) und (22), dass

$$\Lambda_{14}+\Lambda_{24}=\Sigma_3+\sum_{m\neq n}(mn)^{-1/2}\int_0^T\left(\frac{m}{n}\right)^{it}$$

$$\times\sum_{j,l=0}^{3}\varphi^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j\gamma_j(\tfrac{1}{2}+it,\tau)\tilde{\psi}_{02}^{(l)}\left(\frac{m}{\mu}\right)\left(-\frac{m}{\mu}\right)^l\bar{\gamma}_l(\tfrac{1}{2}+it,\tau)\,dt+O(1)$$

$$=\Sigma_3+\sum_{m\neq n}\frac{(m/n)^{iT}}{i\log\frac{m}{n}}\varphi\left(\frac{n}{M}\right)\tilde{\psi}_{02}\left(\frac{m}{M}\right)(mn)^{-1/2}+O(1),\qquad T\to\infty,\tag{23}$$

wenn Σ_3 durch die rechte Seite von (16) mit $\tilde{\psi}_{02}^{(l)}$ anstelle von $\varphi^{(l)}$ definiert wird. Wird Σ_4 durch die rechte Seite von (19) mit $\tilde{\psi}_2^{(l)}$ anstelle von $\varphi_0^{(l)}$ definiert, so ergibt sich mit Korollar (ii) auch

$$\Lambda_{32}+\Lambda_{42}=\Sigma_4+\sum_{m\neq n}\frac{(m/n)^{iT}}{i\log\frac{m}{n}}\varphi_0\left(\frac{m}{M}\right)\tilde{\psi}_2\left(\frac{n}{M}\right)(mn)^{-1/2}+O(1),\qquad T\to\infty,\tag{24}$$

$$\Lambda_{23}+\Lambda_{41}=\sum_{m\neq n}(mn)^{-1/2}\frac{(m/n)^{iT}}{i\log\frac{m}{n}}\left\{\tilde{\psi}_2\left(\frac{m}{M}\right)\psi_{01}\left(\frac{n}{M}\right)+\psi_1\left(\frac{m}{M}\right)\tilde{\psi}_{02}\left(\frac{n}{M}\right)\right\}+O(1),\tag{25}$$

$$T\to\infty.$$

Denn in Λ_{23} und Λ_{41} verschwinden die Diagonalterme $m=n$, da nach (10), (11)

$$\tilde{\psi}_2(\rho)\psi_{01}(\rho)\equiv 0,$$
$$\psi_1(\rho)\tilde{\psi}_{02}(\rho)\equiv 0$$

ist. Nach (17), (18), (20), (21), (23–25) ist Satz 2 bewiesen, wenn wir noch zeigen, dass

$$\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4=T\log T+(2\gamma-1-\log 2\pi)T+O(1),\qquad T\to\infty,$$

ist.

Nun ist

$$\varphi(\rho)\tilde{\psi}_{02}(\rho)=0$$

und

$$\varphi_0(\rho)\tilde{\psi}_2(\rho)=0,$$

wenn ρ nicht im Intervall $[\frac{2}{3},\frac{3}{2}]$ liegt, während für $\frac{2}{3}\leq\rho\leq\frac{3}{2}$ gilt

$$\tilde{\psi}_{02}(\rho)=\psi_{02}(1/\rho)=\varphi_0(1/\rho)=1-\varphi(\rho)$$

und

$$\tilde{\psi}_2(\rho)=1-\varphi_0(\rho).$$

Somit ergibt sich nach (16), (19), (23) und (24)

$$\begin{aligned}\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^T\sum_{j=0}^{3}\varphi^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j\gamma_j(\tfrac{1}{2}+it,\tau)\,dt\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^T\sum_{j=0}^{3}\varphi_0^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j\gamma_j(\tfrac{1}{2}-it,\tau)\,dt.\end{aligned}\tag{26}$$

Nach (4) ist für $z=x+iy$ und $j=0,1,\ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\varphi^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j=\frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_{(x)}\zeta(z+1)K(z+j,\varphi^{(j)})\mu^z\,dz,\qquad x>0.\tag{27}$$

Der Integrand auf der rechten Seite von (27) ist bis auf einen Pol bei $z=0$ analytisch. Für jedes j und $\lambda>0$ gilt ferner

$$K(z+j,\varphi^{(j)})=O(|y|^{-\lambda}),\qquad |y|\to\infty,$$

gleichmässig für x aus einem beschränkten Intervall. Also erhalten wir mit dem Satz von Cauchy

