Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 57 (1982)

Artikel: Die Resolvente von ... Auf symmetrischen Räumen vom nichtkompakten Typ.

Autor: Lohoué, Noel / Rychener, Thomas

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43895

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 57 (1982) 445–468 0010-2571/82/003445-24$01.50 + 0.20/0
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

Die Resolvente von Δ auf symmetrischen Räumen vom nichtkompakten Typ

NOEL LOHOUÉ UND THOMAS RYCHENER*

Es sei X ein symmetrischer Raum vom nichtkompakten Typ und Δ der zugehörige Laplace–Beltrami Operator. Ein Hauptgegenstand der harmonischen Analysis auf X ist die Zerlegung der quasiregulären Darstellung von G in irreduzible Darstellungen. Da Δ mit der Wirkung der Gruppe vertauschbar ist, läuft dies auf das Studium des Spektrums von Δ bzw. seiner Resolvente R_z hinaus.

Wir untersuchen hier Abbildungseigenschaften von R_z in L^p-Räumen; unter gewissen Einschränkungen an X bestimmen wir diejenigen z, für die R_z eine beschränkte Transformation von $L^p(X)$ ist. Dies führt uns zur Wärmeleitungsgleichung auf X, die in vielen Arbeiten eine Rolle spielt (siehe z.B. [2, 3, 4, 13, 14, 15, 16, 17] und die dortigen Literaturhinweise).

Im Falle eines symmetrischen Raumes von beliebigem endlichem Rang ermitteln wir alle reelen σ, für die R_σ bei festem p in $L^p(X)$ beschränkt ist. Indem wir uns auf symmetrische Räume vom Rang 1 beschränken, können wir dieses Ergebnis auf komplexe z erweitern. Diese Verschärfung, die insbesondere für alle hyperbolischen Räume gilt, wenden wir dann auf zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten an, deren Schnittkrümmung durch eine negative Zahl nach oben beschränkt ist. Mit Hilfe eines Vergleichssatzes, der von Gaveau, Débiard und Mazet [4] stammt, schätzen wir die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit ab und beweisen ein Analogon zu den oben angekündigten Ergebnissen.

1. Die Wärmeleitunglgleichung auf einem symmetrischen Raum

G sei eine einfach zusammenhängende nichtkompakte halbeinfache Lie-Gruppe mit endlichem Zentrum and K ein maximale kompakte Untergruppe;

* Der zweitgenannte Autor wurde während seines Forschungsaufenthaltes in Orsay/Paris 1976/77 vom Schweizerischen Nationalfond unterstützt.

$X = G/K$ ist der zugehörige symmetrische Raum (siehe Anhang 1.) Wir bezeichenen die Elemente von X mit gK oder x; $0 = eK$ ist der Ursprung von X, und K erscheint als Stabilisatoruntergruppe bezüglich 0. Jeder Funktion f auf G, die bezüglich Multiplikation mit Elementen aus K von rechts invariant ist, kann in natürlicher Weise eine Funktion $\bar{f}$ auf X zugeordnet werden gemäss $f(g) = \bar{f}(gK)$. G operiert auf X gemäss $x \to g^{-1}x$. Die invarianten Masse $d\mu(g)$ und $d\mu(x)$ auf G und X werden so gewählt, dass

$$\int_G f(g)\, d\mu(g) = \int_X \bar{f}(x)\, d\mu(x).$$

Sind keine Missverständnisse zu befürchten, so werden wir f und $\bar{f}$ identifizieren. Für weitere Bezeichnungen verweisen wir auf den Anhang 1.

Δ bezeichnet den Laplace–Beltrami Operator auf X, der mit den Transformationen von G vertauschbar ist, genauer:

$$\Delta_x f(g^{-1}x) = \Delta_{g^{-1}x} f(g^{-1}x)$$

für alle g aus G, x aus X; das Δ beigefügte Symbol steht für die Variable, nach der differenziert wird.

Das Studium der Resolvente R_z von Δ führt über die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta u_t(x) = \frac{\partial u_t(x)}{\partial t} \qquad (W).$$

Der Index t bei u steht für die Abhängigkeit von der Zeit t. Gleichung (W) besitzt eine Fundamentallösung $p_t(x, y)$; ihre Existenz folgt aus allgemeinen Ueberlegungen, siehe z.B. [9], S. 162/163. Die Vertauschbarkeit von Δ mit den Gruppenoperationen zieht eine wichtige Invarianzeigenschaft von $p_t(x, y)$ nach sich (siehe etwa [9], S. 162):

$$p_t(x, y) = p_t(gx, gy)$$

für alle $g \in G$, $x, y \in X$. Folgerungen daraus:

1) Die Wärmeleitungshalbgruppe auf X

$$T_t f(x) = \int_X p_t(x, y) f(y)\, d\mu(y)$$

lässt sich als Faltungshalbgruppe mit einem Kern $p_t(g)$ auf G deuten:

$$T_t f(g) = p_t * f(g).$$

2) Der Kern $p_t(g)$ ist bezüglich K bi-invariant.

Beide Behauptungen ergeben sich mit der Setzung $p_t(0, y) = p_t(h)$, $y = h^{-1}0$ aus der Invarianzeigenschaft von $p_t(x, y)$. 2) zieht eine Vereinfachung nach sich: wir zerlegen g gemäss $g = kak'$, $k, k' \in K$ mit $a \in A$ (Anhang 1.); p_t erscheint dann als Funktion von a allein: $p_t(g) = p_t(a)$.

2. Die Resolvente von Δ auf einem symmetrischen Raum von beliebigem endlichem Rang

X sei ein symmetrischer Raum vom nichtkompakten Typ, und R_z bezeichne für komplexes z die Resolvente von Δ; sie ist durch

$$R_z = \int_0^\infty e^{-zt} T_t \, dt$$

gegeben. Setzen wir für K-bi-invariantes f $T_t f = p_t * f$, so ist

$$r_z(g) = \int_0^\infty e^{-zt} p_t(g) \, dt$$

der Kern der Resolvente; wie p_t ist auch er K bi-invariant.

SATZ 1. *X sei ein symmetrischer Raum vom nichtkompakten Typ, σ ein reeller Parameter und $1 \leq p < \infty$. R_σ ist genau dann eine beschränkte Transformation von $L^p(X)$, wenn*

$$\sigma > -4\,|\rho|^2/pp'.$$

Beweis. Zuvor eine Vorbereitung: für die sphärische Fouriertransformation $\tilde{p}_t(\lambda)$ von $p_t(g)$ gilt (Anhang 2) wegen

$$\Delta \Phi_\lambda = -(|\lambda|^2 + |\rho|^2)\Phi_\lambda$$

die einfache Beziehung

$$\tilde{p}_t(\lambda) = e^{-t(|\lambda|^2 + |\rho|^2)}.$$

Nun zum Beweis:

1) f, g seien stetige Funktionen auf X (bzw. auf G) mit kompaktem Träger. Wir schätzen $\langle R, f, g\rangle$ ab. Nach dem ersten Abschätzungsprinzip (Anhang 3) gibt es Funktionen U, V in $L^p(K/M)$, $L^{p'}(K/M)$ mit

$$|\langle R_\sigma f, g\rangle| \leq \int_0^\infty e^{-\sigma t}\langle p_t * |f|, |g|\rangle\, dt = \int_0^\infty e^{-\sigma t}\langle |g| * |\check{f}|, p_t\rangle\, dt$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-\sigma t}\, dt \int_G \langle D_{i(1-2/p)\rho}(h)U, V\rangle p_t(h)\, d\mu(h)$$

$$\leq \|U\|_p\, \|V\|_{p'} \int_0^\infty e^{-\sigma t}\tilde{p}_t([2/p-1]\rho)\, dt$$

$$\leq \|f\|_p\, \|g\|_{p'} \int_0^\infty e^{-t(\sigma+4|\rho|^2/pp')}\, dt,$$

also ist R_σ für $\sigma + 4\,|\rho|^2/pp' > 0$ beschränkt.

