

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 62 (1987)

**Artikel:** Le groupe de Witt d'une surface réelle.  
**Autor:** Ayoub, Ghazi  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47341>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Le groupe de Witt d'une surface réelle

GHAZI AYOUB

### Introduction

En 1976, M. Knebusch a posé le problème suivant: Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $\mathbb{R}$ . Est-ce que le groupe de Witt de  $X$  est de type fini? Dans le cas d'un schéma de dimension 1, une réponse affirmative a été donnée par Knebusch lui-même pour  $X$  lisse [18], et par G. Dietel pour  $X$  quelconque [7]. Dans ce résumé de ma thèse (Lausanne 1985), je traite le cas affine  $X = \text{spec } A$ . Je démontre le résultat suivant:

**THÉORÈME.** *Si  $A$  est de dimension 2 et si le conoyau de  $\text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } \bar{A}$  ( $\bar{A}$  le normalisé de  $A$ ) est de type fini,  $W(A)$  est aussi de type fini (§11). En particulier si  $A$  est normal de dimension 2,  $W(A)$  est de type fini.*

Je donne ensuite des exemples de surfaces réelles non normales dont le groupe de Witt n'est pas de type fini (§11).

### §1. Préliminaires

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire dans lequel 2 est inversible. Soit  $\mathbf{P}(A)$  la catégorie des  $A$ -modules projectifs de type fini. Une *forme quadratique* sur  $M \in \mathbf{P}(A)$  est une application  $q: M \rightarrow A$  telle que:

i)  $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$  pour tout  $x \in M$ ,  $\lambda \in A$ ,

ii)  $b_q(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$  définit une forme bilinéaire symétrique  $b_q: M \times M \rightarrow A$ .

Soit  $d_q: M \rightarrow M^* = \text{Hom}_A(M, A)$  l'homomorphisme défini par  $d_q(x)(y) = B_q(x, y)$ . Si  $d_q$  est bijectif,  $q$  est dite *non-dégénérée*, et le couple  $(M, q)$  est appelé un *espace quadratique* sur  $A$ .

Une *isométrie* entre deux espaces quadratiques  $(M_1, q_1)$  et  $(M_2, q_2)$  est un isomorphisme  $f: M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$  tel que  $q_2(f(x_1)) = q_1(x_1)$  pour tout  $x_1 \in M_1$ . On note  $f: (M_1, q_1) \xrightarrow{\sim} (M_2, q_2)$ .



Notons **Quad**  $A$  la catégorie ayant pour objets les espaces quadratiques sur  $A$  et pour morphismes les isométries. Sur **Quad**  $A$  on définit la somme orthogonale par  $(M_1, q_1) \perp (M_2, q_2) = (M_1 \oplus M_2, q)$  où  $q(x_1 \oplus x_2) = q_1(x_1) + q_2(x_2)$  et le produit tensoriel  $\otimes$  par  $(M_1, q_1) \otimes (M_2, q_2) = (M_1 \otimes_A M_2, q)$  où  $q(x_1 \otimes x_2) = q_1(x_1) \cdot q_2(x_2)$  pour tout  $x_i \in M_i$ . Pour tout  $P \in \mathbf{P}(A)$  soit  $H(P)$  l'espace quadratique  $(P \oplus P^*, d_p)$  où  $d_p(x \oplus f) = f(x)$ . L'espace  $H(P)$  est dit *hyperbolique*. Posons  $\hat{W}(A) = K_0(\mathbf{Quad} A)$ , le groupe de Grothendieck de **Quad**  $A$  ([2], chap. 7). Le produit tensoriel des espaces quadratiques induit sur  $\hat{W}(A)$  une structure d'anneau commutatif. Soit  $\hat{H}(A)$  l'idéal engendré par les éléments de la forme  $[H(P)] - [H(Q)]$  avec  $P, Q \in \mathbf{P}(A)$ . L'anneau  $W(A) = \hat{W}(A)/\hat{H}(A)$  est appelé *l'anneau de Witt de  $A$* . La classe dans  $W(A)$  de l'espace  $(M, q)$  est notée  $\{(M, q)\}$ . Tout homomorphisme d'anneaux  $f: A \rightarrow B$  induit un homomorphisme  $f_*: W(A) \rightarrow W(B)$  défini par  $f_*\{(M, q)\} = \{(M \otimes_A B, q \otimes B)\}$ , où  $(q \otimes B)(x \otimes b) = f(q(x)) \cdot b^2$  pour tout  $x \in M, b \in B$ . Dans la suite,  $A$  désigne toujours une algèbre affine sur le corps  $\mathbb{R}$  des réels.

## §2. Réduction du cas général

Puisque  $A$  est noethérien, il est produit fini d'anneaux  $A_1 \times \cdots \times A_n$  où les seuls idempotents de  $A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont 0, 1. Puisque  $W(A_1 \times \cdots \times A_n) = W(A_1) \times \cdots \times W(A_n)$ , il suffit de traiter le cas où les seuls idempotents de  $A$  sont 0 et 1. Ceci revient à supposer que *spec*  $A$  est connexe. En particulier le rang de tout  $P \in \mathbf{P}(A)$  est bien défini.

Soit  $A_{\text{red}} = A/N$  où  $N$  est le nilradical de  $A$ . En vertu de ([25], corol. 23, p. 270), l'homomorphisme canonique  $W(A) \rightarrow W(A_{\text{red}})$  est bijectif. On peut donc supposer que  $A$  est réduit.

**THÉORÈME 2.1.** *Soit  $S^{-1}A$  l'anneau total des fractions de  $A$  où  $S$  est l'ensemble des éléments non diviseurs de zéro, et soit  $\bar{A}$  la fermeture intégrale de  $A$  dans  $S^{-1}A$ . L'anneau  $S^{-1}A$  est produit direct d'un nombre fini de corps  $K_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) et  $\bar{A}$  est produit direct de sous-anneaux intégralement clos  $A'_i$  de  $K_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ).*

*Preuve.* ([4], chap. IV, §2, no. 5, prop. 10 et chap. V, §1, no. 2, corol. 1 de la prop. 9.)

Dans la suite on gardera les notations suivantes:

$\mathcal{C} = \{a \in A/a\bar{A} \subset A\}$  est le conducteur de  $\bar{A}$  dans  $A$ ,  $i: A \rightarrow \bar{A}$  est l'injection

canonique,

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & \bar{A} \\
 j \downarrow & & \downarrow k \\
 A/C & \xrightarrow{l} & \bar{A}/C
 \end{array}$$

est le diagramme commutatif où  $l$  induite par  $i$  et  $j, k$  sont les surjections canoniques. De plus,  $K$  désignera toujours le corps des fractions de  $A$  quand celui-ci est intègre. Pour tout groupe abélien  $G$  on notera  ${}_2G$  le sous-groupe des éléments d'ordre  $\leq 2$ .

### §3. Les invariants classiques

#### a) L'homomorphisme rang

Le rang de tout espace hyperbolique est pair. L'homomorphisme  $\rho : W(A) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  défini par:  $\rho\{(M, q)\} = \text{rang } M \text{ modulo } 2$  est donc un homomorphisme d'anneaux qu'on appelle *le rang*. Le noyau de  $\rho$  est noté  $I(A)$ .

#### b) Le discriminant

Le produit tensoriel de deux espaces quadratiques de rang 1 est aussi de rang 1. Le carré d'un tel espace est isométrique à l'espace unité  $(A, m)$  où  $m : A \times A \rightarrow A$  est la multiplication. Donc l'ensemble des classes d'isométries des espaces quadratiques sur  $A$  de rang 1 possède une structure de groupe abélien d'exposant 2. On le note  $Q(A)$ . Soit  $(M, q)$  un espace quadratique de

$$\text{rang } r \cdot \text{Posons } d(M, q) = (\wedge^r M, (-1)^{r(r-1)/2} \wedge^r q) \text{ où}$$

$\wedge^r q(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = \det(B_q(x_i, x_j))$ . Le discriminant de  $(M, q)$  est la classe de  $d(M, q)$  dans  $Q(A)$ . Le discriminant d'un espace hyperbolique est trivial, mais  $d$  ne définit pas un homomorphisme de groupes de  $W(A)$  dans  $Q(A)$ . Seulement la restriction de  $d$  à  $I(A)$  est un homomorphisme, appelé *le discriminant*.

#### c) L'invariant de Clifford

Soit  $(M, q) \in \mathbf{Quad} A$ . Notons  $T(M) = A \oplus M \oplus M \otimes M \oplus \dots$  l'algèbre tensorielle de  $M$ . Soit  $J(q)$  l'idéal engendré par les éléments  $x \otimes x - q(x)$  pour tout  $x \in M$ . L'algèbre de Clifford de  $(M, q)$  est  $C(M, q) = T(M)/J(q)$ . La  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation  $T(M) = T(M)^+ \oplus T(M)^-$  où  $T(M)^+ = \bigoplus_0^\infty M^{\otimes 2n}$  et  $T(M)^- = \bigoplus_0^\infty M^{\otimes 2n+1}$  induit une  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation  $C(M, q) = C(M, q)^+ \oplus C(M, q)^-$ .

Soit  $Br(A)$  le groupe de Brauer de  $A$  ([1] ou [20]). Considérons l'application

$\omega : W(A) \rightarrow {}_2Br(A)$  qui est donnée par

$$\omega\{(M, q)\} = \begin{cases} \text{la classe } [C(M, q)] \in Br(A) \text{ si rang } M \text{ est pair} \\ \text{la classe } [C(M, q)^+] \in Br(A) \text{ si rang } M \text{ est impair.} \end{cases}$$

En général,  $\omega$  ne définit pas un homomorphisme de groupes, mais si on restreint  $\omega$  au sous-groupe  $D(A) = \text{Ker}(d : I(A) \rightarrow Q(A))$ , on obtient un homomorphisme. La classe  $\omega\{(M, q)\}$  est appelée *l'invariant de Clifford de  $(M, q)$* .

d) *La signature totale*

Un ordre sur  $K$  est un sous-ensemble  $E$  de  $K$  tel que  $E + E \subset E$ ,  $E \cdot E \subset E$  et tel que  $K$  soit la réunion disjointe de  $E$ ,  $-E$  et  $\{0\}$ . Soit  $(M, q) \in \mathbf{Quad} K$  et soit  $l_1, \dots, l_r$  une base orthogonale de  $(M, q)$ . La signature de  $(M, q)$  par rapport à l'ordre  $E$  est  $\sigma_E(M, q) = \text{nombre des } q(l_i) \in E - \text{nombre des } q(l_i) \in -E$ . Par un théorème de Sylvester,  $\sigma_E(M, q)$  ne dépend pas du choix de la base orthogonale. Puisque la signature d'un espace hyperbolique est zéro,  $\sigma_E$  définit un épimorphisme d'anneaux  $\sigma_E : W(K) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ . Réciproquement, tout épimorphisme d'anneaux  $W(K) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$  coïncide avec  $\sigma_E$  pour un ordre unique  $E$  de  $K$  ([19], chap. 5, th. 5.3). L'homomorphisme  $\prod_E \sigma_E : W(K) \rightarrow \prod_E \mathbb{Z}$  (où  $E$  parcourt l'ensemble des ordres sur  $K$ ) est appelé la signature totale de  $K$ . Par exemple, si  $K = \mathbb{R}$ , le seul ordre est  $E = \mathbb{R}^+ - \{0\}$  et  $\sigma_E$  est un isomorphisme.

Sur  $A$ , une signature est par définition un épimorphisme d'anneaux:  $W(A) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ . Soit  $A(\mathbb{R}) = \{m \in \text{Specm } A \mid A/m = \mathbb{R}\}$ . La composition  $\sigma_m : W(A) \rightarrow W(A/m) = W(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$  définit une signature sur  $A$  pour tout  $m \in A(\mathbb{R})$ . Soient  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  les composantes connexes de  $A(\mathbb{R})$ . En vertu de ([17], chap. 5, §2), les seules signatures sur  $A$  sont  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  où  $\sigma_i = \sigma_{m_i}$  pour  $m_i \in \gamma_i$ . L'homomorphisme  $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_r : W(A) \rightarrow \mathbb{Z}^r$  est la *signature totale de  $A$* .

§4. **Recollements d'espaces quadratiques**

Considérons le diagramme cartésien décrit au §2.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & \bar{A} \\ j \downarrow & & \downarrow k \\ A/\mathcal{U} & \xrightarrow{\tau} & \bar{A}/\mathcal{U} \end{array}$$

Soient  $(Q_1, q_1) \in \mathbf{Quad} \bar{A}$ ,  $(Q_2, q_2) \in \mathbf{Quad} A/\mathcal{U}$  et soit  $f$  une isométrie de  $k_*(Q_1, q_1)$  sur  $l_*(Q_2, q_2)$ . Notons  $M((Q_1, q_1), (Q_2, q_2), f)$  ou simplement

$M(Q_1, Q_2, f)$  l'ensemble des couples  $(x_1, x_2) \in Q_1 \times Q_2$  tels que  $f(k_*(x_1)) = l_*(x_2)$ . Le groupe  $M(Q_1, Q_2, f)$  est un  $A$ -module projectif de type fini avec l'action suivante de  $A$ :  $a(x_1, x_2) = (i(a) \cdot x_1, j(a) \cdot x_2)$  ([21], §2). On peut munir  $M(Q_1, Q_2, f)$  d'une forme quadratique non-dégénérée  $q(f)$ , définie par  $q(f)(x_1, x_2) = a$  où  $a$  est l'unique élément de  $A$  tel que  $i(a) = q_1(x_1)$  et  $j(a) = q_2(x_2)$ . Les lemmes suivants sont bien connus dans le cas linéaire ([21], §2). Le cas quadratique en résulte facilement.

