Untere Schranken für den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen.

Autor(en): **Huber, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **61 (1986)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-46918

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 61 (1986) 46–59 0010–2571/86/010046–14$01.50 + 0.20/0
© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

Untere Schranken für den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER

1. Einleitung

1.1 Auf jeder kompakten Riemannschen Fläche $\mathcal{F}$ vom Geschlecht $g > 1$ gibt es eine einzige Metrik konstanter Krümmung -1, welche mit der konformen Struktur von $\mathcal{F}$ verträglich ist: die Poincaré-Metrik. Der zugehörige Laplace-Beltrami-Operator $-\Delta$ besitzt ein diskretes Spektrum:

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots, \qquad (\lambda_n \to +\infty).$$

Es ist bekannt ([1]–[3]), dass es eine positive untere Schranke für $\lambda = \lambda_1$ gibt, die nur vom Durchmesser D von $\mathcal{F}$ abhängt; insbesondere hat Buser [2] gezeigt, dass[1])

$$\lambda \geqq \left(4 \operatorname{Sin} \frac{D}{2}\right)^{-2}.$$

Eine bessere Abschätzung ist zu erwarten, wenn neben dem Durchmesser noch weitere geometrische Daten von $\mathcal{F}$ berücksichtigt werden. Wir betrachten in dieser Arbeit das Volumen von $\mathcal{F}$:

$$A = \int_{\mathcal{F}} d\omega = 4\pi(g-1)$$

und den "Injektivitätsradius" $d = l/2$, (l ist die Länge der kürzesten geschlossenen Geodätischen auf $\mathcal{F}$). Wir beweisen folgendes Theorem:

$$\lambda \geqq \operatorname{Min}\left(\tfrac{1}{4}, \sigma\right) \qquad \sigma = 2\left(2 - \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2}\right) \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2} \Big/ (g-1)D^2 \tag{I}$$

---

[1]) Die hyperbolischen Funktionen werden im folgenden mit Sin, Cos, Tg bezeichnet.

Zum Vergleich von (1) und (I) betrachten wir die Menge Σ_g aller Flächen vom Geschlecht $g \geqq 2$ mit $\mathrm{Tg}^2 \frac{d}{2} > \frac{2}{5}$ und $D < 4 \log 2g$. (Es ist leicht zu sehen, dass $D > \log 2g$ für jede Fläche vom Geschlecht g). Die Abschätzung (1) von Buser liefert dann

$$\lambda(\mathcal{F}) > (2^6 g^4 + 2^{-2} g^{-4} - 4)^{-1} \qquad \forall\, \mathcal{F} \in \Sigma_g.$$

Dagegen ergibt (I) ein erheblich besseres Resultat:

$$\lambda(\mathcal{F}) > \tfrac{2}{25}(g-1)^{-1}(\log 2g)^{-2} \qquad \forall\, \mathcal{F} \in \Sigma_g.$$

Andererseits kann man der Arbeit [5] von F. Jenni leicht entnehmen: Es gibt eine hyperelliptische Fläche $\mathcal{F}_g \in \Sigma_g$ mit

$$\lambda(\mathcal{F}_g) \sim 2g^{-1}, \ (g \to \infty).$$

1.2 Zum Beweis von (I) dürfen wir annehmen, dass

$$0 < \lambda < \tfrac{1}{4}. \tag{1}$$

Wir zeigen, dass dann $\lambda \geqq \sigma$. Dazu wählen wir eine zu λ gehörige reellwertige Eigenfunktion ϕ mit

$$\int_{\mathcal{F}} \phi^2 \, d\omega = 1. \tag{2}$$

Wegen $\lambda \neq 0$ gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} \phi \, d\omega = 0. \tag{3}$$

In §2 werden wir beweisen, dass unter der Voraussetzung (1)

$$\nabla\phi = \|\mathrm{grad}\, \phi\|^2 \leqq \lambda / 4\pi I \tag{4}$$

$$I = \tfrac{1}{2}\left(2 - \mathrm{Tg}^2 \frac{d}{2}\right) \mathrm{Tg}^2 \frac{d}{2}. \tag{5}$$