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\varphi^{(j)}\left(\frac{n}{\mu}\right)\left(-\frac{n}{\mu}\right)^j&=R_j(\mu)+\frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_{(-5/2)}\zeta(z+1)K(z+j,\varphi^{(j)})\mu^z\,dz\\&=R_j(\mu)+O(\mu^{-5/2})=R_j(\mu)+O(|t|^{-5/4}),\qquad |t|\to\infty,\end{aligned}\tag{28}$$

wobei $R_j(\mu)$ das entsprechende Residuum bei $z=0$ bezeichnet. Um $z=0$ gelten die Laurententwicklungen

$$\mu^z=1+z\log\mu+z^2(\cdots),$$

$$\zeta(z+1)=\frac{1}{z}+\gamma+z(\cdots),$$

$$K(z,\varphi)=-\frac{1}{z}\int_0^\infty \varphi^{(1)}(\rho)\rho^z\,d\rho=-\frac{1}{z}\int_0^\infty \varphi^{(1)}(\rho)\,d\rho-\int_0^\infty \varphi^{(1)}(\rho)\log\rho\,d\rho+z(\cdots),$$

$$(-1)^jK(z+j,\varphi^{(j)})=(-1)^j\int_0^\infty \varphi^{(j)}(\rho)\rho^{j-1}\,d\rho+z(\cdots),\quad \text{für}\quad j\geqslant 1.$$

Weil

$$(-1)^j\int_0^\infty \varphi^{(j)}(\rho)\rho^{j-1}\,d\rho=\Gamma(j),\qquad j=1,2,\ldots,$$

ist, ergibt sich somit

$$R_j(\mu)=\begin{cases}\log\mu+\gamma-\displaystyle\int_0^\infty \varphi^{(1)}(\rho)\log\rho\,d\rho, & j=0,\\ \Gamma(j), & j\geqslant 1.\end{cases}$$

Folglich erhalten wir aus (26), (28) und Satz 1(iii)

$$\begin{aligned}\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4&=\int_0^T\left\{2\log\mu+2\gamma-\int_0^\infty(\varphi^{(1)}(\rho)+\varphi_0^{(1)}(\rho))\log\rho\,d\rho\right\}dt\\&\quad+\sum_{j=1}^3\Gamma(j)\int_0^T(\gamma_j(\tfrac12+it,\tau)+\gamma_j(\tfrac12-it,\tau))\,dt+O(1)\\&=T\log T+(2\gamma-1-\log 2\pi)T+O(1),\ T\to\infty,\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi^{(1)}(\rho)\log\rho\,d\rho&=\int_0^\infty \varphi^{(1)}\left(\frac{1}{\rho}\right)\log\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{d\rho}{\rho^2}\\&=-\int_0^\infty \varphi^{(1)}\left(\frac{1}{\rho}\right)\rho^{-2}\log\rho\,d\rho=-\int_0^\infty \varphi_0^{(1)}(\rho)\log\rho\,d\rho\end{aligned}$$

ist. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bemerkung. Einen Restterm $O(\log^2 T)$ erhält man in Satz 2 schon, wenn man in den $\Lambda_{x\nu}$, $1\leqslant x$, $\nu\leqslant 4$ die Doppelsumme über j und l mit dem Integral vertauscht und alle Summanden mit $j+l\geqslant 1$ unter Benützung der Schwarzschen Ungleichung wie in (22) abschätzt. Dazu braucht man lediglich

$$\gamma_1(s,\tau)=O(|t|^{-1}),\quad \text{für}\quad j>1\qquad \gamma_j(s,\tau)=O(|t|^{-j/2}),\qquad |t|\to\infty,$$

und eine schwächere Form des Hilfssatzes.

LITERATUR

[1] R. Balasubramanian, *An improvement of a Theorem of Titchmarsh on the mean square of* $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ *– I.* Preprint.
[2] ——, *On a Theorem of Titchmarsh on the mean square of* $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ *– II.* Preprint.
[3] A. Good, *Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind,* Comment. Math. Helv. *50* (1975), 327–361.
[4] C. L. Siegel, *Ueber Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik,* Astronomie und Physik *2* (1932).

School of Mathematics,
Institute for Advanced Study,
Princeton, N.J. 08540,
U.S.A.

Eingegangen den 30 Juli 1976.