**LEMME 4.1.** *Soit  $(Q, q) \in \mathbf{Quad} A$ . Notons  $Id$  l'isométrie entre  $k_*(i_*(Q, q))$  et  $l_*(j_*(Q, q))$ . L'application  $x \mapsto (i_*(x), j_*(x))$  induit une isométrie de  $(Q, q)$  sur  $M(i_*(Q), j_*(Q), Id)$ . En particulier,  $H(A^n)$  et  $M(H(\bar{A}^n), H(A/\mathfrak{U}^n), Id)$  sont isométriques.  $\square$*

**LEMME 4.2.** *Soient  $(Q_1, q_1), (Q'_1, q'_1) \in \mathbf{Quad} \bar{A}$  et  $(Q_2, q_2), (Q'_2, q'_2) \in \mathbf{Quad} A/\mathfrak{U}$ . L'application  $((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) \mapsto ((x_1, x'_1), (x_2, x'_2))$  induit une isométrie de  $M(Q_1, Q_2, f) \perp M(Q'_1, Q'_2, f')$  sur  $M(Q_1 \perp Q'_1, Q_2 \perp Q'_2, f \oplus f')$ .  $\square$*

**LEMME 4.3.** *Pour tout  $f \in O_{2n}(\bar{A}/\mathfrak{U})$  et  $\varepsilon \in EO_{2n}(\bar{A}/\mathfrak{U})$ , on a une isométrie  $M(H(\bar{A}^n), H(A/\mathfrak{U}^n), f \circ \varepsilon) \xrightarrow{\cong} M(H(\bar{A}^n), H(A/\mathfrak{U}^n), f)$ .  $\square$*

**LEMME 4.4.** *Soit  $O(\bar{A}/\mathfrak{U}) = \lim_{\rightarrow} O_{2n}(\bar{A}/\mathfrak{U})$ , la limite étant prise par rapport aux applications suivantes:*

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \in O_{2n}(\bar{A}/\mathfrak{U}) \mapsto \alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O_{2(n+1)}(\bar{A}/\mathfrak{U}).$$

i) *Pour tout  $\alpha \in O_{2n}(\bar{A}/\mathfrak{U})$ , on a une isométrie:*

$$M(H(\bar{A}^n), H(A/\mathfrak{U}^n), \alpha) \perp M(H(\bar{A}^m), H(A/\mathfrak{U}^m), Id) \xrightarrow{\cong} M(H(\bar{A}^{n+m}), H(A/\mathfrak{U}^{n+m}), \alpha').$$

ii) *Pour tout  $\alpha \in O_{2n}(\bar{A}/\mathfrak{U})$  et  $\beta \in O_{2m}(\bar{A}/\mathfrak{U})$  on a*

$$\{M(H(\bar{A}^{n+m}), H(A/\mathfrak{U}^{n+m}), \alpha \circ \beta)\} \\ = \{M(H(\bar{A}^n), H(A/\mathfrak{U}^n), \alpha)\} + \{M(H(\bar{A}^m), H(A/\mathfrak{U}^m), \beta)\},$$

où  $\{(M, q)\}$  désigne la classe de  $(M, q)$  dans le groupe de Witt de  $A$ .  $\square$

**§5. Le groupe de Witt d'une  $\mathbb{R}$ -algèbre affine régulière  $A$  de dimension  $\leq 2$**

En vertu du théorème 2.1,  $A$  est produit direct d'un nombre fini d'anneaux réguliers intègres. On peut donc supposer que  $A$  est intègre. Soit  $(X, O_x)$  un schéma et  $\mathbb{G}_m$  le faisceau des unités. Soit  $\mu_2$  le sous-faisceau des racines carrées de l'unité. Considérons la suite de Kummer  $0 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{2} \mathbb{G}_m \rightarrow 0$ . Cette suite est exacte en topologie étale ([20], p. 66). On en déduit une suite exacte longue  $\dots \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{2} H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^{i+1}(X, \mu_2) \rightarrow \dots$ .

**PROPOSITION 5.1.** *Soit  $X = \text{Spec } A$ . Il existe un isomorphisme de suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^0(X, \mu_2) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^0(X, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{2} & H_{\text{ét}}^0(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^1(X, \mu_2) \\
 & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 0 & \longrightarrow & \mu_2(A) & \longrightarrow & U(A) & \xrightarrow{2} & U(A) & \longrightarrow & Q(A) \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{2} H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m) \\
 & & & & & & & & \uparrow \wr \qquad \qquad \uparrow \wr \\
 & & & & & & & & \longrightarrow \text{Pic } A \xrightarrow{2} \text{Pic } A
 \end{array}$$

*Preuve.* [20], pp. 123–126.  $\square$

**PROPOSITION 5.2.**  *$H_{\text{ét}}^1(\text{Spec } A, \mu_2)$  se surjecte sur  ${}_2\text{Pic } A$  et  $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } A, \mu_2)$  se surjecte sur  ${}_2\text{Br}(A)$ .*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^1(X, \mu_2) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{2} & H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^2(X, \mu_2) \\
 & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & & & \\
 & & \text{Pic } A & \xrightarrow{2} & \text{Pic } A & & & & \\
 & & & & & & & & \longrightarrow H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{2} H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m) \\
 & & & & & & & & \uparrow \wr \qquad \qquad \uparrow \wr \\
 & & & & & & & & \text{Br } (A) \xrightarrow{2} \text{Br } (A)
 \end{array}$$

*Preuve.* On a le diagramme commutatif (avec la première ligne exacte) où les

deux dernières flèches verticales sont des isomorphismes ([11], p. 76). D'où la conclusion.  $\square$

**PROPOSITION 5.3.** *Soit  $X$  une variété lisse sur  $\mathbb{R}$  et  $F$  un faisceau sur  $X$ , fini et localement constant. Alors  $H_{\text{ét}}^i(X, F)$  est fini pour tout  $i$ .*

*Preuve.* Puisque l'extension  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$  est étale, la variété  $X' = X \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  est lisse ([20], chap. 1, §3). En vertu de ([30], exp. 16, th. 5.2),  $H_{\text{ét}}^i(X, F)$  est fini. Soit  $\pi: X \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow X$  la première projection. C'est un revêtement galoisien de groupe de galois  $G = \{1, \sigma\}$  où  $\sigma$  est l'automorphisme induit par la conjugaison complexe. D'après ([20], chap. 3, th. 2.20), il existe une suite spectrale de Hochschild-Serre:

$$E_2^{p,q} = H_{\text{ét}}^p(G, H_{\text{ét}}^q(X', F)) \Rightarrow E^\infty = H_{\text{ét}}^{p+q}(X, F).$$

Soit  $E^i \supset E_0^i \supset E_1^i \supset \dots \supset E_{i+1}^i = 0$  une filtration de  $E^i$  telle que  $E_j^i/E_{j+1}^i = E_\infty^{j,i-j}$  pour tout  $0 \leq j \leq i$ . Pour démontrer que  $E^i$  est fini, il suffit de démontrer que les  $E_\infty$  sont finis. Il suffit donc de démontrer que tous les  $E_2^{p,q}$  sont finis. Or,  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est cyclique et  $H_{\text{ét}}^q(X', F)$  est fini. On en déduit que  $E_2^{p,q}$  est fini.  $\square$

**COROLLAIRE.** *Les groupes  $H_{\text{ét}}^1(\text{Spec } A, \mu_2)$  et  $H_{\text{ét}}^2(\text{Spec } A, \mu_2)$  sont finis. En particulier,  $Q(A)$ ,  ${}_2\text{Pic } A$  et  ${}_2\text{Br}(A)$  sont finis. Ces résultats restent valables si on remplace  $A$  par une variété réelle lisse.  $\square$*

Soit maintenant  $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_r: W(A) \rightarrow \mathbb{Z}^r$  la signature totale de  $A$ . Notons  $N(A)$  le noyau de l'homomorphisme  $d \times (\text{signature totale}): I(A) \rightarrow Q(A) \times \mathbb{Z}^r$ . L'invariant de Clifford définit un homomorphisme:  $N(A) \rightarrow {}_2\text{Br}(A)$  ([1], chap. 2).

**PROPOSITION 5.4.** *Si la dimension de  $A$  est 1, les espaces quadratiques sur  $K$  sont déterminés par  $\rho$ ,  $d$  et la signature totale.*

*Preuve.* Puisque le degré de transcendance de  $K$  sur  $\mathbb{R}$  est 1,  $K(\sqrt{-1})$  est un corps  $C_1$ . En vertu de ([8], corol. 2.11),  $I^2 K$  est sans torsion. Dans ce cas, les espaces quadratiques sur  $K$  sont déterminés par  $\rho$ ,  $d$  et la signature totale ([9], th. 2).  $\square$

**THÉORÈME 5.5.** *Pour toute  $\mathbb{R}$ -algèbre affine régulière  $A$  de dimension 1,  $W(A)$  est de type fini.*

*Preuve.* Soit  $i_*: I(A) \rightarrow I(K)$  l'homomorphisme canonique injectif ([1], chap.

I, prop. 4.10). Toute signature  $\sigma:W(K)\rightarrow\mathbb{Z}$  de  $K$  induit une signature  $\sigma\circ i_*:W(A)\rightarrow\mathbb{Z}$  de  $A$ . Mais on a un nombre fini de signatures sur  $A$ . Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$  les signatures de  $A$  qui sont induites par celles de  $K$ . On peut donc définir un homomorphisme  $j$  qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} I(A) & \xrightarrow{d \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_s} & Q(A) \times \mathbb{Z}^s \\ \downarrow i_* & & \downarrow \quad \downarrow j \\ I(K) & \xrightarrow{d \times \text{sign. totale de } K} & Q(K) \times \Pi\mathbb{Z} \end{array}$$

En vertu de la proposition 5.4, la deuxième flèche horizontale est injective. Donc  $I(A)$  s'injecte dans  $Q(A) \times \mathbb{Z}^s$  qui est de type fini.  $\square$

**PROPOSITION 5.6.** *Si la dimension de  $A$  est 2, les espaces quadratiques sur  $K$  sont déterminés par  $\rho, d$ , signature totale et l'invariant de Clifford  $\omega$ .*

*Preuve.* Puisque le degré de transcendance de  $K$  sur  $\mathbb{R}$  est 2,  $K(\sqrt{-1})$  est un corps  $C_2$ . On en déduit que  $I^3K$  est sans torsion ([8], corol. 2.11). Dans ce cas, les espaces quadratiques sur  $K$  sont déterminés par  $\rho, d$ , signature totale et  $\omega$  ([9], th. 3).  $\square$

**THÉORÈME 5.7.** *Pour toute  $\mathbb{R}$ -algèbre affine régulière  $A$  de dimension 2, le groupe  $W(A)$  est de type fini.*

*Preuve.* comme dans le théorème 5.5, on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} I(A) & \xrightarrow{d \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_s} & Q(A) \times \mathbb{Z}^s \\ \downarrow i_* & & \downarrow \quad \downarrow j \\ I(K) & \xrightarrow{d \times \text{sign. totale de } K} & Q(K) \times \Pi\mathbb{Z} \end{array}$$

où  $i_*$  est l'homomorphisme canonique injectif ([22], th. 17). Notons  $N(A)$  (resp.  $N(K)$ ) le noyau de la première flèche horizontale (resp. la deuxième flèche horizontale). Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} N(A) & \xrightarrow{\omega} & {}_2\text{Br}(A) \\ \downarrow i_* & & \downarrow \\ N(K) & \xrightarrow{\omega} & {}_2\text{Br}(K) \end{array}$$

Par la proposition 5.6, la deuxième flèche horizontale est injective. Donc  $N(A)$  s'injecte dans  ${}_2\text{Br}(A)$  qui est fini, d'où la conclusion puisque  $Q(A)$  est fini.  $\square$

### §6. Le groupe de Witt d'une $\mathbb{R}$ -algèbre affine $A$ de dimension $\leq 1$

LEMME 6.1. Soit  $A$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre affine de dimension 0. Le groupe de Witt  $W(A)$  est de type fini.