Da $\mathcal{F}$ kompakt ist, gibt es zu zwei beliebigen Punkten $p,\ q \in \mathcal{F}$ stets einen

geodätischen Weg γ von p nach q mit der Länge

$$\int_\gamma ds = \operatorname{dist}(p, q) \leqq D.$$

Daher wird

$$\begin{aligned}(\phi(p) - \phi(q))^2 &= \left(\int_\gamma \frac{d\phi}{ds}\, ds\right)^2 \leqq \int_\gamma \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 ds \cdot \int_\gamma ds \\ &\leqq \int_\gamma (\nabla\phi)\, ds \cdot \int_\gamma ds \leqq \lambda D^2/4\pi I. \end{aligned} \tag{6}$$

Definieren wir

$$K_m := A^{m-2} \int_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} (\phi(p) - \phi(q))^{2m}\, d\omega_p\, d\omega_q, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

so folgt aus (6)

$$K_m \leqq (\lambda D^2 A/4\pi I)^m = (\lambda D^2 (g-1)/I)^m. \tag{8}$$

Nun sei

$$\mathbb{N}^* = \{m \in \mathbb{N} \mid 2^{2m-1} \leqq K_m\}. \tag{9}$$

Für $m \in \mathbb{N}^*$ folgt dann aus (8)

$$\lambda D^2 (g-1)/I \geqq 2^{2-1/m}.$$

Falls $\mathbb{N}^*$ eine unendliche Menge ist, können wir daraus schliessen, dass

$$\lambda D^2 (g-1)/I \geqq 4,$$

womit wegen (5) Theorem (I) bewiesen wäre.

Nun folgt aus (2), (3) und der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} (\phi(p) - \phi(q))^2\, d\omega_p\, d\omega_q = 2A, \\ &\int_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} (\phi(p) - \phi(q))^4\, d\omega_p\, d\omega_q = 2A \int_{\mathcal{F}} \phi^4\, d\omega + 6 \geqq 8. \end{aligned} \tag{10}$$

Diese Ungleichung besagt gerade, dass

$$2 \in \mathbb{N}^*. \tag{11}$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}^*$ und $m' = 2m - 1$. Dann folgt aus den Definitionen (7) und (9):

$$2^{m'} \leqq A^{(m'-3)/2} \int_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} (\phi(p) - \phi(q))^{m'} (\phi(p) - \phi(q))\, d\omega_p\, d\omega_q.$$

Daraus und aus (10) schliessen wir mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung:

$$2^{2m'} \leqq A^{m'-3} \int_{\mathcal{F} \times \mathcal{F}} (\phi(p) - \phi(q))^{2m'}\, d\omega_p\, d\omega_q \cdot 2A = 2K_{m'}.$$

Daher ist mit $m \in \mathbb{N}^*$ auch $m' = 2m - 1 \in \mathbb{N}^*$. Daraus folgt wegen (11), dass $\mathbb{N}^*$ tatsächlich eine unendliche Menge ist. Damit ist Theorem (I) bewiesen bis auf die Gradientenabschätzung (4).

1.3 Man kann leicht eine obere Schranke für D angeben, die nur von d und A abhängt. Sei

$$B_p(r) = \{q \in \mathcal{F} \mid \operatorname{dist}(p, q) \leqq r\}.$$

Dann gilt

$$\int_{B_p(r)} d\omega = 2\pi(\operatorname{Cos} r - 1) < A \quad \text{für} \quad r \leqq d, \tag{12}$$

also insbesondere

$$\operatorname{Cos} d - 1 < A/2\pi = 2(g - 1). \tag{13}$$

Es gibt daher eine natürliche Zahl n derart, dass

$$n < \frac{2(g-1)}{\operatorname{Cos} d - 1} \leqq n + 1. \tag{14}$$

Wir zeigen, dass

$$D \leqq 2nr \quad \text{mit} \quad \operatorname{Cos} r = 1 + \frac{2(g-1)}{n+1} \tag{15}$$