2) Wir nehmen jetzt an, R_σ sei beschränkt in $L^p(X)$; es gibt also eine Konstante $C_{p,\sigma}$, so dass für f in $L^p(X)$, g in $L^{p'}(X)$ gilt:

$$|\langle R_\sigma f, g\rangle| \leq C_{p,\sigma}\, \|f\|_p\, \|g\|_{p'}.$$

Nach dem zweiten Abschätzungsprinzip (Anhang 3) lässt sich $\Phi_{2/p-1}(g)$ durch Koeffizienten der regulären Darstellung approximieren:

$$\Phi_{2/p-1}(g) = \lim_{n\to\infty} V_n * U_n(g)$$

mit positiven Funktionen U_n, V_n, $\|U_n\|_p\, \|V_n\|_{p'} = 1$, gleichmässig auf kompakten Teilmengen von G. Es folgt:

$$\langle R_\sigma U_n, V_n\rangle = \int_0^\infty e^{-\sigma t}\langle p_t * U_n, V_n\rangle\, dt = \int_0^\infty e^{-\sigma t}\langle V_n * \check{U}_n, p_t\rangle\, dt.$$

Sei $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ eine Folge kompakter Teilmengen von G mit $\bigcup M_n = G$ und $h_n = 1_n(V_n * U_n)$ (1_n ist die charakteristische Funktion von M_n). Wegen der gleichmässigen Konvergenz von h_n gegen $1_n\, \Phi_{2/p-1}$ folgt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \langle R_\sigma U_n, V_n\rangle \geq \int_0^\infty e^{-\sigma t}\langle \Phi_{2/p-1} 1_n, p_t\rangle\, dt.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir wegen der monotonen Konvergenz von $\langle 1_n \Phi_{2/p-1}, p_t \rangle$ gegen $\langle \Phi_{2/p-1}, p_t \rangle$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle R_\sigma U_n, V_n \rangle \geq \int_0^\infty e^{-(\sigma+4|\rho|^2/pp')}\, dt,$$

und aus

$$\lim_{n\to\infty} C_{p,\sigma} \|U_n\|_p \|V_n\|_{p'} = C_{p,\sigma}$$

folgt $\sigma + 4|\rho|^2/pp' > 0$.

Zusatz zu Satz 1: aus dem ersten Teil des Beweises kann man leicht die Beschränktheit von R_z in $L^p(X)$ für alle z mit $\operatorname{Re} z > -4|\rho|^2/pp'$ ableiten.

Satz 1 kann wie folgt veranschaulicht werden: σ ist als Funktion von $1/p$ aufgetragen; das schraffierte Gebiet stellt den Bereich in der $(1/p, \sigma)$-Ebene dar, in dem R_σ beschränkt ist.

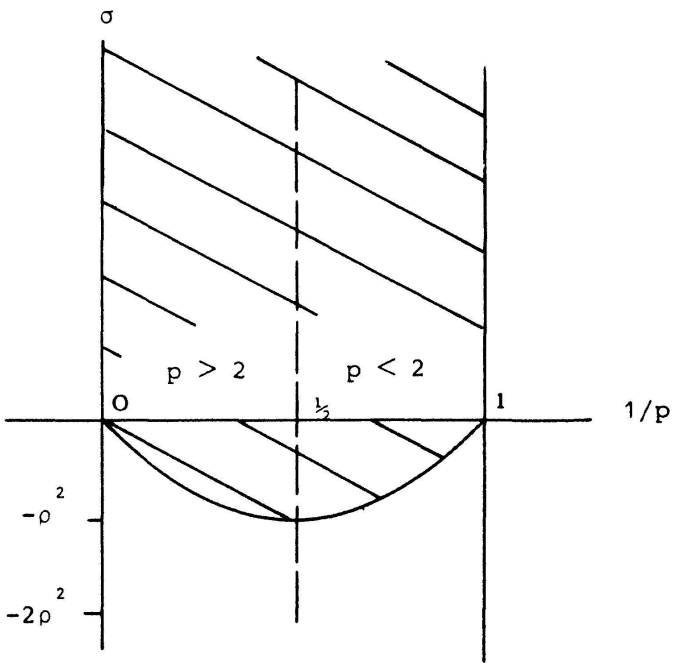

Fig. 1

3. Der Fall Rang $X = 1$

X habe Rang 1. Unter dieser Voraussetzung können wir Satz 1 präzisieren, und zwar für alle komplexen z. Gleichzeitig zeigt uns ein Teil des Beweises, dass

sich eine Richtung von Satz 2 auch für symmetrische Räume von beliebigem endlichem Rang aufrecht erhalten lässt; die andere Richtung bleibt hier indessen noch offen.

Aus der nachfolgenden Berechnung der Fundamentallösung von (W) ermitteln wir eine Formel für den Kern der Resolvente und gewinnen hieraus die nötigen Abschätzungen in den Umgebungen des Ursprungs und des Unendlichen.

3.1. *Berechnung von* p_t

Da X Rang 1 hat, können wir A mit Hilfe eines reellen Parameters ζ beschreiben (Anhang 4.1). p_t können wir als Funktion von $a = a_\zeta$ allein auffassen, und ausserdem folgt aus der K Bi-Invarianz von p_t, dass p_t als Funktion von ζ gerade ist. Aus den im Anhang gemachten Festsetzungen folgen

$$\Delta\Phi_\lambda = -(u^2+\rho^2)\Phi_\lambda$$
$$\tilde{p}_t(u) = e^{-t(u^2+\rho^2)}.$$

Unter Verwendung der Abelschen Transformation wird (Anhang 4.2)

$$p_t(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{p_t}(a_\zeta)e^{iu\zeta}\,d\zeta = 2\int_0^{\infty} F_{p_t}(a_\zeta)\cos u\zeta\,d\zeta,$$

also

$$F_{p_t}(a_\zeta) = (4\pi t)^{-1/2}e^{-\rho^2 t-(\zeta^2/4t)}$$

und schliesslich unter Zuhilfenahme der im Anhang 4.2 bewiesenen Unkehrformel

HILFSSATZ 1. *G habe Rang 1 und n, ρ, d, D_y dieselbe Bedeutung wie im Anhang 4.1. Bezeichnen wir mit ch den Cosinus hyperbolicus, so lautet die Fundamentallösung von (W) wie folgt:*

1. *Ist G die verallgemeinerte Lorentzgruppe, so ist für gerades n und $c_n = (-1)^{n/2}(2\pi)^{-\rho}$*

$$p_t(a_\zeta) = c_n(4\pi t)^{-1/2}e^{-\rho^2 t}\int_\zeta^\infty \frac{D_y^{n/2}e^{-y^2/4t}}{\sqrt{(ch y - ch\zeta)}}\,sh y\,dy$$

und für ungerades n und $c_n = (-1)^{(n-1)/2}(2\pi)^{-\rho}$

$$p_t(a_\zeta) = c_n(4\pi t)^{-1/2} e^{-\rho^2 t} D_\zeta^{(n-1)/2} e^{-\zeta^2/4t}.$$