*Preuve.* L'anneau  $A$ , étant réduit, noethérien et de dimension 0, est un produit fini d'extensions finies de  $\mathbb{R}$ , ce qui veut dire que  $A \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q$ . Comme  $W(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$  et  $W(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ([19], chap. 2), le théorème en découle.  $\square$

Dans la suite de ce paragraphe, supposons que la dimension de  $A$  est 1. Il s'ensuit que la dimension de  $\bar{A}$  est 1 et que celle de  $A/\mathfrak{C}$  et de  $\bar{A}/\mathfrak{C}$  est nulle. Considérons le diagramme cartésien:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & \bar{A} \\ j \downarrow & & \downarrow k \\ A/\mathfrak{C} & \xrightarrow{i} & \bar{A}/\mathfrak{C} \end{array}$$

PROPOSITION 6.2. Pour tout  $x \in \text{Ker}(i_* \oplus j_* : W(A) \rightarrow W(\bar{A}) \oplus W(A/\mathfrak{C}))$ , il existe  $(M, q) \in \mathbf{Quad} A$ ,  $p \in \mathbf{P}(\bar{A})$  et  $Q \in \mathbf{P}(A/\mathfrak{C})$  tels que  $x$  est la classe de  $(M, q)$ ,  $i_*(M, q) \xrightarrow{\sim} H(P)$  et  $j_*(M, q) \xrightarrow{\sim} H(Q)$ .

*Preuve.* Soit  $x = \{(M_1, q_1)\} \in \text{Ker } i_* \oplus j_*$ . Il existe  $P_1, P_2 \in \mathbf{P}(\bar{A})$  et  $Q_1, Q_2 \in \mathbf{P}(A/\mathfrak{C})$  tels que  $i_*(M_1, q_1) \perp H(P_1) \xrightarrow{\sim} H(P_2)$  et  $j_*(M_1, q_1) \perp H(Q_1) \xrightarrow{\sim} H(Q_2)$ . Soit  $P'_1 \in \mathbf{P}(\bar{A})$  tel que  $P'_1 \oplus P_1 \xrightarrow{\sim} \bar{A}^n$  et soit  $Q'_1 \in \mathbf{P}(A/\mathfrak{C})$  tel que  $Q'_1 \oplus Q_2 \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{C}^m$ . Posons

$$(M, q) = (M_1, q_1) \perp H(A^n) \perp H(A^m),$$

$$P = P'_1 \oplus P_2 \oplus \bar{A}^m \quad \text{et} \quad Q = Q'_1 \oplus Q_2 \oplus A/\mathfrak{C}^n.$$

Les assertions de la proposition sont alors vérifiées.  $\square$

PROPOSITION 6.3. Pour tout  $x \in \text{Ker}(i_* \oplus j_*)$ , il existe  $\theta \in O_2(\bar{A}/\mathfrak{C})$  tel que  $x = \{(M(H(\bar{A}), H(A/\mathfrak{C}), \theta), q(\theta))\}$ .

*Preuve.* D'après la proposition précédente, il existe  $(M, q) \in \mathbf{Quad} A$ ,  $P \in \mathbf{P}(\bar{A})$  et  $Q \in \mathbf{P}(A/\mathfrak{C})$  tels que  $(M, q) \xrightarrow{\sim} M(H(P), H(Q), Id)$ . Soit  $2n$  le rang de  $M$ . Puisque  $A/\mathfrak{C}$  et  $\bar{A}/\mathfrak{C}$  sont de dimension 0, ils sont semi-locaux. Il existe donc un isomorphisme  $\alpha : P \otimes_{\bar{A}} \bar{A}/\mathfrak{C} \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{C}^n \otimes_{A/\mathfrak{C}} \bar{A}/\mathfrak{C} = Q \otimes_{A/\mathfrak{C}} \bar{A}/\mathfrak{C}$ . Notons  $S$  le  $A$ -module projectif  $M(P, A/\mathfrak{C}^n, \alpha)$ , et soit  $R \in \mathbf{P}(A)$  tel que  $R \oplus S \xrightarrow{\sim} A^m$ . On a  $(M, q) \perp H(R) \xrightarrow{\sim} M(H(\bar{A}^m), H(A/\mathfrak{C}^m), \theta_1)$  où  $\theta_1 \in O_{2m}(\bar{A}/\mathfrak{C})$ . En vertu de ([34],



th. 28), on a  $O_{2m}(\bar{A}/\mathbb{C}) = O_2(\bar{A}/\mathbb{C}) \times EO_{2m}(\bar{A}/\mathbb{C})$  pour tout  $m \geq 2$ . Donc  $\theta_1 = \theta \circ \varepsilon$  où  $\theta \in O_2(\bar{A}/\mathbb{C})$  et  $\varepsilon \in EO_{2m}(\bar{A}/\mathbb{C})$ . D'après le lemme 4.4,  $\{M(H(\bar{A}^m), H(A/\mathbb{C}^m), \theta \circ \varepsilon)\}$  et  $\{M(H(\bar{A}^2), H(A/\mathbb{C}^2), \theta)\}$  sont égales, d'où la conclusion.  $\square$

**PROPOSITION 6.4.** *Soit  $a \in U(\bar{A}/\mathbb{C})$ . Si  $\theta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ , la classe de l'espace  $M(H(\bar{A}), H(A/\mathbb{C}), \theta)$  est nulle dans  $W(A)$ .*

*Preuve.* D'après ([34], lemme 1.1.), la matrice

$$\theta' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appartient à  $EO_4(\bar{A}/\mathbb{C})$ . Si on applique le lemme 4.3 avec  $f = Id$  et  $\varepsilon = \theta'$ , on trouve que  $M(H(\bar{A}^2), H(A/\mathbb{C}^2), \theta') \xrightarrow{\cong} M(H(\bar{A}^2), H(A/\mathbb{C}^2), Id) \xrightarrow{\cong} H(A^2)$ . Par le lemme 4.4,  $M(H(\bar{A}), H(A/\mathbb{C}), \theta) \perp H(A)$  et  $M(H(\bar{A}^2), H(A/\mathbb{C}^2), \theta')$  sont isométriques, d'où la conclusion.  $\square$

**THÉORÈME 6.5.** *Le noyau de  $i_* \oplus j_*$  est fini.*

*Preuve.* Soit  $x \in \text{Ker}(i_* \oplus j_*)$ . Il existe, par la proposition 6.4,  $\theta \in O_2(\bar{A}/\mathbb{C})$  tel que  $x = \{M(H(\bar{A}), H(A/\mathbb{C}), \theta)\}$ . En vertu de ([3], prop. 4.4.1),  $O_2(\bar{A}/\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H_2(\bar{A}/\mathbb{C}) \times \mathbb{Z}_2(\bar{A}/\mathbb{C})$  où  $H_2(\bar{A}/\mathbb{C})$  est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$  et  $\mathbb{Z}_2(\bar{A}/\mathbb{C})$  est le groupe des fonctions localement constantes de  $\text{Spec } \bar{A}/\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . D'après le lemme 4.4, pour tout  $\alpha, \beta \in O_2(\bar{A}/\mathbb{C})$ ,  $\{M(H(\bar{A}), H(A/\mathbb{C}), \alpha \circ \beta)\} = \{M(H(\bar{A}), H(A/\mathbb{C}), \alpha)\} + \{M(H(\bar{A}), H(A/\mathbb{C}), \beta)\}$ . Si  $\alpha \in H_2(\bar{A}/\mathbb{C})$ ,  $\{M(H(\bar{A}), H(A/\mathbb{C}), \alpha)\}$  est nulle par la proposition 6.5. De plus,  $\mathbb{Z}_2(\bar{A}/\mathbb{C})$  est fini car  $\bar{A}/\mathbb{C}$  est noethérien, d'où la conclusion.  $\square$

**THÉORÈME 6.6.** *Le groupe  $W(A)$  est de type fini.*

*Preuve.* D'après le théorème 2.1,  $\bar{A}$  est produit direct d'un nombre fini d'algèbres affines intégralement closes. Donc, par le théorème 5.5,  $W(\bar{A})$  est de type fini. En vertu du lemme 6.1,  $W(A/\mathbb{C})$  est de type fini. D'où la conclusion en utilisant le théorème précédent.  $\square$

### §7. Le groupe de Picard d'une $\mathbb{R}$ -algèbre affine régulière $A$

Soit  $X = \text{Spec } A$  et  $Y$  une variété projective réelle contenant  $X$  et dans laquelle  $X$  est un ouvert. En vertu de ([15], Main th. 1, p. 132), on peut supposer que  $Y$  est lisse. Notons  $Y' = Y \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . Puisque  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$  est étale,  $Y'$  est une variété lisse. Soit  $\pi : Y' \rightarrow Y$  la première projection. L'application  $\pi$  est un revêtement galoisien ([20], p. 43–44) de groupe de Galois  $G = \{1, \sigma\}$ .

**THÉORÈME 7.1.** *On a une suite exacte:*

$$1 \rightarrow \text{Pic } Y \rightarrow (\text{Pic } Y')^G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ (ou } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

*Preuve.* En vertu de ([20], chap. 3, th. 2.20), il existe une suite spectrale  $H_{\text{ét}}^p(G, H_{\text{ét}}^q(Y', \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(Y, \mathbb{G}_m)$ .

En particulier, on a la suite exacte:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{\text{ét}}^1(G, H_{\text{ét}}^0(y', \mathbb{G}_m)) &\rightarrow H_{\text{ét}}^1(Y, \mathbb{G}_m) \\ &\rightarrow H_{\text{ét}}^0(G, H_{\text{ét}}^1(Y', \mathbb{G}_m)) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(G, H_{\text{ét}}^0(Y', \mathbb{G}_m)). \end{aligned}$$

Puisque  $Y'$  possède au plus deux composantes irréductibles,  $H_{\text{ét}}^0(Y', \mathbb{G}_m) = \mathbb{C}^*$  (ou  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ ). D'où la conclusion, car  $H_{\text{ét}}^1(Y', \mathbb{G}_m) = \text{Pic } Y'$  et  $H_{\text{ét}}^1(Y, \mathbb{G}_m) = \text{Pic } Y$ .  $\square$

**THÉORÈME 7.2.**  *$\text{Pic } Y'$  contient un sous-groupe  $\text{Pic}^0 Y'$  qui est isomorphe à  $\mathbb{C}^n/L$  où  $L$  est un réseau de  $\mathbb{C}^n$ . De plus, le groupe  $NS(Y') = \text{Pic } Y' / \text{Pic}^0 Y'$  est de type fini.*

*Preuve.* [13], App. B, §5.  $\square$

**PROPOSITION 7.3.** *Le groupe  $\text{Pic } Y'$  est la somme directe de  $\text{Pic}^0 Y'$  et de  $NS(Y')$ .*

*Preuve.* Le groupe  $\text{Pic}^0 Y'$  est divisible, il est donc un  $\mathbb{Z}$ -module injectif ([14], p. 31, th. 7.1). Il s'ensuit que la suite

$$1 \rightarrow \text{Pic}^0 Y' \rightarrow \text{Pic } Y' \rightarrow NS(Y') \rightarrow 1 \text{ est scindée. } \square$$

Dans la suite, on aura besoin de quelques propriétés des groupes divisibles et dont les preuves sont faciles.

## LEMME 7.4.

- i) *Tout quotient d'une groupe divisible est divisible;*
- ii) *Une somme directe ou un produit direct de groupes est divisible si et seulement si chaque composante est divisible;*
- iii) *Un groupe abélien non trivial de type fini n'est jamais divisible;*
- iv) *Dans un groupe abélien, toute somme d'un sous-groupe divisible  $D$  et d'un groupe de type fini est une somme directe de  $D$  et d'un groupe de type fini;*
- v) *Tout quotient d'une somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini (resp. fini) est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini (resp. fini);*
- vi) *Soit  $0 = N_r \subset \dots \subset N_{i+1} \subset N_1 \subset \dots \subset N_0 = N$  une filtration d'un groupe abélien  $N$ . Si pour tout  $i$ ,  $N_i/N_{i+1}$  est divisible,  $N$  l'est aussi.*
- vii) *Soit  $0 \rightarrow G_1 \rightarrow G \rightarrow G_2 \rightarrow 0$  une suite exacte de groupes abéliens. Si  $G_1$  est la somme d'un groupe divisible et d'un groupe fini et si  $G_2$  est la somme d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini, alors  $G$  est la somme (directe) d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini. Si  $G$  est la somme d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini et si  $G_2$  est fini, alors  $G_1$  est la somme d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini.  $\square$*

PROPOSITION 7.5. *Le groupe  $(\text{Pic } Y')^G$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini.*

*Preuve.* Puisque  $NS(Y')$  est de type fini, il suffit, d'après le lemme 7.3, de vérifier l'assertion pour  $(\text{Pic}^0 Y')^\sigma$ .

