Un théorème de densité analytique pour les groupes semisimples.

Autor(en): **Wigner, David**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **62 (1987)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-47353

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 62 (1987) 390–416 0010–2571/87/030390–27$01.50 + 0.20/0
© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

Un théorème de densité analytique pour les groupes semisimples

DAVID WIGNER

§1. Introduction

Soient G_0 un groupe semi-simple linéaire connexe sans facteur compact, (V, π) une représentation continue de G_0 dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé V, Γ un sous-groupe cocompact de G_0, v un vecteur de V invariant par tout élément de Γ. Ces notations seront en vigueur jusqu'à la fin de l'article. On a alors

THÉORÈME Ω. *Si V est de dimension finie, v est invariant par tout élément de G_0.*

Remarque. L'histoire du théorème Ω est assez compliquée. Dans le cas où Γ est discret, mais où l'on suppose plus généralement que G_0/Γ admet une mesure G_0-invariante finie, ce théorème est dû à A. Borel [2]. Dans [32], A. Weil donne une démonstration simple du théorème Ω, mais comme son but était de fournir une démonstration rapide d'un cas particulier du théorème de Borel, dans son énoncé il suppose Γ discret et (V, π) la représentation adjointe. Dans son livre [24], Raghunathan remarque que la démonstration de Weil est valable avec les hypothèses ci-dessus.

On note $\mathbf{g}_0$ l'algèbre de Lie de G_0; une notation analogue sera utilisée pour les autres groupes et algèbres qui seront introduits ultérieurement. Rappelons que le vecteur v de V est dit *analytique* si pour tout $X \in \mathbf{g}_0$, on a un développement en série entière:

$$\pi(\exp(tX))v = v_0(X) + tv_1(X) + t^2v_2(X) + \cdots \qquad (\ddagger)$$

qui converge pour $|t|$ suffisamment petit. Ici les v_j sont des vecteurs de V, qui dépendent de v et sont forcément des fonctions polynomiales de X.

Nous proposons ici de remplacer l'hypothèse que V est de dimension finie dans le théorème Ω par l'hypothèse que v est un vecteur analytique; hypothèse qui est toujours satisfaite si V est de dimension finie. Notre résultat principal est

donc:

THÉORÈME 1. *Gardons les notations ci-dessus. Si v est un vecteur analytique, alors v est invariant par tout élément de G_0.*

Quitte à remplacer G_0 par un revêtement fini, on peut supposer G_0 plongé dans son complexifié simplement connexe, qu'on notera G. Comme G_0 opère continûment sur le complété de V, on peut supposer V complet. On fera désormais ces hypothèses.

Comme le rapport de certaines propositions intermédiares avec le théorème visé n'est pas évident à premier vue, nous avons cru bon de fournir les raisonnements préliminaires dans cette introduction.

Notons d'abord le simple

LEMME 1. *Si v est analytique et $y \in G_0$, alors $\pi(y)v$ est analytique.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\pi(\exp(tX))\pi(y)v &= \pi(y)\pi(\exp(t\,\mathrm{Ad}\,(y)(X)))v \\ &= \pi(y)(v_0(\mathrm{Ad}\,(y)(X)) + tv_1(\mathrm{Ad}\,(y)(X)) \\ &\quad + t^2v_2(\mathrm{Ad}\,(y)(X)) + \cdots).\end{aligned}$$

Comme $\pi(y)$ est un isomorphisme topologique de V, la série est convergente pour $|t|$ suffisament petit.

Comme (‡) est convergente pour $X \in \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 \otimes \mathbf{C}$, l'algèbre de Lie de G, et $t \in \mathbf{C}$ avec $|t|$ suffisament petit, la fonction $\pi_v(X) = \pi(\exp(X))v$ admet un prolongement analytique à un voisinage de l'origine de $\mathbf{g}$. Soit $\mathcal{Q}$ l'ouvert étoilé maximal de $\mathbf{g}$ où la fonction π_v admet un prolongement holomorphe.

LEMME 2. *Si $g \in G_0$ et $\pi(g)v = v$, alors $\mathcal{Q} = \mathrm{Ad}\,(g)(\mathcal{Q})$.*

Démonstration. Si $\pi(g)v = v$ on a

$$\begin{aligned}\pi_v(\mathrm{Ad}\,(g)(X)) &= \pi(\exp(\mathrm{Ad}\,(g)(X)))v = \pi(g)\pi(\exp(tX)\pi(g^{-1})v \\ &= \pi(g)\pi(\exp(tX)v = \pi(g)\pi_v(X).\end{aligned}$$

pour X suffisamment petit. Le lemme est alors un conséquence de l'unicité du prolongement analytique.