2. *In den anderen Fällen entsprechend* $d = 2, 4, 8$ *gilt für gewisse von* t *und* ζ *unabhängige Konstanten* $a_1, a_2, \ldots, a_{d/2}$

$$p_t(a_\zeta) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\rho^2 t} \sum_{i=1}^{d/2} a_i \int_\zeta^\infty \frac{ch^{-d+i+1} y D_y^{i+(d(n-1))/2} e^{-y^2/4t}}{\sqrt{(ch^2 y - ch^2 \zeta)}} dhy\, dy$$

3.2. *Die Resolvente*

Mit den in Hilfssatz 1 gewonnenen Formeln für p_t kann man den Kern der Resolvente bestimmen. Setzen wir für K bi-invariantes f

$$T_t f(g) = p_t * f(g),$$

so ist

$$r_z(a_\zeta) = \int_0^\infty e^{-zt} p_t(a_\zeta)\, dt,$$

und wir haben den

HILFSSATZ 2. *Unter denselben Setzungen wie in Hilfssatz* 1 *gelten folgende Formeln:*

1. *für die verallgemeinerte Lorentzgruppe und gerades n*

$$r_z(a_\zeta) = c_n(z+\rho^2)^{-1/2}/2 \int_\zeta^\infty \frac{D_y^{n/2} e^{-(z+\rho^2)^{1/2} y}}{\sqrt{(chy - ch\zeta)}} shy\, dy,$$

und für ungerades n

$$r_z(a_\zeta) = c_n(z+\rho^2)^{-1/2}/2 \quad D_\zeta^{(n-1)/2} e^{-(z+\rho^2)^{1/2}}.$$

2. *In den anderen Fällen wird*

$$r_z(a_\zeta) = (z+\rho^2)^{-1/2} \sum_{i=1}^{d/2} a_i \int_\zeta^\infty \frac{ch^{-d+i+1} D_y^{i+d(n-1)/2} e^{-(z+\rho^2)^{1/2} y}}{\sqrt{(ch^2 y - ch^2 \zeta)}} shy\, dy.$$

Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich Satz 1 wie folgt erweitern:

SATZ 2. *X habe Rang* 1. *Wir setzen* $z=\sigma+i\tau$ *und*

$$a=\begin{cases}\rho(2/p-1) & \text{für} \quad 1<p\leqslant 2\\ \rho(2/p'-1) & \text{für} \quad 2<p\leqslant\infty.\end{cases}$$

Die Resolvente R_z *ist genau dann eine beschränkte Transformation von* $L^p(X)$, *wenn*

$$\tau^2>-4a^2(\sigma+4\rho^2/pp').$$

Beweis:

1. R_z sei in $L^p(X)$ beschränkt. Wir können uns auf $1\leqslant p\leqslant 2$ beschränken (Dualitätsargument). f sei eine auf X stetige Funktion mit kompaktem Träger und U, V stetige Funktionen auf K/M. Die Funktionen

$$F(w)=\langle\widehat{R_zf}(w)U, V\rangle, \qquad G(w)=\langle\hat{f}(w)U, V\rangle$$

($\hat{}$ bezeichnet die Fouriertransformation auf G, siehe Anhang 2.) sind auf Grund eines in [11] bewiesenen Satzes im Streifen $|\mathrm{Re}\, w|<a$ analytisch und in jedem abgeschlossenen Teilstreifen $|\mathrm{Re}\, w|\leqslant a-\varepsilon$ (ε positiv) beschränkt.

$$\widehat{R_zf}(w)=(w^2-\rho^2-z)^{-1}\hat{f}(w)$$

zieht deshalb die Beschränktheit von $(w^2-\rho^2-z)^{-1}$ in jedem solchen Teilstreifen nach sich. Ihre Pole (bezüglich der Variablen $w=u+iv$) sind durch

$$u^2-v^2=\sigma+\rho^2$$
$$2uv=\tau$$

gegeben; wir können $u\neq 0$ annehmen. Sonst wäre $\tau=0$ und damit $z=\sigma$, und wir befänden uns in der Situation von Satz 1. Setzen wir $k=\sigma+\rho^2$, so wird $v=\tau/2u$ und damit

$$u^2=(k+\sqrt{k^2+\tau^2})/2.$$

Die Beschränktheit von $(w^2-\rho^2-z)^{-1}$ in jedem Teilstreifen der angegebenen

Art zieht notwendig $|u| \geqslant a$ nach sich, also ist

$$\sqrt{k^2+\tau^2} \geqslant 2a^2-k.$$

Die rechte Seite ist genau dann nicht negativ, wenn

$$\sigma \leqslant \rho^2(1-8/pp');$$

wir unterscheiden zwei Fälle:
1) $\sigma \leqslant \rho^2(1-8/pp')$: es folgt $k^2+\tau^2 \geqslant (2a^2-k)^2$ oder

$$\tau^2 \geqslant -4a^2\left(\sigma+\frac{4\rho^2}{pp'}\right).$$

2) $\sigma > \rho^2(1-8/pp')$: hier ist sowieso

$$\tau^2 \geqslant -4a^2\left(\sigma+\frac{4\rho^2}{pp'}\right),$$

(siehe Fig. 2).
Da die Resolventenmenge eine offene Teilmenge der komplexen Ebene ist, muss $\geqslant$ durch $>$ ersetzt werden.

2. Es sei jetzt umgekehrt

$$\tau^2 > -4a^2\left(\sigma+\frac{4\rho^2}{pp'}\right),$$

wir unterscheiden wieder die beiden Fälle von oben
1) $\sigma > \rho^2(1-8/pp')$: es gilt

$$\frac{4\rho^2}{pp'} \leqslant \rho^2(1-8/pp'),$$

und die Behauptung folgt aus dem Zusatz im Anschluss an Satz 1.
2) $\sigma \leqslant \rho^2(1-8/pp')$: wir schätzen zuerst den Kern $r_z(a_\zeta)$ der Resolvente für $\zeta \to 0$ und $\zeta \to \infty$ ab. Für $\zeta \to \infty$ ist

$$r_z(a_\zeta) = 0(\exp -[\rho + \operatorname{Re}\sqrt{z+\rho^2}])$$

und für $\zeta \to 0$

$$r_z(a_\zeta) = \begin{cases} 0(\zeta^{2-n}) & \text{für die Lorentzgruppe} \\ 0(\zeta^{2-dn}) & \text{in den übringen Fällen.} \end{cases}$$

Wir zeigen: unter der gemachten Voraussetzung liegt r_z in $L^q(X)$ für ein $1 \leq q < p$. Die Behauptung folgt dann durch Anwendung des Phänomens von Kunze-Stein für K bi-invariante Konvolutoren.