En effet,  $\text{Pic}^0 Y' = \mathbb{C}^n/L$  et  $\sigma$  est un automorphisme continu du groupe de Lie réel  $\mathbb{C}^n/L$ . En vertu de ([33], chap. 2), il existe un unique automorphisme  $\bar{\sigma}$  du groupe de Lie réel  $\mathbb{C}^n$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \mathbb{C}^n \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \mathbb{C}^n/L & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{C}^n/L \end{array}$$

où  $\Pi$  est le revêtement universel de  $\mathbb{C}^n/L$ . Comme  $\bar{\sigma}$  est continue, il est  $\mathbb{R}$ -linéaire, et de plus,  $\bar{\sigma}^2 = Id$  et  $\bar{\sigma}(L) = L$ . D'après ([6] ou [32]), on a trois représentations entières non-décomposables du groupe  $\{id, \bar{\sigma}\}$ : la représentation triviale, celle donnée par le signe et la représentation régulière. Par un

changement de base dans le réseau  $L$ ,  $\tilde{\sigma}$  peut donc s'écrire sous la forme:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & 0 & & & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}} \end{array} \right)$$

Soit  $\{l_i\}_{i=1}^m \cup \{f_j\}_{j=1}^r \cup \{g_k, h_k\}_{k=1}^s$  la base choisie de  $L$ . La condition  $\tilde{\sigma}(x) - x \in L$  revient à dire que

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i l_i + \sum_{j=1}^r \beta_j f_j + \sum_{k=1}^s \gamma_k g_k + \delta_k h_k,$$

où

$$\alpha_i \in \mathbb{R}, \beta_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \gamma_k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \delta_k \in \mathbb{R}$$

avec  $\gamma_k - \delta_k$  dans  $\mathbb{Z}$ . Donc  $(\mathbb{C}^n/L)^\sigma$  est isomorphe à  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m \times (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^r \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^s$ . Mais  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est un groupe divisible et  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  est fini, d'où la conclusion.  $\square$

**PROPOSITION 7.6.** *Le groupe Pic  $Y$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini.*

*Preuve.* Considérons la suite exacte:

$$1 \rightarrow \text{Pic } Y \rightarrow (\text{Pic } Y')^G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ (ou } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

D'après la proposition 7.5,  $(\text{Pic } Y')^G$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini. Le lemme 7.4 (vii) nous permet alors de conclure.  $\square$

**THÉORÈME 7.7.** *Pour toute  $\mathbb{R}$ -algèbre affine régulière  $A$ , le groupe Pic  $A$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini.*

*Preuve.* Soit  $Y$  une variété projective lisse sur  $\mathbb{R}$  dans laquelle  $X$  est un ouvert. En vertu de ([5], th. 3.4), l'homomorphisme canonique  $\text{Pic } Y \rightarrow \text{Pic } X$  est surjectif. D'après la proposition 7.6,  $\text{Pic } Y$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini. Le théorème découle donc du Lemme 7.4(v).  $\square$

**§8. Le groupe de Picard d'une  $\mathbb{R}$ -algèbre affine  $A$  de dimension 1**

Considérons à nouveau le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & \bar{A} \\ j \downarrow & & \downarrow k \\ A/\mathfrak{C} & \xrightarrow{l} & \bar{A}/\mathfrak{C} \end{array}$$

Comme la dimension de  $A$  est 1, celle de  $\bar{A}$  est 1, celle de  $A/\mathfrak{C}$  et de  $\bar{A}/\mathfrak{C}$  est nulle. Il s'ensuit que  $\text{Pic } A/\mathfrak{C} = \text{Pic } \bar{A}/\mathfrak{C} = 1$ . La suite exacte de Mayer-Vietoris ([2], chap. 9, th. 5.3) devient:

$$1 \rightarrow U(A) \rightarrow U(\bar{A}) \oplus U(A/\mathfrak{C}) \xrightarrow{\phi_1} U(\bar{A}/\mathfrak{C}) \rightarrow \text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } \bar{A} \rightarrow 1,$$

où  $\phi_1(u \oplus v) = k(u)^{-1} \cdot l(v)$ . Cette suite induit une suite exacte:

$$1 \rightarrow \frac{U(\bar{A}/\mathfrak{C})}{l(U(A/\mathfrak{C})) \cdot k(U(\bar{A}))} \rightarrow \text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } \bar{A} \rightarrow 1.$$

Soient  $m_1, \dots, m_n$  les idéaux maximaux de  $A$  qui contiennent  $\mathfrak{C}$  et soient  $\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_r$  ceux de  $\bar{A}$  qui contiennent  $\mathfrak{C}$ . En vertu de ([4], chap. 4, §2), il existe des familles  $(Q(m_i))_{i=1, \dots, n}$  et  $(Q(\tilde{m}_j))_{j=1, \dots, r}$  telles que  $\mathfrak{C} = \bigcap_i Q(m_i) = \bigcap_j Q(\tilde{m}_j)$ ,  $m_i \supset Q(m_i) \supset m_i^{n_i}$  et  $\tilde{m}_j \supset Q(\tilde{m}_j) \supset \tilde{m}_j^{n_j}$  pour certains entiers  $n_i$  et  $n_j \geq 1$ .

**PROPOSITION 8.1.** *On obtient un diagramme commutatif de la forme:*

$$\begin{array}{ccccccc} A/\bigcap_i m_i^{n_i} & \xrightarrow{h} & A/\mathfrak{C} & \xrightarrow{g} & A/\bigcap_i m_i & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \\ \downarrow & & \downarrow l & & \downarrow & & \\ \bar{A}/\bigcap_j \tilde{m}_j^{n_j} & \xrightarrow{\bar{h}} & \bar{A}/\mathfrak{C} & \xrightarrow{\bar{g}} & \bar{A}/\bigcap_j \tilde{m}_j & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^{r-s} \end{array}$$

où  $h, \bar{h}, g$  et  $\bar{g}$  sont des épimorphismes.  $\square$

**PROPOSITION 8.2.** *Les anneaux  $A/\mathfrak{C}$  et  $\bar{A}/\mathfrak{C}$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie.*

*Preuve.*  $A/\bigcap_i m_i^{n_i}$  est isomorphe à  $\prod_i A/m_i^{n_i}$ . Le seul idéal premier de  $A/\bigcap_i m_i^{n_i}$  est  $m_i/m_i^{n_i}$ . Il existe donc une filtration de  $A/m_i^{n_i}$  à quotients isomorphes à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On en déduit que  $A/m_i^{n_i}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. L'épimorphisme  $h$  nous permet de conclure. Le même raisonnement s'applique sur  $\bar{A}/\mathfrak{C}$ .  $\square$

**LEMME 8.3.** *Soit  $f: C \rightarrow B$  un épimorphisme d'anneaux, tel que le noyau de  $f$  soit inclus dans l'idéal  $n(C)$  des éléments nilpotents de  $C$ . La restriction  $U(f)$  de  $f$  aux groupes des unités est surjective et  $\text{Ker } U(f) = 1 + \text{Ker } f$ .*

*Preuve.* C'est une vérification facile.  $\square$

**LEMME 8.4.** *Si on applique le lemme 8.3 au diagramme de la proposition 8.1, on obtient le diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccccc} 1 + n(A/\mathfrak{C}) & \hookrightarrow & U(A/\mathfrak{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*k} \times \mathbb{C}^{*n-k} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 + n(\bar{A}/\mathfrak{C}) & \hookrightarrow & U(\bar{A}/\mathfrak{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*s} \times \mathbb{C}^{*r-s} \quad \square \end{array}$$

**LEMME 8.5.** *Les deux groupes  $1 + n(A/\mathfrak{C})$  et  $1 + n(\bar{A}/\mathfrak{C})$  sont divisibles. De plus, on a  ${}_2(1 + n(A/\mathfrak{C})) = {}_2(1 + n(\bar{A}/\mathfrak{C})) = 1$ .*

*Preuve.* Puisque  $A/\mathfrak{C}$  est noethérien, il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $(n(A/\mathfrak{C}))^m = 0$ . Considérons la filtration  $1 + n(A/\mathfrak{C}) \supset \dots \supset 1 + (n(A/\mathfrak{C}))^m = 1$ . Pour tout  $i = 1, \dots, m-1$ , on a des isomorphismes

$$\frac{1 + (n(A/\mathfrak{C}))^i}{1 + (n(A/\mathfrak{C}))^{i+1}} \xrightarrow{\sim} 1 + \frac{(n(A/\mathfrak{C}))^i}{(n(A/\mathfrak{C}))^{i+1}} \xrightarrow{\sim} \frac{(n(A/\mathfrak{C}))^i}{(n(A/\mathfrak{C}))^{i+1}}.$$

Par la proposition 8.2, ce dernier groupe est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, d'où la conclusion. Le même raisonnement s'applique à  $1 + n(\bar{A}/\mathfrak{C})$ .  $\square$

**PROPOSITION 8.6.**

- i) *Les deux groupes  ${}_2U(A/\mathfrak{C})$  et  ${}_2U(\bar{A}/\mathfrak{C})$  sont nuls.*
- ii)  *$U(A/\mathfrak{C})$  et  $U(\bar{A}/\mathfrak{C})$  sont chacun somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe fini.*

*Preuve.* C'est une conséquence des Lemmes 8.4 et 8.5.  $\square$

**PROPOSITION 8.7.** *Soit  $G$  un groupe abélien tel que le groupe  ${}_2G$  soit de type fini (resp. fini), et soit  $S$  un sous-groupe de  $G$ . Si  $S$  est la somme directe d'un groupe divisible  $D$  et d'un groupe de type fini  $T$ , le groupe  ${}_2(G/S)$  est de type fini (resp. fini).*

*Preuve.* D'après ([14], chap. 3, th. 5.3), la suite  $0 \rightarrow S \rightarrow G \rightarrow G/S \rightarrow 0$  induit la suite exacte:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, G/S) \\ \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S) \rightarrow \dots$$

Identifions  ${}_2G$  avec  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, G)$  et  ${}_2(G/S)$  avec  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, G/S)$ . Il suffit de démontrer que  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(4(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), D) \oplus \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, T)$  est de type fini. Puisque  $D$  est divisible,  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, D) = 0$ . Soit  $\beta: \mathbb{Z}^n \rightarrow T$  un épimorphisme. On en déduit un épimorphisme  $B_*: \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n) \twoheadrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, T)$  ([14], p. 105). Mais  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n) \xrightarrow{\sim} (\text{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}))^n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ , d'où, d'où la conclusion.  $\square$

**LEMMA 8.8.** *Le groupe  $U(\bar{A})$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini.*

*Preuve.* En utilisant le théorème 2.1, on peut supposer  $\bar{A}$  intègre. En vertu de ([28], Lemme 1), on a la suite exacte:

$$1 \rightarrow k^* \rightarrow U(\bar{A}) \rightarrow T \rightarrow 1,$$

où  $T$  est un groupe de type fini et  $k$  la clôture algébrique de  $\mathbb{R}$  dans  $\bar{A}$ . Mais  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Le lemme 7.4(vii) nous permet alors de conclure.  $\square$

**THÉORÈME 8.9** *Le groupe  ${}_2\text{Pic } A$  est fini.*

*Preuve.* Considérons la suite exacte:

$$1 \rightarrow \left( \frac{U(\bar{A}/\mathbb{C})}{{}_2I(U(A/\mathbb{C})) \cdot k(U(\bar{A}))} \right) \rightarrow {}_2\text{Pic } A \rightarrow {}_2\text{Pic } \bar{A}.$$

D'après le théorème 2.1,  $\bar{A}$  est produit direct fini d'algèbres affines intégralement closes. Donc, par le corollaire de la proposition 5.3,  ${}_2\text{Pic } \bar{A}$  est fini. En vertu de la proposition 8.6,  ${}_2U(\bar{A}/\mathbb{C})$  est nul et  $U(A/\mathbb{C})$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe fini. De même, par le lemme 8.8, le groupe  $U(\bar{A})$  est la

somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini. On en déduit de la proposition 8.7 que le groupe

$$\left( \frac{U(\bar{A}/\mathbb{C})}{l(U(A/\mathbb{C})) \cdot k(U(\bar{A}))} \right) \text{ est fini, d'où la conclusion. } \square$$

**THÉORÈME 8.10.** *Le groupe  $\text{Pic } A$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini.*

*Preuve.* Considérons la suite exacte:

$$1 \rightarrow \frac{U(\bar{A}/\mathbb{C})}{l(U(A/\mathbb{C})) \cdot k(U(\bar{A}))} \rightarrow \text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } \bar{A} \rightarrow 1.$$

Par la proposition 8.6,  $U(\bar{A}/\mathbb{C})$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe fini. Par le théorème 7.7,  $\text{Pic } \bar{A}$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini. D'où la conclusion en utilisant le lemme 7.4(v) et (vii).  $\square$

**PROPOSITION 8.11.** *Le groupe  $\text{Pic } A/(\text{Pic } A)^2$  est fini.*

*Preuve.* On a  $\text{Pic } A = D \oplus T$  où  $D$  est divisible et  $T$  est de type fini. Puisque  $D = D^2$  et  $T/T^2$  est fini, l'assertion est vérifiée.  $\square$

## §9. Le groupe de Witt d'une $\mathbb{R}$ -algèbre affine normale $A$ de dimension 2

Soit  $A$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre affine normale de dimension 2. Nous allons montrer que le groupe  $W(A)$  est de type fini. En vertu du théorème 2.1, on peut supposer que  $A$  est intègre de corps des fractions  $K$ .

Pour tout anneau normal  $R$ , soit  $\text{Cl}(R)$  son groupe des classes de diviseurs ([10], §6).