und somit

$$D < \frac{4(g-1)d}{\operatorname{Cos} d - 1}. \tag{16}$$

In der Tat: Es gibt zwei Punkte $a, b \in \mathcal{F}$ mit dist $(a, b) = D$ und ein geodätisches Segment der Länge D mit den Endpunkten a, b. Dieses Segment zerlegen wir durch die Punkte $p_0 = a, p_1, \ldots, p_n = b$ in n Stücke gleicher Länge D/n. Dann gilt offenbar

$$\operatorname{dist}(p_i, p_j) \geqq D/n \quad \text{für} \quad i \neq j. \tag{17}$$

Definieren wir nun $r > 0$ durch

$$\operatorname{Cos} r = 1 + \frac{2(g-1)}{n+1},$$

so ist wegen (14) $r \leqq d$ und daher nach (12)

$$\sum_{j=0}^{n} \int_{B_{p_j}(r)} d\omega = 4\pi(g-1) = \int_{\mathcal{F}} d\omega.$$

Daher können $B_{p_0}(r), \ldots, B_{p_n}(r)$ nicht paarweise disjunkt sein. (Sonst wäre nämlich die offene Menge $\mathcal{F} - \bigcup_{j=0}^{n} B_{p_j}(r)$ leer und somit $\mathcal{F}$ nicht zusammenhängend). Folglich gibt es zwei Indices $i \neq j$ und einen Punkt $q \in B_{p_i}(r) \cap B_{p_j}(r)$. Dann ist aber

$$\operatorname{dist}(p_i, p_j) \leqq \operatorname{dist}(p_i, q) + \operatorname{dist}(p_j, q) \leqq 2r$$

und somit wegen (17) $D \leqq 2nr$.

1.4 Aus (16) folgt

$$\frac{1}{D} > \frac{1}{4(g-1)} \frac{\operatorname{Cos} d - 1}{d} = \frac{1}{4(g-1)} \frac{\operatorname{Sin} d}{d} \operatorname{Tg} \frac{d}{2}.$$

Daraus ergibt sich für die Schranke σ in Theorem (I) die Abschätzung

$$\sigma > \sigma^*(d) = \frac{1}{8(g-1)^3} \left(\frac{\operatorname{Sin} d}{d}\right)^2 \left(2 - \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2}\right) \operatorname{Tg}^4 \frac{d}{2}. \tag{18}$$

$\sigma^*(d)$ ist offensichtlich eine monoton wachsende Funktion von d. Daher folgt aus (13)

$$\sigma^*(d) < \sigma^*(d_0), \qquad \operatorname{Cos} d_0 - 1 = 2(g-1) \geqq 2.$$

Daraus ergibt sich aber leicht, dass stets $\sigma^*(d) < 1/4$. Daher folgt nun aus (I) und (18) das Theorem

$$\lambda \geqq \mu(d)(g-1)^{-3} \qquad \mu(d) = \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{Sin} d}{d}\right)^2\left(2 - \operatorname{Tg}^2\frac{d}{2}\right)\operatorname{Tg}^4\frac{d}{2}. \tag{II}$$

2. Die Abschätzung von $\nabla\phi$

2.0 Wir versehen den Einheitskreis $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds^2 = 4(1-|z|^2)^{-2}\,|dz|^2, \tag{1}$$

welche die konstante Krümmung -1 besitzt. Für die hyperbolische Distanz der Punkte 0 und z ergibt sich:

$$\rho(0, z) = \log\frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad |z| = \operatorname{Tg}(\rho(0, z)/2). \tag{2}$$