In der für K bi-invariante Funktionen f gültigen Formel

$$\int_G f(g)\, d\mu(g) = \int_0^\infty f(a) sh^r\zeta\, sh^s 2\zeta\, d\zeta$$

(r, s haben die im Anhang 4.1. gegebene Bedeutung) verhält sich das Gewicht

$$sh^r\zeta\, sh^s 2\zeta$$

für $\zeta \to \infty$ wie $\exp 2\rho\zeta$ und für $\zeta \to 0$ wie ζ^{-dn+2}. Hieraus entnimmt man: $r_z(a_\zeta)$ liegt sicher dann in $L^q(X)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$-q(\rho + \operatorname{Re}\sqrt{z+\rho^2}) + 2\rho \quad < \quad 0 \tag{1}$$

$$-q(2-dn) + 1 - dn \quad < \quad 1 \tag{2}$$

setzen wir $k = \rho^2 + \sigma$, so ist die Bedingung (1) äquivalent zu

$$q\left(\rho + \left[\frac{k + \sqrt{k+\tau^2}}{2}\right]^{1/2}\right) > 2\rho$$

oder

$$\sqrt{k^2+\tau^2} > 2a^2 - k.$$

Die rechte Seite ist für $1 < q < p$ nicht negativ, denn

$$2a^2 - k = \rho^2(1 - 8/qq') - \sigma > \rho^2(1 - 8/pp') - \sigma \geq 0;$$

Es folgt

$$\tau^2 > -4a^2\left(\sigma + \frac{4\rho^2}{qq'}\right),$$

eine Ungleichung, die man sicher für ein q mit $1 < q < p$ erfüllen kann. Nun zur Bedingung (2): sie ist äquivalent zu

$$q < \frac{dn}{dn-2}$$

und ist gleichzeitig mit (1) erfüllbar. r_z liegt also in $L^q(X)$ für ein q mit $1 < q < p$, und die Behauptung folgt aus dem Phänomen von Kunze-Stein für K bi-invariante Konvolutoren. Satz 2 ist in Fig. 2 veranschaulicht; τ ist also Funktion von σ aufgetragen; die Gerade $\sigma = \rho^2(1-8/pp')$ ist zudem eingezeichnet; sie spielt beim Beweis eine Rolle. R_z ist im schraffierten Gebiet beschränkt.

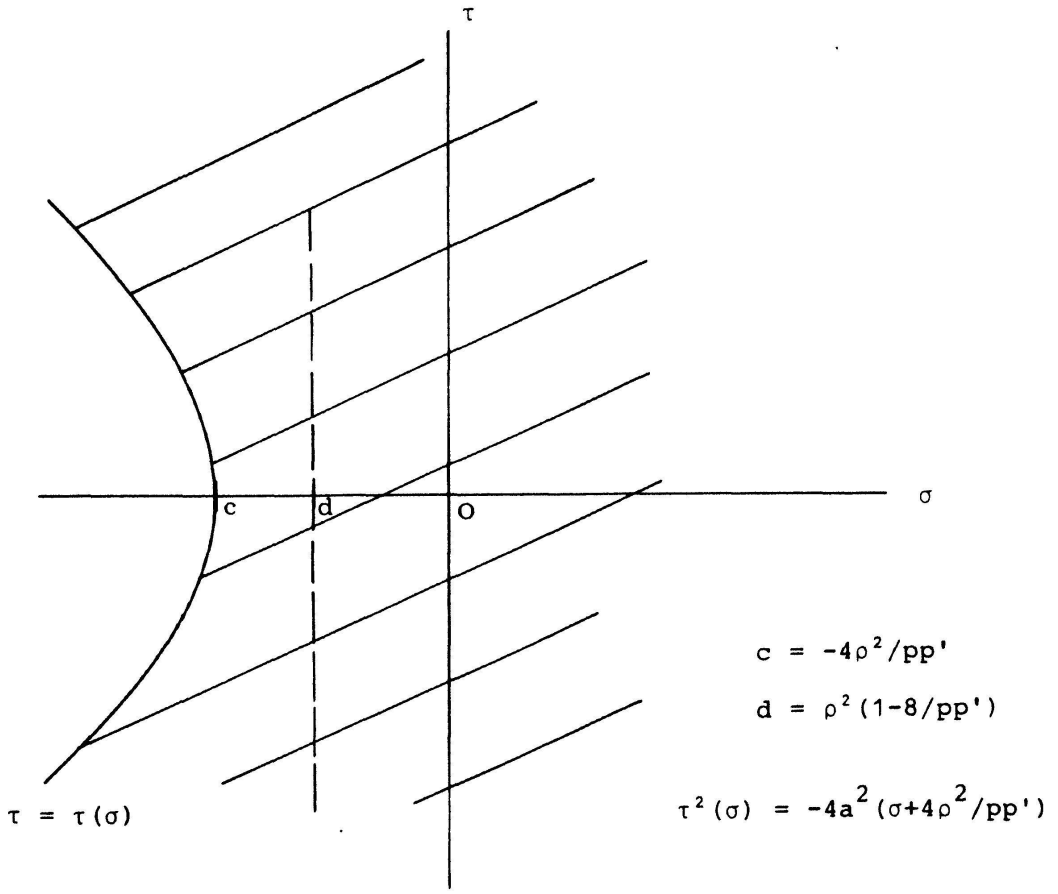

Fig. 2

4. Anwendung der Ergebnisse von 2, 3 auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit negativer Schnittkrümmung

Es sei X eine einfachzusammenhängende n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung durch eine negative Konstante nach oben beschränkt sei. Wir nehmen der Einfachheit halber an, diese sei -1, was keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Δ sei der Laplace–Beltrami Operator auf X und R_z seine Resolvente. Mit X bezeichnen wir den symmetrischen Raum, der zur verallgemeinerten Lorentzgruppe $G = SO_0(1, n)$ gehört. Als Modell für X wählen wir den Teil des Hyperboloids

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 = 1$$

entsprechend $x_0 > 0$. Ursprung von $\tilde{X}$ sei $\tilde{e} = (1, 0, \ldots, 0)$; setzen wir $g = ka_\zeta k'$ mit k, k' in K und a_ζ in A, so ist

$$g\tilde{e} = \tilde{x} = (ch\zeta, 0, \ldots, 0),$$

und der Abstand zwischen $\tilde{e}$ und $\tilde{x}$ ist ζ. Mann kann nun X und $\tilde{X}$ isometrisch aufeinander beziehen. Dazu fixiere man ein festes e in X, dem $\tilde{e}$ entsprechen soll. Die Tangentialebenen an X und $\tilde{X}$ in e und $\tilde{e}$ werden identifiziert und dienen via Exponentialabbildung als Koordinatenebenen für X und $\tilde{X}$ (siehe dazu [13]).

Es seien $p_t, \tilde{p}_t$ die Fundamentallösungen von (W) auf $X, \tilde{X}$, die wegen allgemeinen Zusammenhängen immer existieren (siehe z.B. [1], S. 229). Ist die Schnittkrümmung von X höchstens -1 (Schnittkrümmung von $\tilde{X}$), so lassen sich die Fundamentallösungen auf Grund von [4] miteinander vergleichen: sind $x(\zeta), \tilde{x}(\zeta)$ einander entsprechende Geodätische durch e und $\tilde{e}$, so gilt

$$p_t(x, e) \leq \tilde{p}_t(\tilde{x}, \tilde{e}) = \tilde{p}_t(a_\zeta) \tag{*}$$

Zusammen mit der in Hilfssatz 1 gewonenen Formel ergibt sich aus Gleichung (*) der

HILFSSATZ 3. *Es gibt von t und x unabhängige Konstanten C_1, C_2 mit*

$$p_t(e, x) \leq C_1 e^{-\rho^2 t}, \quad t \geq 1 \tag{1}$$

$$p_t(e, x) \leq C_2 t^{-n/2}, \quad 0 < t \leq 1 \tag{2}$$

Aus Hilfssatz 3 lässt sich ein den Sätzen 1, 2 entsprechendes Ergebnis herleiten:

SATZ 3. *X sei eine einfachzusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung höchstens -1 sei; wir setzen $z=\sigma+i\tau$, $n=\dim X$, $\rho=(n-1)/2$.*

1. *Die Resolvente R_z ist eine beschränkte Transformation von $L^p(X)$, falls*

$$1\leqslant p\leqslant 2 \quad \text{und} \quad \sigma>-2\rho^2/p'$$

oder

$$2\leqslant p\leqslant \infty \quad \text{und} \quad \sigma>-2\rho^2/p.$$

2. *Unter der Voraussetzung $1\leqslant p\leqslant 2$ ist der Kern der Resolvente $r_z(x, y)$, als Funktion von x oder y, in $L^p(X)$, sofern die fogenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\sigma>-2\rho^2/p' \quad \textit{und} \quad p<\frac{n}{n-2}.$$

Der erste Teil des Satzes lässt sich wie folgt veranschaulichen: σ ist als Funktion von $1/p$ aufgetragen, und das schraffierte Gebiet stellt den Bereich dar, in dem R_z beschränkt ist.