**THÉORÈME 9.1.** *Le noyau de l'homomorphisme canonique*

$$\text{Br}(A) \rightarrow \text{Br}(K) \quad \text{s'injecte dans} \quad \coprod_{m \in Z} \frac{\text{Cl}(A_m^{hs})}{\text{Cl}(A_m)},$$

où  $Z$  est l'ensemble fini des idéaux maximaux singuliers de  $X = \text{Spec } A$  et  $A_m^{hs}$  est le hensélisé strict de  $A_m$  ([26], chap. 8).



*Preuve:* Soit  $R_X^*$  le faisceau des fonctions rationnelles inversibles sur  $X$ . Notons  $\text{Div}_X$  le faisceau des diviseurs de cartiers. En vertu de ([11], exp. 5, prop. 1), la suite exacte de faisceaux  $0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow R_X^* \rightarrow \text{Div}_X \rightarrow 0$  induit une suite exacte de cohomologie étale:

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \text{Div}_X) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(X, R_X^*) = \text{Br}(K) \rightarrow \dots$$

D'après ([11], exp. 5, p. 74),

$$H_{\text{ét}}^1(X, \text{Div}_X) \quad \text{s'injecte dans} \quad \coprod_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\text{Pic } U_m^{hs}}{\text{Pic } U_m},$$

où  $U_m = \text{Spec } A_m - \{m\}$  et  $U_m^{hs} = \text{Spec } A_m^{hs} - \{mA_m^{hs}\}$ . Par ([20], chap. 4, th. 2.5),  $\text{Br}(A)$  s'injecte dans  $H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ . Il suffit donc de démontrer que  $\text{Pic } U_m^{hs}$  et  $\text{Cl}(A_m^{hs})$  (resp.  $\text{Pic } U_m$  et  $\text{Cl}(A_m)$ ) sont isomorphes. D'après ([12], chap. 4, corol. 18.8.13),  $A_m^{hs}$  est normal (et de dimension 2). De plus, pour tout  $P \in \text{Spec } A_m^{hs}$  de hauteur 1,  $(A_m^{hs})_P$  est factoriel. Il s'ensuit que  $\text{Pic } U_m^{hs}$  et  $\text{Cl}(A_m^{hs})$  sont isomorphes ([12], chap. 4, prop. 21.6.12). Le même raisonnement s'applique à  $A_m$ .  $\square$

**PROPOSITION 9.2.** *L'anneau  $B = A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  est normal de dimension 2. Le nombre d'idéaux maximaux de  $B$  au-dessus d'un idéal maximal  $m$  de  $A$  est 1 ou 2. Si  $m'$  est un idéal maximal de  $B$  au-dessus de  $m$ ,  $mA_m \cdot B_{m'} = m'B_{m'}$ .*

*Preuve.* Pour la première assertion, on peut se reporter à ([20], p. 27). On vérifie facilement les deux autres assertions.  $\square$

**PROPOSITION 9.3.** *Soit  $m'$  un idéal maximal de  $B$ . Si  $B_{m'}^h$  est un hensélisé de  $B_{m'}$ , le groupe  $\text{Cl}(B_{m'}^h)$  est isomorphe à  $\text{Cl}(\hat{B}_{m'}^h)$ , où  $\hat{B}_{m'}^h$  est le complété  $m'B_{m'}^h$ -adique de  $B_{m'}^h$ .*

*Preuve.* Puisque le corps résiduel de  $B_{m'}^h$  est  $\mathbb{C}$ , on a  $B_{m'}^h = B_m^{hs}$ . En vertu de ([26], chap. 8, p. 96), on a  $\hat{B}_{m'}^h = \hat{B}_m^h$ . L'anneau  $\hat{B}_{m'}^h$  est un anneau local noethérien intégralement clos de dimension 2 ([37], chap. 8, §13). L'homomorphisme injectif fidèlement plat  $B_{m'}^h \hookrightarrow \hat{B}_{m'}^h$  induit donc un monomorphisme  $\text{Cl}(B_{m'}^h) \rightarrow \text{Cl}(\hat{B}_{m'}^h)$  ([10], chap. 2, corol. 6.11). Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(\text{Spec } B_{m'}^h - \{m'B_{m'}^h\}) & \longrightarrow & \text{Cl}(B_{m'}^h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Pic}(\text{Spec } \hat{B}_{m'}^h - \{m'\hat{B}_{m'}^h\}) & \longrightarrow & \text{Cl}(\hat{B}_{m'}^h) \end{array}$$

D'après ([12], chap. 4, prop. 21.6.12), les flèches horizontales sont des isomorphismes. Par ([16], p. 214), la première flèche verticale est surjective, ce qui achève la démonstration.  $\square$

**PROPOSITION 9.4.** *Soit  $B_h$  l'anneau de la variété analytique correspondante à  $B$  ([31], §2, no 5). Pour tout idéal maximal  $m'$  de  $B$ , l'homomorphisme canonique  $\text{Cl}(B_{m'}) \rightarrow \text{Cl}(B_{hm'})$  est bijectif.*

*Preuve.* En vertu de ([31], §2, no 6, prop. 3), on a  $\hat{B}_{hm'} = \hat{B}_{m'}$ . Le monomorphisme fidèlement plat  $B_{hm'} \hookrightarrow \hat{B}_{hm'}$  induit un monomorphisme  $\text{Cl}(B_{hm'}) \rightarrow \text{Cl}(\hat{B}_{hm'})$ . Considérons la suite d'homomorphismes:

$$B_{m'}^h \rightarrow B_{hm'} \rightarrow \hat{B}_{hm'} \xrightarrow{\sim} \hat{B}_{m'} = \hat{B}_{m'}^h.$$

Cette suite induit une suite:

$$\text{Cl}(B_{m'}^h) \rightarrow \text{Cl}(B_{hm'}) \hookrightarrow \text{Cl}(\hat{B}_{hm'}) \xrightarrow{\sim} \text{Cl}(\hat{B}_{m'}^h).$$

La proposition précédente nous permet alors de conclure.  $\square$

**THÉORÈME 9.5.** *Soit  $m$  un idéal maximal de  $A$ . Le groupe  ${}_2\text{Cl}(A_m^{hs})$  est fini.*

*Preuve.* Soit  $m'$  un idéal maximal de  $B$  au-dessus de  $m$ . Vu les propriétés qui caractérisent un hensélisé strict et à l'aide de la proposition 9.2, on peut voir facilement que  $A_m^{hs} \xrightarrow{\sim} B_{m'}^h = B_{m'}^{hs}$ . On a donc

$$\text{Cl}(A_m^{hs}) \xrightarrow{\sim} \text{Cl}(B_{m'}^h) \xrightarrow{\sim} \text{Cl}(\hat{B}_{m'}^h) \xrightarrow{\sim} \text{Cl}(\hat{B}_{hm'}).$$

Mais, d'après ([23], th. 2.2), le groupe  $\text{Cl}(\hat{B}_{hm'})$  est de la forme  $H \oplus \mathbb{Q}^c \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^N$ , où  $H$  est un groupe de type fini,  $N$  est un entier naturel et  $c$  est zéro ou le cardinal de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**THÉORÈME 9.6.** *Le groupe  $\text{Cl}(A_m)$  est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe de type fini.*

*Preuve.* Soit  $X = \text{Spec } A$  et  $U = X - Z$  où  $Z$  est le lieu singulier de  $X$ . Soit  $Y$  un modèle projectif lisse de  $X$ . En vertu de ([10], §7, corol. 7.3), l'homomorphisme canonique  $\text{Cl}(A) \rightarrow \text{Cl}(A_m)$  est surjectif. De plus, on a  $\text{Cl}(A) = \text{Cl}(U)$  ([29], exp. 11, corol. 3.8) et  $\text{Cl}(U) = \text{Pic } U$  ([13], chap. 2, § 6). Le lemme 7.4(v) nous permet alors de conclure.  $\square$

PROPOSITION 9.7. *Le groupe*

$${}_2\left(\frac{\text{Cl}(A_m^{hs})}{\text{Cl}(A_m)}\right)$$

*est fini.*

*Preuve.* C'est une conséquence des deux derniers théorèmes et de la proposition 8.7.  $\square$

COROLLAIRE. *Le groupe  ${}_2(\text{Ker Br}(A) \rightarrow \text{Br}(K))$  est fini.*

*Preuve.* C'est une conséquence du théorème 9.1 et de la proposition 9.7.  $\square$

PROPOSITION 9.8. *Le groupe  $Q(A)$  est fini.*

*Preuve:* Soit  $k$  la clôture algébrique de  $\mathbb{R}$  dans  $A$ . Considérons la suite exacte

$$1 \rightarrow \frac{k^*}{k^{*2}} \rightarrow \frac{U(A)}{k^{*2}} \rightarrow \frac{U(A)}{k^*} \rightarrow 1.$$

D'après un théorème bien connu de Sanuel ([28], Lemme 1), le groupe  $U(A)/k^*$  est de type fini. On en déduit que  $\frac{U(A)}{k^{*2}}$ , et ensuite  $\frac{U(A)}{U(A)^2}$ , sont de type fini. Considérons la suite exacte:

$$1 \rightarrow \frac{U(A)}{U(A)^2} \rightarrow Q(A) \rightarrow {}_2\text{Pic } A \rightarrow 1.$$

Il suffit de démontrer que  ${}_2\text{Pic } A$  est de type fini. Or,  $\text{Pic } A$  s'injecte dans  $\text{Cl}(A)$  ([10], corol. 18.13) et, comme on vient de voir,  $\text{Cl}(A) \xrightarrow{\sim} \text{Cl}(U) \xrightarrow{\sim} \text{Pic } U$ . Par le corollaire de la proposition 5.3,  ${}_2\text{Pic } U$  est de type fini.  $\square$

THÉORÈME 9.9. *Le groupe  $W(A)$  est de type fini.*

*Preuve.* Soit  $\bar{X} = \text{Spec } \bar{A}$  un ouvert affine lisse de  $X = \text{Spec } A$ . On a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} I(A) & \longrightarrow & I(\bar{A}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & I(K) \end{array}$$

Comme  $I(\bar{A})$  est de type fini, il suffit de voir que  $\text{Ker}(I(A) \rightarrow I(\bar{A}))$  est de type fini. Puisque  $I(\bar{A}) \rightarrow I(K)$  est injectif,  $\text{Ker}(I(A) \rightarrow I(\bar{A})) = \text{Ker}(I(A) \rightarrow I(K))$ . Soit  $N(A)$  le noyau de  $d \times$  (signature totale):  $\text{Ker}(I(A) \rightarrow I(K)) \rightarrow Q(A) \times \mathbb{Z}'$ . L'invariant de Clifford  $\omega$  induit un homomorphisme injectif ([22], th. 15)  $\omega : N(A) \rightarrow {}_2(\text{Ker}(\text{Br}(A) \rightarrow \text{Br}(K)))$ . Ce dernier groupe est fini d'après le corollaire de la proposition 9.7. Donc  $N(A)$  est de type fini, d'où la conclusion puisque  $Q(A)$  est de type fini.  $\square$

## §10. Recollements d'espaces hyperboliques de rang 4

Soient

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

deux matrices de  $GL_2(\bar{A}/\mathbb{C})$  telles que  $\det \alpha = \det \beta = \delta$ . Soit  $\theta : (M_2(\bar{A}/\mathbb{C}), \det) \rightarrow (M_2(\bar{A}/\mathbb{C}), \det)$  l'isométrie donnée par  $\theta(\gamma) = \alpha\gamma\beta^{-1}$ . Si on identifie  $(M_2(\bar{A}/\mathbb{C}), \det)$  avec  $H(\bar{A}/\mathbb{C}^2)$ , on trouve facilement que la matrice  $\theta_\alpha^\beta$  de  $\theta$  par rapport à la base canonique de  $H(\bar{A}/\mathbb{C}^2)$  est

$$\theta_\alpha^\beta = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{21} \\ -b_{12} & b_{11} \end{pmatrix} a_{12} \begin{pmatrix} -b_{21} & -b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \\ a_{21} \begin{pmatrix} -b_{12} & b_{11} \\ -b_{22} & b_{21} \end{pmatrix} a_{22} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Notons  $\tilde{\beta}$  la matrice  ${}^t\beta^{-1}$ .