Rappelons que le voisinage de Harish–Chandra de $\mathbf{g}$ est un ouvert $\mathrm{Ad}\,(G)$-

invariant de $\mathbf{g}$, étoilé par rapport à l'origine dans lequel l'application exponentielle de G est un difféomorphisme. Soit $\mathcal{U}$ l'intersection de $\mathcal{Q}$ avec le voisinage de Harish–Chandra. Par conséquent $\mathcal{U}$ est un ouvert $\mathrm{Ad}(\Gamma)$-invariant contenant l'élément neutre de $\mathbf{g}$ sur lequel la fonction π_v admet un prolongement analytique. Soit ∇ un compact de G_0 tel que $\nabla\Gamma = G_0$. Considérons l'intersection $\mathcal{W} = \bigcap_{d\in\nabla} \mathrm{Ad}(d)(\mathcal{U})$. Elle vérifie:

1) $\mathcal{W}$ est un ouvert de $\mathbf{g}$ parce que ∇ est compact.
2) π_v admet un prolongement holomorphe à $\mathcal{W}$.
3) $\mathcal{W}$ est $\mathrm{Ad}(G_0)$-invariant.
4) $\mathcal{W}$ est étoilé par rapport à l'origine.
5) $\mathcal{W}$ est contenu dans le voisinage de Harish–Chandra.

Soient θ une involution de Cartan de $\mathbf{g}_0$ et $\mathbf{g}_0 = \mathbf{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ la décomposition de Cartan correspondante. On note $\mathfrak{p}$ le complexifié de $\mathfrak{p}_0$. On note également θ les involutions de G_0, G, et $\mathbf{g}$ induites par θ. On note K le complexifié de K_0; une notation analogue sera utilisée pour les autres groupes qui seront introduits ultérieurement. L'hypothèse que G est simplement connexe entraine que K est l'ensemble de points invariants de θ dans G (c.f. [30]). On choisit un sous-espace abélien maximal $\mathbf{a}_0$ de $\mathfrak{p}_0$ et $\mathbf{n}_0$ sera la somme des espaces radiciels correspondants aux racines positives pour un ordre de $\mathbf{a}_0$. Soit M le centralisateur de A dans K; avec ces notations $P = MAN$ sera le normalisateur de N dans G.

Fixons un élément X de $\mathbf{n}$; si Y est un élément de la chambre de Weyl positive de $\mathbf{a}_0$, suffisamment loin des faces, $\mathrm{Ad}(\exp(Y))(X)$ sera dans $\mathcal{W}$. Comme $\mathcal{W}$ est invariant pour $\mathrm{Ad}(G_0)$, $\mathcal{W}$ contient $\mathbf{n}$, ainsi que tout ses conjugués par des éléments de G_0.

On définit les sous-ensembles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ de $\mathbf{g}$;

$$\mathcal{C} = \bigcup_{x\in G} \mathrm{Ad}(x)(\mathbf{n})$$

$$\mathcal{C}_{\mathbf{R}} = \bigcup_{x\in G_0} \mathrm{Ad}(x)(\mathbf{n})$$

D'après ce qui précède, $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ est contenu dans $\mathcal{W}$. On a la désingularisation de Springer,

$$\mathcal{D} = \{(u, xP) \in \mathbf{g} \times G/P \mid u \in \mathrm{Ad}(x)(\mathbf{n})\}$$

et l'application $\varepsilon : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ de désingularisation, $\varepsilon(u, xP) = u$. Notons $\Psi : \mathcal{D} \to G/P$ la projection; ainsi $\Psi((u, xP)) = xP$. Posons $\mathcal{D}' = \Psi^{-1}(KP/P)$. Noter que $\Psi : \mathcal{D} \to G/P$ et $\Psi : \mathcal{D}' \to KP/P$ sont des fibrés vectoriels holomorphes, et que

$$\Psi^{-1}(G_0/P_0) \cup \{(0_{\mathbf{g}}, xP) \mid x \in G\} \subset \varepsilon^{-1}(\mathcal{C}_{\mathbf{R}}) \subseteq \varepsilon^{-1}(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}).$$

THÉORÈME L. *Soient $\psi : E \to G/P$ un fibré vectoriel holomorphe, et $\mathcal{V}$ un ouvert connexe de E contenant $\psi^{-1}(G_0/P_0)$ et la section nulle. Une fonction analytique φ à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe complet, définie sur $\mathcal{V}$, admet un prolongement analytique à E tout entier.*

Ce théorème est dû à F. Lescure (c.f. [20]). Le théorème L nous permet de considérer par la suite l'application $\gamma : \mathcal{D} \to V$, prolongement holomorphe de $\pi_v \circ \varepsilon$ à $\mathcal{D}$.