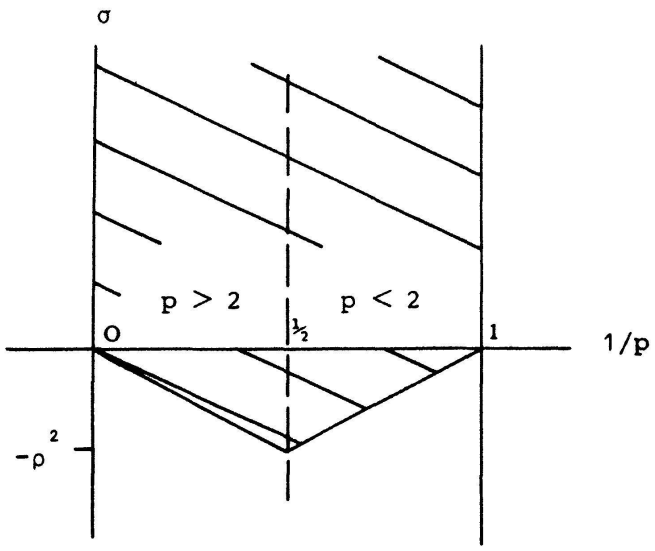

Fig. 3

Beweis

1. Wir können uns auf $1 \leq p \leq 2$ beschränken (Dualitätsargument und gehen von den Ungleichungen aus:

$$\|T_t f\|_1 \leq \|f\|_1 \tag{3}$$

$$\|T_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \tag{4}$$

also für alle $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|T_t f\|_p \leq \|f\|_p \tag{5}$$

Um das Verhalten von $T_t f$ für $t \to \infty$ zu untersuchen, gehen wir von der Spektralzerlegung von T_t aus (siehe [13]):

$$T_t = \int_{\rho^2}^{\infty} e^{-\lambda t}\, dE_\lambda.$$

Hieraus ergibt sich

$$\langle T_{2t} f, f\rangle = e^{-2\rho^2 t} \int_0^\infty e^{-2\lambda t}\, d\langle E_{\lambda+\rho^2} f, f\rangle \leq e^{-2\rho^2 t} \int_{\rho^2}^\infty d\langle E_\lambda f, f\rangle = e^{-2\rho^2 t}\, \|f\|_2^2,$$

oder

$$\|T_t f\|_2 \leq e^{-\rho^2 t}\, \|f\|_2. \tag{6}$$

und mit Interpolation zwischen (3) und (6)

$$\|T_t f\|_p \leq e^{-(2\rho^2/p')t}\, \|f\|_p.$$

Für die Resolvente R_z wird mit $z = \sigma + i\tau$:

$$\begin{aligned}\|R_z f\|_p &\leq \left\| \int_0^1 T_t f\, dt \right\|_p + \int_1^\infty e^{-(\sigma+2\rho 2/p')t}\, dt\, \|f\|_p \\ &\leq \left(1 + \int_0^\infty e^{-(\sigma+2\rho^2/p')t}\, dt\right) \|f\|_p;\end{aligned}$$

der in Klammer stehende Ausdruck ist nach Voraussetzung endlich.

2. Nun zum Kern der Resolvente: wegen (2) und $\|p_t(\cdot, y)\|_1 = 1$ gilt die für alle $1 \leq p \leq \infty$ gültige Abschätzung

$$\|p_t(x, \cdot)\|_p \leq Ct^{-n/2p'}. \tag{7}$$

Die Abschätzung für $t \geq 1$ erfordert eine Fallunterscheidung:
1. Fall: $n/n-2 \leq 2$
Nach (1) wird

$$\|p_t(x, \cdot)\|_2^2 = \int_X p_t(x, y) p_t(y, x)\, d\mu(y) = p_{2t}(x, x) \leq C_1 e^{-2\rho^2 t}. \tag{8}$$

Zusammen mit $\|p_t(x, \cdot)\|_1 = 1$:

$$\|P_t(x, \cdot)\|_p \leq C' e^{-2\rho^2 t/p'} \tag{9}$$

Aus (7) und (9) resultiert mit gewissen Konstanten K_1, K_2:

$$\|r_z(x, \cdot)\|_p \leq K_1 \int_0^1 t^{-n/2p'}\, dt + K_2 \int_1^\infty e^{-(\sigma + 2\rho^2/p')t}\, dt;$$

die rechte Seite dieser Ungleichung ist für $n < 2p'$ und $\sigma > -2\rho^2/p'$ endlich.
2. Fall: $2 < n/n-2$
(dieser Fall ist nur für $n = 2, 3$ möglich) $p \leq 2$ ist im ersten Fall enthalten. Es sei also $2 < p < n/n-2$. Interpolation zwischen (1) und (8) liefert

$$\|p_t(x, \cdot)\|_p \leq C_1' e^{-\rho^2 t}. \tag{10}$$

Wegen (10) ist $\|r_z(x, \cdot)\|_p$ für $\sigma > -\rho^2$ endlich; diese Bendingung folgt aber aus $\sigma > -2\rho^2/p'$ und $1 \leq p \leq 2$.

Schlussbemerkungen

Man kann mit denselben Methoden, wie sie in dieser Arbeit verwendet wurden, auch Aussagen über die Riesz-Potentiale I_z machen; I_z ist durch

$$I_z = 1/\Gamma(z/2) \int_0^\infty t^{-1+z/2} T_t\, dt$$

definiert. Wir beschränken uns hier auf einige Resultate; die in 1 aufgeführten

Ergebnisse wurden von Lohoué [12] in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit auf eine wesentlich allgemeinere Klasse Riemannscher Mannigfaltigkeiten erweitert. Die in 2 gegebenen Resultate lassen sich auf Grund expliziter Formeln für den Kern k_z von I_z gewinnen; die hieraus abgeleiteten Abbildungseigenschaften von I_z wurden in [21] auf anderem Wege bewiesen.

1. X sei ein symmetrischer Raum vom nichtkompakten Typ oder eine einfachzusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung durch eine negative Konstante nach oben beschränkt sei. Setzen wir wieder $z=\sigma+i\tau$, so ist I_z eine beschränkte Transformation von $L^p(X)$, wenn $1<p<\infty$ und $\sigma>0$. Der Kern $k_z(x, y)$ von I_z, bei veränderlichem x oder y, liegt in $L^p(X)$ für $0<\sigma<n$ und $1<p<n/n-\sigma$.
2. X habe Rang 1. Der Kern k_z des Riesz-Potentials ist für $0<\sigma<n$ vom schwachen Typ $n/n-\sigma$ (für die Bezeichnung "vom schwachen Typ" siehe z.B. [18], S. 121). Insbesondere folgt hieraus, dass I_z eine beschränkte Transformation von $L^p(X)$ ist, sofern $1<p<\infty$ und $1/q=1/p-\sigma/n$. I_z ist also sowohl beschränkt in $L^p(X)$ (siehe 1) als auch von $L^p(X)$ nach $L^q(Z)$. Die letztere Eigenschaft und nur diese gilt auch für den euklidischen Raum (siehe [18], S. 119).
3. Der Fall komplexer halbeinfacher Lie-Gruppen bietet keine wesentlichen Schwierigkeiten. Zunächst kann man p_t auf einfache Weise berechnen, da die Umkehrung der Abelschen Transformation im wesentlichen eine Differentiation ist und die sphärische Fouriertransformation auf die gewöhnliche (euklidische) hinausläuft. Der explizite Ausdruck für p_t ist in [2] und in [3] zu finden. r_z kann damit leicht bestimmt werden, und der Beweis unseres Satzes 2 zeigt, dass seine Aussage auch für beliebige komplexe halbeinfache Lie-Gruppen gilt.