On vérifie facilement que l'application

$$\psi_{\alpha,\beta} : M(\bar{A}^2, A/\mathbb{C}^2, \alpha) \times M(\bar{A}^2, A/\mathbb{C}^2, \tilde{\beta}) \rightarrow M(H(\bar{A}^2), H(A/\mathbb{C}^2), \theta_\alpha^\beta)$$

qui envoie

$$\left( \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \right) \right) \quad \text{sur} \quad \left( \begin{pmatrix} x_1 & \xi_1 \\ x_1 & \xi_2 \\ x_2 & \xi_2 \\ -x_2 & \xi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 & t_1 \\ y_1 & t_2 \\ y_2 & t_2 \\ -y_2 & t_1 \end{pmatrix} \right)$$

est  $A$ -bilinéaire. On en déduit un  $A$ -homomorphisme naturel, noté aussi

$$\psi_{\alpha,\beta} : M(\bar{A}^2, A/\mathbb{C}^2, \alpha) \otimes_A M(\bar{A}^2, A/\mathbb{C}^2, \tilde{\beta}) \rightarrow M(H(\bar{A}^2), H(A/\mathbb{C}^2), \theta_\alpha^\beta).$$

**THÉORÈME 10.1.**  $\psi_{\alpha,\beta}$  est un isomorphisme de  $A$ -modules.

*Preuve.* Il est facile de voir que pour tout idéal maximal  $m$  de  $A$  et pour tout  $Q_1 \in \mathbf{P}(\bar{A})$  et  $Q_2 \in \mathbf{P}(A/\mathbb{C})$  l'application canonique  $Q_1 \times Q_2 \rightarrow (Q_1)_m \times (Q_2)_m$  induit un isomorphisme de  $A_m$ -module  $\Sigma_f: M(Q_1, Q_2, f) \rightarrow M((Q_1)_m, (Q_2)_m, f_m)$ . De plus  $\Sigma_f$  est une isométrie dans le cas quadratique. On peut donc supposer que  $A$  est un anneau local. Dans ce cas,  $\bar{A}/\mathbb{C}$  est un anneau semi-local. En vertu de ([2], chap. 5, §9), on peut amener  $\alpha$  (resp.  $\tilde{\beta}$ ) à la forme

$$\begin{pmatrix} \text{dét } \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \text{resp. } \begin{pmatrix} \text{dét } \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

par des opérations élémentaires. Pour tout  $1 \leq i, j \leq 4$ , notons  $E_{ij}^0(\lambda)$  les matrices orthogonales élémentaires. C'est-à-dire  $E_{ij}^0(\lambda) = I_4 + \lambda(e_{ij} - e_{j'i'})$  où, pour tout  $1 \leq k \leq 4$ ,

$$k' = \begin{cases} 2+k & \text{si } 1 \leq k \leq 2 \\ k-2 & \text{si } 3 \leq k \leq 4 \end{cases}$$

et les  $e_{ij}$  sont les éléments de la base canonique de  $M_4(\bar{A}/\mathbb{C})$ . Soit  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\bar{A}/\mathbb{C})$ . On peut voir facilement que  $\theta_{\alpha \cdot \varepsilon}^\beta = \theta_\alpha^\beta \cdot E_{23}^0(\lambda)$ ,  $\theta_{\varepsilon\alpha}^\beta = E_{23}^0(\lambda) \cdot \theta_\alpha^\beta$ ,  $\theta_{\tilde{\alpha} \cdot \beta}^\varepsilon = E_{12}^0(\lambda) \cdot \theta_\alpha^\beta$  et  $\theta_{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}^\varepsilon = \theta_\alpha^\beta \cdot E_{12}^0(\lambda)$ . Si  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ , on a  $\theta_{\alpha \cdot \varepsilon}^\beta = \theta_\alpha^\beta \cdot E_{32}^0(\lambda)$ ,  $\theta_{\varepsilon \cdot \alpha}^\beta = E_{32}^0(\lambda) \cdot \theta_\alpha^\beta$ ,  $\theta_{\tilde{\alpha} \cdot \beta}^\varepsilon = E_{21}^0(\lambda) \cdot \theta_\alpha^\beta$  et  $\theta_{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}^\varepsilon = \theta_\alpha^\beta \cdot E_{21}^0(\lambda)$ . Il s'ensuit que les recollements avec  $\theta_{\alpha \cdot \varepsilon}^\beta$  ou  $\theta_{\varepsilon \cdot \alpha}^\beta$  ou  $\theta_{\tilde{\alpha} \cdot \beta}^\varepsilon$  ou  $\theta_{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}^\varepsilon$  sont isomorphes aux recollements avec  $\theta_\alpha^\beta$ . De même, les recollements avec  $\alpha$  (resp.  $\tilde{\beta}$ ) et les recollements avec  $\varepsilon \cdot \alpha$  ou  $\alpha \cdot \varepsilon$  (resp.  $\varepsilon \cdot \tilde{\beta}$  ou  $\tilde{\beta} \cdot \varepsilon$ ) sont isomorphes. On peut donc supposer que  $\alpha = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \beta$ . Dans ce cas, les modules en question sont libres ([21], lemme 2.4) et  $\psi_{\alpha,\beta}$  est évidemment un isomorphisme.  $\square$

**THÉORÈME 10.2.** Soit  $\Lambda'_\alpha \otimes \Lambda'_\beta$ :

$$\begin{aligned} & \Lambda^2 M(\bar{A}^2, A/\mathbb{C}^2, \alpha) \otimes_A \Lambda^2 M(\bar{A}^2, A/\mathbb{C}^2, \tilde{\beta}) \\ & \rightarrow L = M(\Lambda^2 \bar{A}^2, \Lambda^2 A/\mathbb{C}^2, \Lambda^2 \alpha) \otimes_A M(\Lambda^2 \bar{A}^2, \Lambda^2 A/\mathbb{C}^2, \Lambda^2 \tilde{\beta}) \end{aligned}$$

*l'isomorphisme canonique qui identifie la deuxième puissance extérieure du recollement avec le recollement des deuxièmes puissances extérieures. Soit*

$\Lambda_\alpha \otimes \Lambda_\beta: L \rightarrow H = M(\bar{A}, A/\mathbb{C}, \det \alpha) \otimes_A M(\bar{A}, A/\mathbb{C}, \det \beta^{-1})$  l'isomorphisme obtenu par les identifications usuelles de  $\Lambda^2 \bar{A}$  avec  $\bar{A}$  et de  $\Lambda^2 A/\mathbb{C}^2$  avec  $A/\mathbb{C}$ . Soit enfin  $\Lambda_1: H \rightarrow A$  l'application définie par:  $\Lambda_1((x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2)) = \lambda$  où  $\lambda$  est l'unique élément de  $A$  tel que  $i(\lambda) = x_1 \cdot y_1$  et  $j(\lambda) = x_2 \cdot y_2$ . L'application  $\varepsilon = \Lambda_1 \circ \Lambda_\alpha \otimes \Lambda_\beta \circ \Lambda'_\alpha \otimes \Lambda'_\beta$  est un isomorphisme de  $A$ -modules.

*Preuve.* C'est une vérification immédiate.  $\square$

**THÉORÈME 10.3.** On définit sur  $H = M(\bar{A}^2, A/\mathbb{C}^2, \alpha) \otimes_A M(\bar{A}^2, A/\mathbb{C}^2, \beta)$  la forme bilinéaire suivante:  $\langle x \otimes y, x_1 \otimes y_1 \rangle_\varepsilon = \varepsilon(x \wedge x_1 \otimes y \wedge y_1)$ . L'isomorphisme  $\psi_{\alpha, \beta}$  est une isométrie d'espaces bilinéaires.

*Preuve.* C'est une vérification facile.  $\square$

**THÉORÈME 10.4.** Soient  $P, Q$  et  $R$  des  $A$ -modules projectifs de rang respectivement 2, 2 et 3. Supposons qu'on ait des isomorphismes  $\varepsilon: \Lambda^2 P \otimes_A \Lambda^2 Q \xrightarrow{\sim} A$  et  $\phi: \Lambda^4(R \oplus A) \xrightarrow{\sim} A$ . Il existe alors deux isométries  $u: (\Lambda^2(R \oplus A))_\phi \xrightarrow{\sim} H(R)$  et  $v: (\Lambda^2(P \oplus Q))_\varepsilon \xrightarrow{\sim} H(\Lambda^2 P) \perp (P \otimes Q)_\varepsilon$ , où  $(P \otimes Q)_\varepsilon$  est définie par  $\langle p \otimes q, p' \otimes q' \rangle_\varepsilon = \varepsilon(p \wedge p' \otimes q \wedge q')$  et  $(\Lambda^2(R \oplus A))_\phi$  est définie par  $\langle x, y \rangle_\phi = \phi(x \wedge y)$ .

*Preuve.* C'est une vérification facile.  $\square$

**THÉORÈME 10.5.** L'espace  $E = M(H(\bar{A}^2), H(A/\mathbb{C}^2), \theta_\alpha^\beta)$  est stablement hyperbolique.

*Preuve.* Posons  $P = M(\bar{A}^2, A/\mathbb{C}^2, \alpha)$  et  $Q = M(\bar{A}^2, A/\mathbb{C}^2, \beta)$ . Les deux  $A$ -modules  $P$  et  $Q$  sont de rang 2. Par le théorème de Serre ([12], chap. 4, §2), il existe un  $A$ -module  $R$  projectif de rang 3 tel que  $P \oplus Q = R \oplus A$ . D'après le théorème 10.2, il existe un isomorphisme  $\varepsilon: \Lambda^2 P \otimes_A \Lambda^2 Q \xrightarrow{\sim} A$ . Par la première assertion du théorème 10.4, l'espace  $(\Lambda^2(R \oplus A))_\varepsilon$  est hyperbolique. Par la deuxième assertion,  $(P \otimes Q)_\varepsilon$  est stablement hyperbolique. On conclut par l'isométrie  $\psi_{\alpha, \beta}$ .  $\square$

## §11. Groupe de Witt et normalisation

Dans la suite  $A$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre affine non normale de dimension 2. Nous allons utiliser parfois des notations et des résultats de ([3]). Le lecteur pourra s'y référer pour les définitions et les démonstrations. Soit  $Y = \text{Spec } R$  un schéma

affine. Considérons les deux suites exactes suivantes de schémas en groupes:

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \text{Spin} \rightarrow \text{SO} \rightarrow 1$$

et

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{2} \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

PROPOSITION 11.1. *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a un diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & H_{\text{ét}}^1(Y, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \text{Pic } R \\
 & & & & & & \downarrow 2 \\
 & & & & & & \text{Pic } R \\
 & & & & & & \downarrow 2 \\
 & & & & & & H_{\text{ét}}^1(Y, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \text{Pic } R \\
 & & & & & & \downarrow \delta \\
 & & & & & & H_{\text{ét}}^1(Y, \mu_2) \\
 & & & & & & \downarrow \vdots \\
 & & & & & & \vdots \\
 \dots & \longrightarrow & \check{H}_{\text{ét}}^1(Y, \text{Spin}_{2n}) & \longrightarrow & \check{H}_{\text{ét}}^1(Y, \text{SO}_{2n}) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{ét}}^1(Y, \mu_2) \\
 & & \downarrow H & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
 & & \check{H}_{\text{ét}}^1(Y, GL_n) & \xrightarrow{\text{dét}} & H_{\text{ét}}^1(Y, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\sim} & \text{Pic } R
 \end{array}$$

où *dét* est l'application induit par l'application "déterminant" et *H* est l'application induite par celle qui envoie  $\alpha \in GL_n(R)$  sur  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & t_{\alpha^{-1}} \end{pmatrix} \in SO_{2n}(R)$ .

*Preuve.* Soit  $x \in H_{\text{ét}}^1(Y, GL_n)$ . Il existe un recouvrement étale  $S$  de  $R$  tel que  $x$  est la classe modulo les 1-cobords d'un 1-cocycle  $y \in GL_n(S \otimes_R S)$ . On peut choisir  $S$  de façon que *dét*  $Y$  soit égal à  $z^2$  pour un certain  $z \in U(S \otimes_R S)$ . Donc  $\delta(\text{dét}(x))$  est la classe modulo les 2-cobords de  $\partial_2(z)$  où  $\partial_2: U(S \otimes_R S) \rightarrow U(S \otimes_R S \otimes_R S)$  est la différentielle. D'autre part,  $H(x)$  est la classe de  $H(y) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & t_{y^{-1}} \end{pmatrix}$ . Considérons le diagramme commutatif suivant ([3])

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Cl}_0(H(S \otimes_R S)^n) & \xrightarrow{\Pi} & \text{SO}(H(S \otimes_R S)^n) \\
 \swarrow \Lambda & & \searrow H \\
 & \text{GL}(S \otimes_R S)^n &
 \end{array}$$

où  $\text{Cl}_0$  est le groupe spécial de Clifford.

L'élément  $z^{-1}\Lambda(y)$  est dans  $\text{Cl}_0(H(S \otimes_R S)^n)$  et on a de plus que  $N(z^{-1} \cdot \Lambda(y)) = (z^{-1})^2 \cdot \det y = 1$ . Ainsi  $z^{-1} \cdot \Lambda(y) \in \text{Spin}_{2n}(S \otimes_R S)$ . Alors,  $\delta(H(x))$  est la classe modulo les 2-cobords de  $\partial_2(z^{-1} \cdot \Lambda(y))$  où  $\partial_2$  est la différentielle. Mais  $\partial_2(\Lambda(y)) = 1$  car  $\Lambda(y)$  est un 1-cocycle et dans  $\mu_2(S \otimes_R S \otimes_R S)$  les éléments  $\partial_2(z)$  et  $\partial_2(z^{-1})$  définissent la même classe.  $\square$

**COROLLAIRE.** Soit  $P, Q \in \mathbf{P}(R)$ . S'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $H(P) \perp H(R^m) \xrightarrow{\cong} H(Q) \perp H(R^m)$ , alors il existe un  $R$ -module  $I$  inversible tel que  $\det P = \det Q \cdot [I^2]$ .