Mit geodätischen Pokarkoordinaten

$$r = \rho(0, z), \ \theta = \arg z$$

wird

$$ds^2 = dr^2 + \operatorname{Sin}^2 r\, d\theta^2.$$

Daher ergibt sich für das Volumenelement und die Beltrami–Operatoren der Metrik (1):

$$d\omega = \operatorname{Sin} r\, dr\, d\theta \tag{3}$$

$$\nabla = \|\operatorname{grad}\|^2 = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \operatorname{Sin}^{-2} r\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 \tag{4}$$

$$\Delta = \operatorname{Sin}^{-1} r \frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{Sin} r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \operatorname{Sin}^{-2} r \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{5}$$

2.1 Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt $p \in \mathcal{F}$. Da das Geschlecht von $\mathcal{F}$ grösser als eins ist, gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung $\Pi: E \to \mathcal{F}$ mit

$$\Pi(0) = p. \tag{6}$$

Da jede Decktransformation von Π eine Isometrie der Differentialgeometrie (1) ist, können wir diese Geometrie mit Π von E auf $\mathcal{F}$ verpflanzen und erhalten (unabhängig von der Wahl von $p \in \mathcal{F}$) die in der Einleitung charakterisierte Poincaré–Metrik auf $\mathcal{F}$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} &f(r, \theta) = F(x, y) = (\phi \circ \Pi)(z), \\ &r = \rho(0, z),\ \theta = \arg z,\ z = x + iy. \end{aligned} \tag{7}$$

Setzen wir noch

$$\alpha = F_x(0, 0),\ \beta = F_y(0, 0), \tag{8}$$

so folgt aus (1) und (6), (7)

$$(\nabla\phi)(p) = \tfrac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2) \tag{9}$$

Die Ueberlagerungsabbildung Π ist injektiv auf

$$K = \{z \in E \mid \rho(0, z) < d\}$$

(Siehe z.B. [4] 3.2). Daher wird

$$\int_K \nabla(\phi \circ \Pi)\, d\omega = \int_{\Pi(K)} \nabla\phi\, d\omega \leqq \int_{\mathcal{F}} \nabla\phi\, d\omega = \lambda.$$

Daraus folgt wegen (3), (4) und (7):

$$\int_0^d \left(\int_0^{2\pi} f_r^2(r, \theta)\, d\theta\right) \operatorname{Sin} r\, dr + \int_0^d \left(\int_0^{2\pi} f_\theta^2(r, \theta)\, d\theta\right) \operatorname{Sin}^{-1} r\, dr \leqq \lambda. \tag{10}$$

2.2 Wir stellen nun die Funktion $f(r, \theta)$ durch eine Fourier–Reihe dar:

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(r) e^{in\theta}. \tag{11}$$

Da f reellwertig ist, gilt

$$c_{-n} = \overline{c_n}. \tag{12}$$

Wir interessieren uns insbesondere für $c_1(r)$ und zeigen zunächst

$$\lim_{r \to 0} c_1(r)/r = \tfrac{1}{4}(\alpha - i\beta). \tag{13}$$

In der Tat: Aus (7), (8) und (2) ergibt sich

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \phi(p) + |z|\,(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta) + O(|z|^2) \\ &= \phi(p) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tg}\frac{r}{2}((\alpha - i\beta)e^{i\theta} + (\alpha + i\beta)e^{-i\theta}) + O\left(\mathrm{Tg}^2\frac{r}{2}\right). \end{aligned}$$

Somit wird

$$c_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-i\theta}\, d\theta = \tfrac{1}{2}(\alpha - i\beta)\,\mathrm{Tg}\frac{r}{2} + O\left(\mathrm{Tg}^2\frac{r}{2}\right).$$