Anhang

1. Bezeichnungen

G	zusammenhängende halbeinfache und nichtkompakte Lie-Gruppe mit endlichem Zentrum
K	maximale kompakte Untergruppe von G
$X=G/K$	zugehöriger symmetrischer Raum
$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$	Lie-Algebren von G, K
$(\, , \,)$	Killingsches Produkt auf $\mathfrak{g}$
$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$	Cartan–Zerlegung von $\mathfrak{g}$:$\mathfrak{p}$ ist der zu $\mathfrak{k}$ bez. $(\, , \,)$ orthogonale Unterraum von $\mathfrak{g}$.

$\|V\| = (V, V)^{1/2}$	Länge eines Vektors V aus $\mathfrak{p}$; (,) ist auf $\mathfrak{p}$ positiv definit.
$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$	maximaler Abelscher Unterraum von $\mathfrak{p}$, zugehöriger Dualraum
$E_{\mathbf{C}}$	komplexe Erweiterung des reelen Vektorraumes E
$\mathfrak{a}_+$	ausgezeichnete Zusammenhangskomponente eines regulären Elementes von $\mathfrak{a}$ (positives Weylzimmer)
Σ_+	Menge der (bez. $\mathfrak{a}_+$) positiven eingeschränkten Wurzeln
m_α	Multiplizität von $\alpha \in \Sigma_+$
$2\rho = \sum_{\alpha \in \Sigma_+} m_\alpha \alpha$	ρ ist die halbe Summe der Elemente von Σ_+.
A	die zu $\mathfrak{a}$ gehörige zusammenhängende Abelsche Untergruppe von G; wir schreiben für $a \in A$ auch $a = \exp H$ mit H aus $\mathfrak{a}$
$\mathfrak{g}_\alpha$	der zu $\alpha \in \Sigma_+$ gehörige Eigenraum von ad H, $H \in \mathfrak{a}$
$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Sigma_+} \mathfrak{g}_\alpha$	
N	die zu $\mathfrak{n}$ gehörige zusammenhängende Untergruppe von G
$H(g)$	das in der Iwasawa–Zerlegung von g eindeutig bestimmte Element aus $\mathfrak{a}$, für das gilt: $g = k \exp H(g)\, n$, k in K und n in N
M	Untergruppe aller mit sämtlichen $a \in A$ vertauschbaren k aus K
K/M	Fürstenbergrand von X; G operiert auf K/M via $kM \to g^{-1}\, kM$ unter Berücksichtigung der Isomorphie von K/M und G/MAN (siehe [22]).
$d\sigma(kM)$	K-invariantes Mass auf K/M

Für λ in $\mathfrak{a}'$ sei H_λ in $\mathfrak{a}$ so bestimmt, dass $\lambda(H) = (H_\lambda, H)$ für alle H aus $\mathfrak{a}$; ferner wird das Killingsche Produkt auf $\mathfrak{a}'$ übertragen gemäss $(\lambda, \mu) = (H_\lambda, H_\mu)$, und $\mathfrak{a}'$ wird mit der Setzung $|\lambda|^2 = (\lambda, \lambda)$ ein euklidischer Vektorraum. Die Erweiterung von (,) auf $\mathfrak{a}'_{\mathbf{C}}$ erfolgt wie üblich.

2. Die Darstellungen D_λ, $\lambda \in \mathfrak{a}'_{\mathbf{C}}$

Ist $C(K/M)$ der Raum der auf K/M stetigen Funktionen U, so setzen wir für $\lambda \in \mathfrak{a}'_{\mathbf{C}}$:

$$D_\lambda(g)\, U(kM) = e^{(i\lambda - \rho) H(g^{-1}k)}\, U(g^{-1}kM)$$

Die Operatoren D_λ definieren eine Darstellung von G im Raume $C(K/M)$, die sich für $\lambda \in \mathfrak{a}'$ zu einer unitären Darstellung in $L^2(K/M)$ fortsetzen lässt. Für weitere Eigenschaften dieser Darstellungen siehe z.B. [22]. Ist λ in $\mathfrak{a}'_{\mathbf{C}}$, so ist die Fouriertransformierte einer auf G stetigen Funktion f mit kompaktem Träger

durch

$$\hat{f}(\lambda)=\int_G f(g)D_\lambda(g)\,d\mu(g)$$

definiert. Ist f bezüglich K bi-invariant, so kann man sich auf sphärische Fouriertransformation beschränken: an die Stelle von D_λ tritt die elementare sphärische Funktion

$$\Phi_\lambda(g)=\int_K e^{(i\lambda-\rho)H(gk)}\,d\mu(k).$$

Nach [8] gilt: $\Delta\Phi_\lambda=-(|\lambda|^2+|\rho|^2)\Phi_\lambda$. Für $1\leqslant p\leqslant\infty$ und $\lambda=i(2/p-1)\rho$ wird

$$D_\lambda(g)U(kM)=e^{-(2/p)\rho(H(g^{-1}k))}U(g^{-1}kM).$$

Diese Operatoren sind Isometrien von $L^p(K/M)$ und spielen in der harmonischen Analysis von X eine wichtige Rolle, wie der folgende Abschnitt zeigt.

3. Zwei Abschätzungsprinzipien

Diese gehen auf C. Herz zurück und wurden in [10] systematisch eingesetzt. Die Formulierung übernehmen wir aus [10].

Erstes Abschätzungsprinzip

Sind f, g stetige Funktionen auf G mit kompaktem Träger, $1\leqslant p<\infty$, so gibt es positive und stetige Funktionen U, V auf K/M, so dass gilt:

1) $|g*\check{f}(h)|\leqslant\langle D_{i(2/p-1)\rho}(h)U, V\rangle$, für alle h aus G,
2) $\|U\|_p\leqslant\|f\|_p$, $\|V\|_{p'}\leqslant\|g\|_{p'}$.