*Preuve.* Dans ce cas,  $\delta(H[P]) = \delta(H[Q])$ . Il suit du diagramme de la proposition précédente que  $\delta(\det [P]) = \delta(\det [Q])$ . Ceci revient à dire que  $(\det [P] \cdot \det [Q]^{-1}) \in \text{Ker } \delta = \text{Im}(2)$ , d'où la conclusion.  $\square$

**PROPOSITION 11.2.** Soit  $R$  un anneau noethérien de dimension 1 et soit  $I, J \in \text{Pic } R$ . Les espaces  $H(I) \perp H(R)$  et  $H(I \otimes J^2) \perp H(R)$  sont isométriques.

*Preuve.* Par le théorème de Serre, il existe  $L \in \text{Pic } R$  tel que  $I \oplus J^2 = R \oplus L$ . Il s'ensuit que  $\Lambda^2(I \oplus J^2) \xrightarrow{\cong} \Lambda^2(R \oplus L)$ . Ceci veut dire que  $I \otimes J^2 \xrightarrow{\cong} L$ . Donc  $H(I \oplus J^2) \xrightarrow{\cong} H(R \oplus L) \xrightarrow{\cong} H(R \oplus I \oplus J^2)$ . Puisque  $H(J^2) \perp H(R) \xrightarrow{\cong} H(R^2)$  ([24, p. 15]), on a  $H(I) \perp H(R^2) \xrightarrow{\cong} H(I \oplus J^2) \perp H(R^2)$ . Le théorème d'effacement des espaces quadratiques ([27], th. 7.2) nous permet de conclure.  $\square$

**DÉFINITION 11.3.** Sur les classes d'isomorphismes des  $R$ -modules projectifs de type fini on définit la relation d'équivalence suivante:  $(P) \sim (Q)$  s'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $H(P) \perp H(R^m)$  et  $H(Q) \perp H(R^m)$  sont isométriques. Notons  $[P]$  la classe d'équivalence de  $(P)$ .

**DÉFINITION 11.4.** Soit  $F$  le groupe abélien libre sur les classes d'équivalences définies ci-dessus et soit  $B$  le sous-groupe engendré par les éléments de la forme  $[P \oplus Q] - [P] - [Q]$ . On pose  $K'_0(R) = F/B$ . Notons  $\tilde{K}'_0(R)$  le sous-groupe des éléments de la forme  $[P] - [Q]$  avec  $\text{rang } P = \text{rang } Q$ . Tout homomorphisme d'anneaux  $f: R \rightarrow C$  induit un homomorphisme de groupes  $K'_0(f): K'_0(R) \rightarrow K'_0(C)$  défini par  $K'_0(f)([P] - [Q]) = [P \otimes_R C] - [Q \otimes_R C]$ . Notons  $\tilde{K}'_0(f)$  la restriction de  $K'_0(f)$  à  $\tilde{K}'_0(R)$ . Enfin, notons  $\pi_1: K'_0(R) \rightarrow K'_0(R)$  la surjection canonique.

**DÉFINITION 11.5.** Soit

$$\gamma: \tilde{K}'_0(R) \rightarrow \frac{\text{Pic } R}{(\text{Pic } R)^2}$$



l'application définie par:  $\gamma([P] - [Q]) = [\text{dét } P] \cdot [\text{dét } Q]$ . D'après le corollaire de la proposition 11.1,  $\gamma$  est bien définie et elle est évidemment surjective.

**DÉFINITION 11.6.** Soit  $SK_0(R)$  le noyau de l'épimorphisme  $\text{dét} : \tilde{K}_0(R) \rightarrow \text{Pic } R$ . Cette application induit un isomorphisme

$$\text{dét} : \frac{\tilde{K}_0(R)}{SK_0(R)} \rightarrow \text{Pic } R$$

et dont l'application inverse est donnée par  $\text{dét}^{-1}([I]) = [R] - [I]$ . On pose

$$\tilde{K}_0''(R) = \frac{\tilde{K}_0'(R)}{\pi_1(SK_0(R))}.$$

L'épimorphisme  $\gamma$  induit un épimorphisme noté aussi

$$\gamma : \tilde{K}_0''(R) \rightarrow \frac{\text{Pic } R}{(\text{Pic } R)^2}.$$

**DÉFINITION 11.7.** Soit  $\tilde{K}O_0(R)$  le sous-groupe de  $KO_0(R)$  engendré par les éléments de la forme  $[(Q_1, q_1)] - [(Q_2, q_2)]$  avec  $\text{rang } Q_1 = \text{rang } Q_2 = 2n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Il est facile de voir que l'application  $H : \tilde{K}_0'(R) \rightarrow \tilde{K}O_0(R)$  définie par  $H([P] - [Q]) = [H(P)] - [H(Q)]$  est un monomorphisme de groupes.

Soit  $A$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre affine non normale de dimension 2. Soit  $\bar{A}$  la clôture intégrale de  $A$  dans son anneau total de fractions et  $i$  l'inclusion de  $A$  dans  $\bar{A}$ .

**PROPOSITION 11.8.** *Le diagramme suivant est commutatif avec des lignes exactes :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{K}_0'(A) & \xrightarrow{H} & \tilde{K}O_0(A) & \xrightarrow{\pi} & I(A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tilde{K}_0'(i) & & \downarrow \tilde{K}O_0(i) & & \downarrow i_* \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{K}_0'(\bar{A}) & \xrightarrow{H} & \tilde{K}O_0(\bar{A}) & \xrightarrow{\pi} & I(\bar{A}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

*En particulier, on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow N\tilde{K}_0'(i) \rightarrow N\tilde{K}O_0(i) \rightarrow Ni_* \rightarrow C\tilde{K}_0'(i) \xrightarrow{H} C\tilde{K}O_0(i) \rightarrow Ci_* \rightarrow 0,$$

*où pour tout homomorphisme  $f$ ,  $Nf$  désigne son noyau et  $Cf$  son conoyau.*

*Preuve.* La première assertion est facile. La deuxième c'est le lemme du serpent.  $\square$

**PROPOSITION 11.9.** *Le diagramme suivant est commutatif avec des lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccccc} (\text{Pic } A)^2 & \xrightarrow{\pi_1 \circ \text{dét}^{-1}} & \tilde{K}_0''(A) & \xrightarrow{\gamma} & \frac{\text{Pic } A}{(\text{Pic } A)^2} & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow \text{Pic}(i) & & \downarrow \tilde{K}_0''(i) & & \downarrow \overline{\text{Pic}(i)} & & \\ (\text{Pic } \bar{A})^2 & \xrightarrow{\pi_1 \circ \text{dét}^{-1}} & \tilde{K}_0''(\bar{A}) & \xrightarrow{\gamma} & \frac{\text{Pic } \bar{A}}{(\text{Pic } \bar{A})^2} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

*En particulier, on a la suite exacte:  $C \text{Pic}(i) \rightarrow C\tilde{K}_0''(i) \rightarrow C\overline{\text{Pic}(i)} \rightarrow i$ .*

*Preuve.* C'est une vérification facile.  $\square$

**PROPOSITION 11.10.** *Si  $\text{Pic } \bar{A}/\text{Im Pic } A$  est de type fini,  $C\tilde{K}_0'(i)$  l'est aussi.*

*Preuve.* Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} SK_0(A) & \xrightarrow{\pi_1} & \tilde{K}_0'(\bar{A}) & \longrightarrow & \tilde{K}_0''(A) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow SK_0(i) & & \downarrow \tilde{K}_0'(i) & & \downarrow \tilde{K}_0''(i) & & \\ SK_0(\bar{A}) & \xrightarrow{\pi_1} & \tilde{K}_0'(\bar{A}) & \longrightarrow & \tilde{K}_0''(\bar{A}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Puisque les deux lignes sont exactes, on a une suite exacte

$$CSK_0(i) \rightarrow C\tilde{K}_0'(i) \rightarrow C\tilde{K}_0''(i) \rightarrow 0.$$

En vertu de ([35], corol. 5.3),  $CSK_0(i)$  est nul. Puisque  $\text{Pic } \bar{A}/\text{Im Pic } A$  est de type fini, les groupes  $(\text{Pic } \bar{A})^2/\text{Im}(\text{Pic } A)^2$  et  $C\overline{\text{Pic}(i)}$  sont de type fini. De la proposition 11.9 on déduit que  $C\tilde{K}_0''(i)$  est de type fini. D'où la conclusion puisque  $C\tilde{K}_0''(i) = C\tilde{K}_0'(i)$ .  $\square$

**THÉORÈME 11.11.** *Soit  $G$  le sous-groupe de  $\text{Ker}(i_* \oplus j_* : W(A) \rightarrow W(\bar{A}) \oplus W(A/\mathcal{C}))$  engendré par les éléments de la forme  $\{(M, q)\}$  tels que  $i_*(M, q) \xrightarrow{\cong} H(\bar{A}^n)$  et  $j_*(M, q) \xrightarrow{\cong} H(A/\mathcal{C}^n)$ . Alors  $G$  est fini.*

*Preuve.* Soit  $x = \{(M, q)\} \in G$ . En vertu du lemme 4.1,  $(M, q) \xrightarrow{\cong} M(H(\bar{A}^n))$ ,

$H(A/\mathbb{C}^n)$ ,  $\theta$ ) où  $\theta \in O_{2n}(\bar{A}/\mathbb{C})$ . Mais  $O_{2n}(\bar{A}/\mathbb{C}) = O_4(\bar{A}/\mathbb{C}) \times EO_{2n}(\bar{A}/\mathbb{C})$  ([34], th. 2.8) et grâce aux résultats du §4, on peut supposer que  $\theta \in O_4(\bar{A}/\mathbb{C})$ . Considérons la suite exacte ([3]):

$$1 \rightarrow U(\bar{A}/\mathbb{C}) \rightarrow Cl_0(H(\bar{A}/\mathbb{C}^2)) \xrightarrow{\pi} O_4(\bar{A}/\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \text{PIC } \bar{A}/\mathbb{C}.$$

Ici  $\text{PIC } \bar{A}/\mathbb{C}$  dénote le groupe de Picard des  $A/\mathbb{C}$ -modules gradués inversibles. Dans ([3]), base démontre qu'on peut identifier  $Cl_0(H(\bar{A}/\mathbb{C}^2))$  avec le groupe  $L = \{(\alpha', \beta') \in GL_2(\bar{A}/\mathbb{C}) \times GL_2(\bar{A}/\mathbb{C}) \mid \det \alpha' = \det \beta'\}$ . De plus, si

$$\alpha' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

sont tels que  $(\alpha', \beta') \in L$ , alors  $\pi(\alpha', \beta') = \theta_\alpha^\beta$  où

$$\alpha = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ -c' & d' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Si  $\theta = \pi(\alpha', \beta')$ , il découle du théorème 10.5, que  $x = 0$ . Il suffit donc de démontrer que  $\text{Im } \psi$  est fini. Or  $\text{Im } \psi$  est contenu dans  ${}_2\text{PIC } \bar{A}/\mathbb{C} = {}_2(\text{Pic } \bar{A}/\mathbb{C} \oplus \mathbb{Z}_2(\bar{A}/\mathbb{C}))$ , d'où la conclusion puisque  $\mathbb{Z}_2(\bar{A}/\mathbb{C})$  est fini et  ${}_2\text{Pic } \bar{A}/\mathbb{C}$  est fini d'après le théorème 8.9.  $\square$