2.3 Zur Berechnung von $c_1(r)$ benötigen wir die Legendre–Funktion

$$F_\lambda(x) := P_\nu(x), \qquad \nu(\nu + 1) = -\lambda.$$

Sie ist im Intervall $[1, \infty)$ Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 1)F'_\lambda(x) + \lambda F_\lambda(x) = 0; \tag{14}$$

sie ist regulär an der Stelle $x = 1$ und es gilt

$$F_\lambda(1) = 1. \tag{15}$$

Daraus ergibt sich sofort

$$F'_\lambda(1) = -\frac{\lambda}{2}. \tag{16}$$

Definieren wir

$$G_\lambda(x) = (x^2 - 1)^{1/2} F'_\lambda(x), \qquad x > 1, \tag{17}$$

so gilt

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 1)G'_\lambda(x) + \left(\lambda - \frac{1}{x^2 - 1}\right)G_\lambda(x) = 0. \tag{18}$$

Wir zeigen nun:

$$c_1(r) = \gamma G_\lambda(\operatorname{Cos} r), \qquad |\gamma|^2 = \lambda^{-2}(\nabla\phi)(p). \tag{19}$$

Zunächst bemerken wir: Aus (4) und (7) folgt

$$f_r^2(r, \theta) \leqq M = \operatorname*{Max}_{\mathscr{F}} \nabla\phi.$$

Daraus ergibt sich:

$$|c'_1(r)| \leqq M^{1/2}. \tag{20}$$

Die Eigenfunktion ϕ erfüllt auf $\mathscr{F}$ die Gleichung $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$. Daraus folgt wegen (5) und (7):

$$\operatorname{Sin}^{-1} r \frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{Sin} r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \operatorname{Sin}^{-2} r \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \lambda f = 0.$$

Hieraus ergibt sich sofort eine gewöhnliche Differentiagleichung für

$$c_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-i\theta}\, d\theta:$$

$$\operatorname{Sin}^{-1} r \frac{d}{dr}(\operatorname{Sin} r\, c'_1(r)) + (\lambda - \operatorname{Sin}^{-2} r) c_1(r) = 0.$$

Führen wir die neue Variable $x = \operatorname{Cos} r$ ein und definieren

$$h(x) = c_1(r), \qquad x = \operatorname{Cos} r, \qquad r > 0, \tag{21}$$

so wird

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)h'(x)+\left(\lambda-\frac{1}{x^2-1}\right)h(x)=0, \qquad x>1. \tag{22}$$

$h(x)$ erfüllt also dieselbe Differentialgleichung wie $G_\lambda(x)$. Wir betrachten deshalb die Wronski–Determinante

$$W(x)=\begin{vmatrix} G_\lambda(x) & h(x) \\ G'_\lambda(x) & h'(x) \end{vmatrix}.$$

Aus (18) und (22) folgt $\frac{d}{dx}(x^2-1)W(x)=0$ und somit

$$W(x)=\frac{c}{x^2-1}, \qquad x>1, \tag{23}$$

mit einer gewissen Konstanten c. Andererseits folgt aber aus (13), (17), (20), (21), dass die Determinate $W(x)$ für $x \downarrow 1$ beschränkt ist. Somit muss $c=0$ sein. Dann sind aber h und G_λ linear abhängig: Es gibt eine Konstante γ derart, dass

$$c_1(r)=\gamma G_\lambda(\operatorname{Cos} r).$$

Daraus und aus (16), (17) ergibt sich:

$$\lim_{r\to 0} c_1(r)/r=-\frac{\lambda}{2}\gamma.$$

Somit wird wegen (13)

$$\gamma=\frac{1}{2\lambda}(-\alpha+i\beta)$$

und daher wegen (9): $|\gamma|^2=\lambda^{-2}(\nabla\phi)(p)$. Damit ist die Behauptung (19) bewiesen.