Zweites Abschätzungsprinzip

Sind U, V stetige Funktionen auf K/M, $1\leqslant p<\infty$, so gibt es Folgen stetiger auf G definierter Funktionen f_n, g_n mit kompaktem Träger, so dass gilt:

1) $\overline{\lim}_{n\to\infty}\|f_n\|_p\,\|g_n\|_{p'}\leqslant\|U\|_p\,\|V\|_{p'}$,
2) $g_n*\check{f}_n$ konvergiert gleichmässig auf kompakten Teilmengen von G gegen den Koeffizienten

$$\langle D_{i\rho(2/p-1)}(h)U, V\rangle.$$

4. Die Abelsche Transformation für Rang $X=1$

4.1. *Allgemeines*

G bzw. X habe Rang 1, d.h. $\dim \mathfrak{a}=1$. Die den einzigen Elementen von Σ_+, α und 2α, entsprechenden Multiplizitäten bezeichnen wir hier mit r und s, so dass $2\rho=(r+2s)\alpha$. Wir wählen H_0 in $\mathfrak{a}$ so, dass $\alpha(H_0)=1$. Jedes $a\in A$ lässt sich darstellen als $a=a_\zeta=\exp \zeta H_0$ mit eindeutig bestimmtem $\zeta\in R$. Um grössere Uebersichtlichkeit der Formeln zu erreichen ersetzen wir Δ durch $|\alpha|^{-2}\,\Delta$ und schreiben für $r+2s$ ρ (ursprünglich $\rho=(r+2s)\alpha$). Für $\lambda\in\mathfrak{a}'_{\mathbf{C}}$ gibt es $w\in\mathbf{C}$ mit $\lambda=w\alpha$, und es gilt:

$$\Delta\Phi_\lambda=-(w^2+\rho^2)\Phi_\lambda.$$

Die zur Diskussion stehenden Gruppen und symmetrischen Räume lauten:

$SO_0(1,n)$,	$X=SO_O(1,n)/O(n)$,	$\rho=(n-1)/2$
$SU(1,n)$,	$X=SU(1,n)/U(n)$,	$\rho=n$
$Sp(1,n)$,	$X=Sp(1,n)/Sp(1)Sp(n)$	$\rho=2n+1$
$F_{4(-20)}$,	$X=F_{4(-20)}/\mathrm{Spin}(9)$	$\rho=15$

Die ersten drei Fälle lassen sich einheitlich behandeln, der letzte gehört zu den Ausnahmegruppen und erfordert ein etwas anderes Vorgehen.

G sei eine der drei ersten Gruppen, $\mathbf{K}$ stehe für einen der Körper $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ oder die Quaternionen $\mathbf{H}$ und d sei die reelle Dimension von K. Die Konjugation in $\mathbf{K}$ bezeichnen wir mit $\bar{a}$. I sei die Diagonalmatrix der Ordnung $n+1$, deren erstes Element 1 und deren übrige Diagonalelemente -1 sind; G ist die Gruppe der Matrizen g der Ordnung $n+1$ mit Elementen aus $\mathbf{K}$, für die gilt: $g^{-t}Ig=I$ sowie $\det g=1$ in den Fällen $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. Ihre Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ enthält alle Matrizen Z der Ordnung $n+1$ mit Koeffizienten aus $\mathbf{K}$, für die gilt: $\bar{Z}^tI+IZ=0$ sowie $Sp\,Z=0$ für $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. In der Cartan–Zerlegung von $\mathfrak{g}$ besteht $\mathfrak{p}$ aus den $Z\in\mathfrak{g}$ mit $\bar{Z}^t=Z$ und $\mathfrak{k}$ aus den $Z\in\mathfrak{g}$ mit $\bar{Z}^t=-Z$. $\mathfrak{a}$ ist hier der von

$$H_0=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$$

erzeugte Unterraum von $\mathfrak{p}$. Σ_+ kann wie folgt beschrieben werden: für $x=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\in\mathbf{K}^{n-1}$ und $y\in\mathbf{K}$ mit $y=-\tilde{y}$ seien $U(x)$, $V(y)$ folgende Matrizen

aus $\mathfrak{g}$ (O_{n-1} ist die Nullmatrix der Ordnung $n-1$):

$$U(x)=\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x^t & O_{n-1} & -x^t \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}, \qquad V(y)=\begin{pmatrix} y & & -y \\ & O_{n-1} & \\ y & & -y \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathfrak{g}_\alpha=\{U(x)\colon x\in\mathbf{K}^{n-1}\}$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}=\{V(y)\colon y\in\mathbf{K}, y=-\bar{y}\}$ und $\alpha(H_0)=1$, $\dim\mathfrak{g}_\alpha=d(n-1)$, $\dim\mathfrak{g}_{2\alpha}=d-1$, $\rho=d(n+1)/2-1$. Wegen $N=\exp(\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{2\alpha})$ lassen sich die Elemente n aus N wie folgt darstellen:

$$n=n(x,y)=\exp(U(x)+V(y))=\begin{pmatrix} 1+(y+x\bar{x}^t/2) & x & -(y+x\bar{x}^t/2) \\ \bar{x}^t & 1_{n-1} & -\bar{x}^t \\ y+x\bar{x}^t/2 & x & -(y+x\bar{x}^t/2) \end{pmatrix}$$

Wie man direkt zeigen kann, ist das invariante Mass $d\mu(n)$ auf N zum euklidischen auf $\mathfrak{n}$ proportional, für das wir zur Abkürzung schreiben: $dx\,dy$ anstelle von $dx\wedge dx^t\wedge dy\wedge d\bar{y}$.

4.2. *Die Abelsche Transformation*

f sei eine K bi-invariante Funktion auf G, stetig mit kompaktem Träger. Ihre sphärische Fouriertransformation

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_G f(g)\Phi_\lambda(g)\,d\mu(g)$$

lässt sich auf eine gewöhnliche euklidische Fouriertransformation zurückführen; für $\zeta>0$ setzen wir:

$$F_f(a_\zeta)=e^{\rho\zeta}\int_N f(a_\zeta n)\,d\mu(n)=e^{\rho\zeta}\int_{\mathfrak{g}_\alpha}\int_{\mathfrak{g}_{2\alpha}} f(a_\zeta n(x,y))\,dx\,dy.$$

F_f heisst Abelsche Transformation aus Gründen, die sofort klar werden (siehe auch [19] und [7]). Da f K bi-invariant ist, hängt sie nur vom Betrag des Matrixelementes $[a_\zeta n(x,y)]_{11}$ von $a_\zeta n(x,y)$ ab, also nur von

$$|ch\zeta+e^\zeta y+e^\zeta\,|x|^2/2|=((ch\zeta+e^\zeta\,|x|^2/2)^2+e^{2\zeta}\,|y|^2)^{1/2}.$$

Schreiben wir für $f(a_\zeta n(x,y))$

$$f_1(\sqrt{(ch\zeta+e^\zeta\,|x|^2/2)^2+e^{2\zeta}\,|y|^2}),$$

so wird

$$F_f(a_\zeta) = e^{\rho\zeta} \int_{\mathfrak{g}_\alpha} \int_{\mathfrak{g}_{2\alpha}} f_1(\sqrt{(ch\zeta + e^\zeta |x|^2)^2 + e^{2\zeta} |y|^2})\, dx\, dy.$$

Wir benötigen eine explizite Umkehrformel für diese Transformation, eine Aufgabe, die schon in der Abelschen Integralgleichung auftritt. Im Falle der verallgemeinerten Lorentzgruppe wurde sie in [19] gelöst; für die übrigen Rang-1 Fälle ist eine explizite Formel u.a. in [9^a] enthalten. Wir geben hier eine für unsere Zwecke geeignete Formel an:

HILFSSATZ. *f sei eine auf G definierte stetige Funktion mit kompaktem Träger, die bezüglich K bi-invariant sei. Setzen wir abkürzend*

$$D_y = \frac{1}{shy} \frac{d}{dy},$$

so gelten folgende Formeln:

1. *Ist G die verallgemeinerte Lorentzgruppe, so wird für gerades n*

$$f(a_\zeta) = (-1)^{n/2} (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_\zeta^\infty \frac{D_y^{n/2} F_f(a_y)}{(chy - ch\zeta)^{1/2}}\, shy\, dy$$

und für ungerades n

$$f(a_\zeta) = (-1)^{n/2} (2\pi)^{-(n-1)/2} D_\zeta^{(n-1)/2} F_f(a_\zeta).$$

2. *Ist G eine der übrigen Rang 1-Gruppen entsprechend $d = 2, 4$, so ist mit absoluten Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_{d/2}$*

$$f(a_\zeta) = \sum_{j=1}^{d/2} a_j \int_\zeta^\infty \frac{ch^{-d+j+1} y (D_y)^{j+d(n-1)/2} F_f(a_y)}{(ch^2 y - ch^2 \zeta)^{1/2}}\, shy\, dy.$$