**THÉORÈME 11.12.** *Si  $\text{Pic } \bar{A}/\text{Im Pic } A$  est de type fini,  $W(A)$  l'est aussi.*

*Preuve.* Puisque  $I(\bar{A})$  est de type fini, il suffit de montrer que  $Ni_*$  est de type fini. D'après les propositions 11.8 et 11.10, il suffit même de démontrer que l'image  $Z$  de  $N\tilde{K}O_0(i)$  dans  $Ni_*$  est de type fini. Soit  $x = \pi([M, q] - [H(A^n)]) \in Z$ . Ceci entraîne  $[(M, q) \otimes_A \bar{A}] - [H(\bar{A}^n)] = 0$ , ce qui veut dire qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $(M, q) \otimes_A \bar{A} \perp H(\bar{A}^k) \xrightarrow{\cong} H(\bar{A}^{n+k})$ . On peut donc supposer que  $x = \{(M, q)\}$  avec  $i_*(M, q) \xrightarrow{\cong} H(\bar{A}^n)$ . Considérons l'homomorphisme  $j_*|_Z: Z \rightarrow I(A/\mathbb{C})$ . Puisque  $I(A/\mathbb{C})$  est de type fini il suffit de démontrer qu'il en est de même de  $\text{Ker}(j_*|_Z)$ . Soit  $x = \{(M, q)\}$  avec  $i_*(M, q) \xrightarrow{\cong} H(\bar{A}^n)$  un élément de  $\text{Ker}(j_*|_Z)$ . Il existe alors  $m \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbf{P}(A/\mathbb{C})$  tels que  $j_*(M, q) \perp H(A/\mathbb{C}^m) \xrightarrow{\cong} H(P)$ . Par le théorème de Serre, il existe  $I$  inversible tel que  $P \xrightarrow{\cong} (A/\mathbb{C})^{m+n-1} \oplus I$ . On en déduit qu'on peut supposer  $x = \{(M, q)\}$  avec  $i_*(M, q) \xrightarrow{\cong} H(\bar{A}^n)$  et  $j_*(M, q) \xrightarrow{\cong} H(A/\mathbb{C}^{n-1}) \perp H(I)$ . Il existe donc  $\theta \in O_{2n}(\bar{A}/\mathbb{C})$  tel que  $(M, q) \xrightarrow{\cong} M(H(\bar{A}^n), H(A/\mathbb{C}^{n-1}) \perp H(I), \theta)$ . D'après la proposition 11.2 et le théorème 8.9, il suffit de démontrer que pour tout  $A/\mathbb{C}$ -module inversible  $I$ , les éléments  $(\in \text{Ker } j_*|_Z)$  de

la forme  $\{(M(H(\bar{A}^n), H(A/\mathbb{C}^{n-1}) \perp H(I), \theta))\}$  sont en nombre fini. Soit  $J \in \mathbf{P}(A/\mathbb{C})$  tel que  $I \oplus J \xrightarrow{\sim} A/\mathbb{C}^2$ . Fixons une isométrie  $\varepsilon : H(\bar{A}/\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\sim} H(\bar{A}/\mathbb{C}^{n-1}) \perp H(I \otimes_{A/\mathbb{C}} \bar{A}/\mathbb{C})$ . Soit  $M_0 = M(H(\bar{A}^{n+1}), H(A/\mathbb{C}^n) \perp H(J), (\varepsilon \oplus Id)^{-1})$  le recollement correspondant. Le nombre d'éléments de la forme  $\{M(H(\bar{A}^n), H(A/\mathbb{C}^{n-1}) \perp H(I), \theta)\} + \{M_0\} = \{M(H(\bar{A}^{2n+1}), H(A/\mathbb{C}^{2n+1}), \theta \oplus (\varepsilon \oplus Id)^{-1})\}$  est fini d'après le théorème 11.11.  $\square$

Nous allons maintenant montrer qu'il existe des  $\mathbb{R}$ -algèbres affines non normales de dimension 2 et dont le groupe de Witt n'est pas de type fini.

LEMME 11.13. Soit  $A = \mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 - Z^2f(Y))$  où  $f(Y)$  est un polynôme sans facteurs carrés de degré impair  $\geq 3$ . La clôture intégrale de  $A$  dans son corps des fractions est  $\bar{A} = \mathbb{R}[Y, Z, X/Z]/((X/Z)^2 - f(Y))$ .

*Preuve.* Puisque le lieu des singularités de  $\bar{A}$  est de codimension 2,  $\bar{A}$  vérifie la propriété  $R_1$ . De plus,  $\bar{A}$  vérifie la propriété  $S_2$  puisque  $\dim \bar{A} = 3 - 1 = 2$ . Ceci prouve que  $\bar{A}$  est normal. On voit immédiatement que  $\bar{A}$  est entier sur  $A$ .  $\square$

LEMME 11.14. Notons  $x, y, z$  les classes respectives de  $X, Y, Z$ . Le conducteur de  $\bar{A}$  dans  $A$  est  $\mathfrak{C} = \bar{A}z = Ax + Az$ .

*Preuve.* C'est une vérification immédiate.  $\square$

Soit  $B = \mathbb{R}[Y, T]/(T^2 - f(Y))$ . Identifions  $\bar{A}$  avec  $B[Z]$ ,  $A/\mathfrak{C}$  avec  $\mathbb{R}[Y]$  et  $\bar{A}/\mathfrak{C}$  avec  $B$ . On a alors le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \xhookrightarrow{i} & B[Z] \\ \downarrow j & & \downarrow k \\ \mathbb{R}[Y] & \xhookrightarrow{l} & B \end{array}$$

LEMME 11.15. Le groupe  $\text{Pic } \bar{A}/\text{Im Pic } A$  n'est pas de type fini.

*Preuve.* En vertu de ([10]), th. 8.1 et corol. 18.5), on a  $\text{Pic } A/\mathfrak{C} = \text{Pic } \mathbb{R} = 1$  et  $\text{Pic } \bar{A} = \text{Pic } B$ . Mais  $B$  est l'anneau des fonctions régulières d'une courbe réelle affine intègre lisse  $L$  de genre  $\geq 1$ . Donc  $\text{Pic } B$  n'est pas de type fini ([36], variétés abéliennes et courbes algébriques, §5). La suite exacte de Mayer-Vietoris  $1 \rightarrow U(A) \rightarrow U(B[Z]) \oplus \mathbb{R}^* \rightarrow U(B) \rightarrow \text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } B \xrightarrow{\sim} \text{Pic } B$  nous permet de conclure que  $\text{Pic } \bar{A}/\text{Im Pic } A = \text{Pic } B$ .  $\square$

LEMME 11.16. On a  $U(A) = \mathbb{R}^* = U(\bar{A})$ .

*Preuve:* C'est une vérification facile.  $\square$

LEMME 11.17. *Le groupe  $C\tilde{K}'_0(i)$  n'est pas de type fini.*

*Preuve.* La suite de Mayer-Vietoris devient:

$$1 \rightarrow \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \twoheadrightarrow \mathbb{R}^* \rightarrow \text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } B \xrightarrow{\sim} \text{Pic } B.$$

Il s'ensuit que  $\text{Pic } A = 1$ . Considérons le diagramme de la proposition 11.9. Puisque  $\text{Pic } A = 1$ ,  $\tilde{K}''_0(A)$  est nul. De plus,  $\text{Pic } \bar{A} = \text{Pic } B$  n'est pas de type fini et  $\text{Pic } B / (\text{Pic } B)^2$  est fini par la proposition 8.11. La proposition 11.9 nous permet de conclure que le groupe  $C\tilde{K}'_0(i) = C\tilde{K}''_0(i) = \tilde{K}''_0(\bar{A})$  n'est pas de type fini.  $\square$

LEMME 11.18. *Le groupe  $G = \text{Im} (H : C\tilde{K}'_0(i) \rightarrow C\tilde{K}O_0(i))$  est fini.*

*Preuve.* On la diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} K_0(B) & \xrightarrow{K_0(h)} & K_0(B[Z]) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 \\ K'_0(B) & \xrightarrow{K'_0(h)} & K'_0(B[Z]) \end{array}$$

où  $h : B \rightarrow B[Z]$  est l'injection canonique. Puisque  $K_0(h)$  est surjectif ([2], chap. 11, th. 3.1),  $K'_0(h)$  est surjectif. L'application:  $B[Z] \rightarrow B$  qui envoie  $Z$  sur 0 induit une section pour  $K'_0(h)$ . Donc  $K'_0(h)$  est un isomorphisme. Soit  $x \in G$ . Il existe  $P, Q \in \mathbf{P}(B)$  tels que  $\text{rang } P = \text{rang } Q$  et  $x = [H(P)] - [H(Q)]$ . Grâce au théorème de Serre on peut supposer qu'il existe deux  $B$ -modules inversibles  $I, J$  tels que  $x = [H(I)] - [H(J)]$ . D'après la proposition 8.11,  $\text{Pic } B / (\text{Pic } B)^2$  est fini. D'où la conclusion en utilisant la proposition 11.2.  $\square$

THÉORÈME 11.19. *Le groupe  $W(A)$  n'est pas de type fini.*

*Preuve.* D'après le lemme 11.17,  $C\tilde{K}'_0(i)$  n'est pas de type fini. Par le lemme 11.18, le groupe  $G = \text{Im} (H : C\tilde{K}'_0(i) \rightarrow C\tilde{K}O_0(i))$  est fini. On déduit de la suite exacte de la proposition 11.8

$$0 \rightarrow N\tilde{K}'_0(i) \rightarrow N\tilde{K}O_0(i) \rightarrow Ni_* \rightarrow C\tilde{K}'_0(i) \rightarrow C\tilde{K}O_0(i) \rightarrow Ci_* \rightarrow 0$$

que  $Ni_*$  n'est pas de type fini.  $\square$

Je tiens à exprimer toute ma gratitude au Professeur Manuel Ojanguren pour son soutien incessant. Je remercie la Commission fédérale des bourses pour son aide financière. Je remercie également le Professeur William Pardon d'avoir suggéré l'utilisation du théorème d'Elman-Lam.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BAEZA, *Quadratic forms over semi local rings*, Springer Lecture Notes in Math. 655 (1978).
- [2] H. BASS, *Algebraic K-theory*, Benjamin, New York (1968).
- [3] H. BASS, *Clifford algebras and spinor norms over a commutative ring*, Amer. J. of Math. 96 (1974) pp. 156–206.
- [4] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, chap. 1–7, Hermann, Paris (1967).
- [5] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Cohomology of groups of multiplicative type over regular schemes*, C.R. Acad. Sci. Paris 287, Series A et B, no. 6 (1978).
- [6] C. W. CURTIS and I. REINER, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Intersciences (1962).
- [7] G. DIETEL, *Wittringe reeller Kurven*, Thesis, Regensburg (1981).
- [8] R. ELMAN and T.Y. LAM, *Quadratic forms over formally real fields and Pythagorean fields*, Am. J. of Math. 94 (1972), 1155–1194.
- [9] R. ELMAN and T. Y. LAM, *Classification Theorems for Quadratic forms over field*, Comm. Math. Helv. 49 (1974), 373–381.
- [10] R. M. FOSSUM, *The divisor class group of a Krull domain*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Band 74, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1973).
- [11] A. GROTHENDIECK, *Le groupe de Brauer I, II, III*, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam (1968), pp. 46–188.
- [12] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *EGA 4. Etude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publ. math. I.H.E.S. (1964–1967).
- [13] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Graduate texts in Math. 52, Springer New York-Heidelberg-Berlin (1977).
- [14] P. J. HILTON and U. STAMMBACH, *A course in homological algebra*, Springer New York-Heidelberg-Berlin (1970).
- [15] H. HIRONAKA, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Annals of Math. 79 (1964), 109–326.
- [16] H. HIRONAKA, *Formal Line Bundles along Exceptional Loci*, In *Algebraic Geometry*, Bombay Colloquium 1968, Bombay (1969).
- [17] M. KNEBUSCH, *Symmetric bilinear forms over algebraic varieties*, Queen's Papers in Pure and App. Math 46 (1977), 103–283.
- [18] M. KNEBUSCH, *On algebraic curves over real closed fields II*, Math. Z. 151 (1976), 189–205.
- [19] T. Y. LAM, *The algebraic theory of Quadratic forms*, Benjamin (1973).
- [20] J. S. MILNE, *Etale Cohomology*, Princeton Univ. Press (1980).
- [21] J. MILNOR, *Introduction to Algebraic K-theory*, Ann. of Math. Studies 72, Princeton Univ. Press (1970).
- [22] M. OJANGUREN, *A splitting theorem for quadratic forms*, Comm. Math. Helv. 57 (1982), 145–157.
- [23] D. PRILL, *The divisor class groups of some rings of holomorphic functions*, Math. Z. 121 (1971), 58–80.
- [24] R. PARIMALA and R. SRIDHARAN, *Quadratic forms over rings of dimension 1*, Comm. Math. Helv. (1980), 634–644.

- [25] H. G. QUEBBEMANN, W. SCHARLAU and M. SCHULTE, *Quadratic and Hermitian Forms in additive and abelian categories*, J. of Alg. 59 (1979), 264–289.
- [26] M. RAYNAUD, *Anneaux locaux henséliens*, Springer Lecture Notes in Math. 169 (1970).
- [27] A. ROY, *Cancellation of quadratic forms over commutative rings*, J. of Alg. 10 (1968), 286–298.
- [28] P. SAMUEL, *A propos du théorème des unités*, Bull. Sci. Math. 90 (1966), 89–96.
- [29] Séminaire de géométrie algébrique SGA 2: Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz, North-Holland, Amsterdam (1968), pp. 124–135.
- [30] Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1963–64, SGA 4: Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, tome 3, Springer Lecture Notes in Math. 305 (1973), pp. 206–249.
- [31] J.-R. SERRE, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Annales de l'Institut Fourier 6 (1955), 1–42.
- [32] R. G. SWAN, *K-theory of finite groups and orders*, Springer Lecture Notes in Math. 149 (1970).
- [33] V. S. VARADARAJAN, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Prentice Hall, Serie in modern analysis (1974).
- [34] L. N. VASERSTEIN, *Stabilization of Unitary and orthogonal groups over a ring with involution*. Math. Sbornik 81 (1970), 307–326.
- [35] C. WEIBEL, *Complete intersection points of affine surfaces*, Preprint.
- [36] A. WEIL, *Courbes algébriques et variétés abéliennes*, Hermann, Paris (1971).
- [37] O. ZARISKI and P. SAMUEL, *Commutative algebra* (Vol. I, II), Van Nostrand, Princeton (1958, 1960).

*Institut de Mathématiques  
Faculté des-Sciences  
Université de Lausanne  
1015 Lausanne–Dorigny  
Suisse*

Reçu le 12 Février 1986.