2.4 Aus (11) folgt:

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c'_n(r)|^2=\int_0^{2\pi} f_r^2(r,\theta)\,d\theta$$

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n^2\,|c_n(r)|^2=\int_0^{2\pi} f_\theta^2(r,\theta)\,d\theta$$

Hieraus und aus (17), (19) ergibt sich wegen $c_{-1} = \overline{c_1}$:

$$4\pi\lambda^{-2}(\nabla\phi)(p)(G'_\lambda(\operatorname{Cos} r))^2 \operatorname{Sin}^2 r \leqq \int_0^{2\pi} f_r^2(r, \theta)\, d\theta$$

$$4\pi\lambda^{-2}(\nabla\phi)(p)(F'_\lambda(\operatorname{Cos} r))^2 \operatorname{Sin}^2 r \leqq \int_0^{2\pi} f_\theta^2(r, \theta)\, d\theta$$

Daraus folgt nun wegen (10):

$$4\pi\lambda^{-2} J(\operatorname{Cos} d)(\nabla\phi)(p) \leqq \lambda \tag{24}$$

mit

$$J(y) = \int_1^y (x^2-1)(G'_\lambda(x))^2\, dx + \int_1^y (F'_\lambda(x))^2\, dx, \qquad y > 1. \tag{25}$$

2.5 Nun haben wir noch $J(y)$ nach unten abzuschätzen! Aus (18) folgt:

$$\int_1^y G_\lambda \frac{d}{dx}(x^2-1)G'_\lambda\, dx + \int_1^y \left(\lambda - \frac{1}{x^2-1}\right) G_\lambda^2\, dx = 0.$$

Daraus ergibt sich durch partielle Integration des ersten Terms:

$$\int_1^y (x^2-1)(G'_\lambda)^2\, dx = \tfrac{1}{2}(y^2-1)\frac{d}{dy} G_\lambda^2(y) + \int_1^y \left(\lambda - \frac{1}{x^2-1}\right) G_\lambda^2\, dx. \tag{26}$$

Wegen (17) ist aber

$$\int_1^y \left(\lambda - \frac{1}{x^2-1}\right) G_\lambda^2\, dx = \lambda \int_1^y (x^2-1)(F'_\lambda(x))^2\, dx - \int_1^y (F'_\lambda(x))^2\, dx.$$

Somit folgt aus (25), (26):

$$J(y) = \tfrac{1}{2}(y^2-1)\frac{d}{dy} G_\lambda^2(y) + \lambda \int_1^y (x^2-1)(F'_\lambda(x))^2\, dx. \tag{27}$$

Aus (17) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(y^2-1)\frac{d}{dy} G_\lambda^2(y) &= \tfrac{1}{2}(y^2-1)\frac{d}{dy}(y^2-1)(F'_\lambda(y))^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(y^2-1)\left[F'_\lambda(y)\frac{d}{dy}(y^2-1)F'_\lambda(y) + F''_\lambda(y)(y^2-1)F'_\lambda(y)\right].\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (14):

$$\tfrac{1}{2}(y^2-1)\frac{d}{dy}G_\lambda^2(y) = -\lambda(y^2-1)F_\lambda(y)F_\lambda'(y) - y(y^2-1)(F_\lambda'(y))^2. \tag{28}$$

Weiter folgt aus (14)

$$\lambda\int_1^y F_\lambda \frac{d}{dx}(x^2-1)F_\lambda'\,dx + \lambda^2\int_1^y F_\lambda^2\,dx = 0.$$

Daraus ergibt sich durch partielle Integration des ersten Terms

$$\lambda\int_1^y (x^2-1)(F_\lambda'(x))^2\,dx = \lambda(y^2-1)F_\lambda(y)F_\lambda'(y) + \lambda^2\int_1^y F_\lambda^2(x)\,dx. \tag{29}$$

Nun folgt aus (27)–(29):

$$J(y) = \lambda^2\int_1^y F_\lambda^2(x)\,dx - \frac{y}{y^2-1}[(y^2-1)F_\lambda'(y)]^2.$$