Beweis. Für 1 ist das Resultat bekannt [19]. Nun zu 2. Zunächst folgt durch Variablentransformation:

$$F_f(a_\zeta) = \int_{\mathbf{R}^{d-1}} \int_{\mathbf{R}^{d(n-1)}} f_1(\sqrt{(ch\zeta + |x|^2/2)^2 + |y|^2})\, dx\, dy.$$

Wie setzen $\phi(*) = f_1(\sqrt{*})$ und

$$g(u) = \int_{R^{d-1}} \phi(u^2 + |y|^2)\, dy,$$

also:

$$F_f(a_\zeta) = \int_{R^{d-1}} \int_{R^{d(n-1)}} \phi((ch\zeta + |x|^2/2)^2 + |y|^2)\, dx\, dy$$
$$= \int_{R^{d-1}} g(ch\zeta + |x|^2/2)\, dx.$$

Da $d(n-1)$ gerade ist, folgt mit $\tilde{F}_f(ch\zeta) = F_f(a_\zeta)$:

$$g(ch\zeta) = (-1/2\pi)^{d(n-1)/2} \tilde{F}_f^{d(n-1)/2}(ch\zeta) \tag{1}$$

Die Ableitung bezieht sich hier auf $ch\zeta$. Wir müssen nun ϕ durch g ausdrücken und das Ergebnis mit (1) kombinieren; dazu setzen wir $h(u) = g(\sqrt{u})$ und erhalten;

$$\int_{R^{d-1}} h^{(d-1)}(u + |z|^2)\, dz = \int_{R^{d-1}} \int_{R^{d-1}} \phi^{(d-1)}(u + |y|^2 + |z|^2)\, dy\, dz$$
$$= (-\pi)^{d-1} \phi(u),$$

oder

$$\phi(u) = (-1/\pi)^{d-1} \int_{R^{d-1}} h^{(d-1)}(u + |z|^2)\, dz$$
$$= (-1/\pi)^{d/2} \int_{-\infty}^{\infty} h^{d/2}(u + \eta^2)\, d\eta,$$

also

$$\phi(u) = (-1/\pi)^{d/2} \int_{-\infty}^{\infty} (d/du)^{d/2} g(\sqrt{u + \eta^2})\, s\eta. \tag{2}$$

Um die gewünschte Formel zu erhalten, berechne man die Ableitung unter dem Integral, setze (1) ein, substituiere $u = ch^2\zeta$ und berücksichtige die Identität

$$F_f^{(k)}(chy) = (1/shy\, d/dy)^k F_f(a_y).$$

Es bleibt noch der Ausnahmefall entsprechend $G = F_{4(-20)}$. Hier setzt man $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, den Körper der Oktaven, also $d = 8$. Da $\mathbf{O}$ nicht assoziativ ist, stellen sich zusätzliche Probleme. Die hierzu erforderlichen Schritte sind in [20] enthalten; X wird dort als das Innere des Einheitskreises der Oktavenebene gedeutet. Die Formel für F_f ist nach Wahl geeigneter Parameter der bereits gefundenen völlig analog; hier ist $\rho = 15$, $\mathfrak{g}_\alpha$ und $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ sind zu $\mathbf{R}^8$ und $\mathbf{R}^7$ isomorph, und die im Hilfssatz, 2. angegebene Formel behält ihre Gültigkeit.

Die hier angegebene Umkehrformel der Abelschen Transformation bezieht sich nur auf K bi-invariante Funktionen. Im allgemeinen Fall haben Gelfand und Neumark für die komplexen halbeinfachen Lie-Gruppen in [5] und für die Gruppe der unimodularen reelen $n-n$ Matrizen in [6] das allgemeine Umkehrproblem gelöst; im letztgenannten Fall ist die Lösung skizziert, und die Beweisidee für die reellen halbeinfachen Liegruppen lässt sich daraus ableiten.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DYNKIN, E. B., Markoff-Prozesse, Bd. II, Springer-Verlag Berlin, 1965.

[2] ESKIN, L. D., *The Heat Equation and the Weierstrass Transform on Certain Riemannian Spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. *75*, S. 239–255.

[3] GANGOLLI, R., *Asymptotic Behaviour of Spectra of Compact Quotients of Certain Symmetric Spaces*, Acta Math. *121*, S. 151–192 (1969).

[4] GAVEAU et al., *théorèmes de comparaison en géométrie Riemannienne*, Publ. Inst. Math. Sci. Kyoto University, No. 21, *12* (1976).

[5] GELFAND, I. M. und NEUMARK, M. A., *Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen*, Akademie-Verlag, Berlin 1957.

[6] ——, *Analogon der Plancherelformel für reelle halbeinfache Lie-Gruppen*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), *92* (russisch) (1953), 461–464.

[7] GODEMENT, R., *A Theory of Spherical Functions I*, Trans. Amer. Math. Soc. *73*, S. 496–556 (1952).

[8] HARISCH–SCHANDRA, *Spherical Functions on a Semisimple Lie Group I*, Amer. J. Math. *80*, (1958), 241–310.

[9] Karpelevic, F. I., *The Geometry of Geodesics and Eigenfunctions of the Beltrami-Laplace Operator on Symmetric Spaces*, Trans. Moscow Math. Soc. *14*, (1965), 51–199.

[9a] KOORNWINDER, T., *A new Proof of a Paley-Wiener Type Theorem for the Jacobi Transform*; Ark. för Math. *13*, (1975) 145–159.

[10] LOHOUÉ, N., *Estimations L^p des coefficients de représentations et opérateurs de convolution*, Advances in Math. *38*, (1980), 178–221.

[11] ——, *Sur les représentations uniformément bornées et le thèorème de convolution de Kunze-Stein*, Publ. Math. d'Orsay 1975.

[12] ——, *Puissances Complexes de l'opérateur de Laplace-Beltrami* (erscheint in C. R. Acad. Sci. Paris).

[13] MCKEAN, H. P., *An Upper Bound to the Spectrum of Δ on a Manifold of Negative Curvature*, J. Diff. Geom. *4*, S. (1969), 359–366.

[14] MALLIAVIN, P., *Asymptotics of the Green Function on a Riemannian Manifold*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, *71*, (1974), 381–383.

[15] MOLCANOV, S. A., *Diffusion Processes and Riemannian Geometry*, Russian Math. Surveys *30*, (1975), 1–63.

[16] NELSON, E., *Analytic Vectors*, Annals of Math. *70*, (1959), 572–615.
[17] STEIN, E. M., *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Paley Theory*, Annals of Math. Study, No 63, Princeton 1970.
[18] ——, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press 1970.
[19] TAKAHASCHI, R., *Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés*, Bull. Math. France (1963), 289–433.
[20] TAKAHASCHI, R., *Quelques résultats sur l'analyse harmonique dans l'espace symétrique non compact de rang un du type exceptionnel*, Vordruck, Nancy 1975.
[21] STANTON, R. I., TOMAS, P. A., *Expansion for Spherical Functions on Noncompact Symmetric Spaces*, Acta Math. (1978), 251–276.
[22] WALLACH, N., *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Pure and applied Mathematics*, Bd. 19, M. Dekker, Inc. New York (1973).

30, bd Pasteur
94260 Fresnes/Paris
France
Bernastr. 58
3005 Bern
Schweiz

Eingegangen den 29. October 1981