Schliesslich folgt nochmals aus (14)

$$(y^2-1)F_\lambda'(y) = -\lambda\int_1^y F_\lambda(x)\,dx.$$

Somit wird

$$\lambda^{-2}J(y) = \int_1^y F_\lambda^2(x)\,dx - \frac{y}{y^2-1}\left(\int_1^y F_\lambda(x)\,dx\right)^2. \tag{30}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\left(\int_1^y F_\lambda(x)\,dx\right)^2 &\leqq \int_1^y \frac{1+x^2}{x^2}\,dx \cdot \int_1^y \frac{x^2}{1+x^2}F_\lambda^2(x)\,dx \\ &= \frac{y^2-1}{y}\int_1^y \frac{x^2}{1+x^2}F_\lambda^2(x)\,dx.\end{aligned}$$

Somit folgt aus (30)

$$\lambda^{-2}J(\operatorname{Cos} d) \geqq \int_1^{\operatorname{Cos} d} \frac{F_\lambda^2(x)}{1+x^2}\,dx.$$

Für $0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{4}$ gilt aber

$$F_\lambda(x) \geqq F_{1/4}(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \geqq 1.$$

(Siehe [4], Lemma 4 pag. 221). Somit wird

$$\lambda^{-2}J(\operatorname{Cos} d) \geqq \int_1^{\operatorname{Cos} d} \frac{F_{1/4}^2(x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\operatorname{Tg}^2(d/2)} F_{1/4}^2\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\frac{dt}{1+t^2}. \tag{31}$$

Nach [4], (21)–(23), pag. 219–220 gilt:

$$F_{1/4}\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = (1-t)^{1/2}E(t) \tag{32}$$

$$E(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1 - t\sin^2 u)^{-1/2}\,du = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 t^n \tag{33}$$

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{34}$$

Somit folgt aus (31)

$$\lambda^{-2}J(\operatorname{Cos} d) \geqq \int_0^{\operatorname{Tg}^2(d/2)} (1-t)\frac{E^2(t)}{1+t^2}\,dt. \tag{35}$$

Wegen (34) gilt für $0 \leqq \alpha < 1$, $0 \leqq t < 1$:

$$(1-\alpha t)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n/2}(\alpha^2 t)^{n/2}.$$

Daraus folgt nach der Ungleichung von Cauchy:

$$\frac{1}{1-\alpha t} \leqq \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 t^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^2 t)^n\right) = \frac{E(t)}{1-\alpha^2 t}.$$

Daraus ergibt sich für $\alpha = t$, $0 \leqq t < 1$:

$$E(t) \geqq \frac{1-t^3}{1-t^2} = 1 + \frac{t^2}{1+t} \geqq 1 + \frac{t^2}{2}$$

und somit

$$E^2(t) \geqq 1 + t^2.$$

Daher folgt aus (35)

$$\lambda^{-2} J(\operatorname{Cos} d) \geqq \int_0^{\operatorname{Tg}^2(d/2)} (1-t)\, dt = \tfrac{1}{2}\left(2 - \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2}\right) \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2}.$$

Damit folgt aus (24):

$$(\nabla\phi)(p) \leqq \lambda/4\pi I, \qquad I = \tfrac{1}{2}\left(2 - \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2}\right) \operatorname{Tg}^2 \frac{d}{2}.$$

Dies ist die in 1. (4) angekündigte Gradientenabschätzung.

LITERATUR

[1] HUBER, H., *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Mannigfaltigkeiten konstanter negativer Krümmung,* Archiv Math. (Basel) *26* (1975) 178–182.
[2] BUSER, P.; *Untersuchungen über den ersten Eigenwert des Laplace–Operators auf kompakten Flächen,* Dissertation Basel 1976.
[3] BUSER, P.; *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen,* Comment. Math. Helv. *54* (1979) 477–493.
[4] HUBER, H.; *Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen,* Comment. Math. Helv. *51* (1976) 215–231.
[5] JENNI, *F. Ueber das Spektrum des Laplace-Operators auf einer Schar kompakter Riemannscher Flächen,* Diss. Basel (1981).

Mathematisches Institut der Universität Basel
Rheinsprung 21 CH – 4051 Basel

Erhalten 8 August 1985