Pour le commodité du lecteur, nous donnons une démonstration rapide du théorème L dans le §2. Cette démonstration a été trouvée en collaboration avec C. Laurent; je tiens à exprimer ma reconnaissance de sa permission de la reproduire ici.

On aura besoin d'une forme faible du théorème de Peter–Weyl qui sera valable dans les espaces localement convexes complets généraux.

THÉORÈME P–W. *Soit (U, ρ) une représentation d'un groupe compact L dans un espace localement convexe complet U. Pour chaque représentation irréductible χ (de dimension finie) de L, il existe un sous-espace isotypique U_χ, ainsi qu'une projection L-equivariante P_χ de U sur U_χ. De plus, l'intersection des noyaux des P_χ, quand χ parcourt toutes les classes d'isomorphie des représentations de L, est réduite à 0_U.*

La première application qu'on fera de ce théorème sera pour énoncer une formulation équivalente du théorème Ω, formulation qu'on utilisera pour la démonstration du théorème 1. La même démonstration sera valable dans le cas ou G/Γ admet une mesure G-invariante finie, et conduira à une formulation équivalente du théorème de densité de Borel.

THÉORÈME W. *Soit $f : G \to V$ une fonction holomorphe sur G, à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe complet, invariante par translation à droite par tout élément de Γ. Alors f est constante.*

Démonstration. Comme les éléments du dual V^* de V séparent les points de V, on peut supposer que $V = \mathbf{C}$.

On choisit pour L un sous-groupe compact maximal de G, et pour U l'espace de fonctions holomorphes sur G, muni de la topologie de la convergence compacte. Le groupe L opère par translation à gauche. Les sous-espaces isotypiques U_χ sont alors de dimension finie, parce que L est une forme réelle de G. Le groupe G_0 opère par translation à droite sur chaque U_χ, et le sous-groupe Γ laisse chaque $P_\chi(f)$ invariant. D'après le théorème Ω, chaque $P_\chi(f)$ est invariant

par G_0. Il en résulte, d'après le théorème P–W, que f est invariant par G_0. D'où le théorème.

L'autre application qu'on fera du théorème P–W est avec $U = V$ et $L = K_0$. L'opération de K_0 sur V_χ peut alors être prolongée à K. On va noter $\varpi_\chi : K \times V_\chi \to V_\chi$ ce prolongement. On va considérer la fonction $\Lambda_\chi : K \times \mathcal{D}' \to V_\chi$ qu'on obtient en composant ϖ_χ avec $Id_K \times (P_\chi \circ \gamma)$ c'est-à-dire $\Lambda_\chi = \varpi_\chi \circ (Id_K \times (P_\chi \circ \gamma))$.

On considère aussi l'application $\mu : K \times \mathcal{D}' \to G$ définie par la formule $\mu(k, (u, xP)) = k \exp(u)$.

PROPOSITION 1. *L'image $\mu(K \times \mathcal{D}')$ contient un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{Y}_1$ de G.*

Démonstration. D'après un théorème de Kostant [17], $G_0 = K_0 N_0 K_0$, donc pour $g \in G_0$, on a $g = k_1 n k_2 = k_1 k_2 (k_2^{-1} n k_2)$ et G_0 est contenu dans l'image $\mu(K \times \mathcal{D}')$. Or cette image est un ensemble constructible. Soit elle est rare pour la topologie de Zariski, soit elle contient un ouvert de Zariski non vide. Comme G_0 est dense dans G pour la topologie de Zariski, la proposition en résulte.

Bien entendu, on peut remplacer $\mathcal{D}'$ par $\mathcal{D}$ dans l'énoncé.

Convention. Si $f : X \to Y$ est un morphisme algébrique de l'ensemble algébrique X dans la variété algébrique Y, dominant ($f(X)$ contient un ouvert de Zariski non vide de Y), et pour tout y dans un ouvert de Zariski non vide de Y, $f^{-1}(\{y\})$ a la propriété $(*)$, on dira que la fibre générique de f a la propriété $(*)$.

THÉORÈME 2. *Supposons G_0 simple. Si* $\dim(G_0) > 3$, *la fibre générique de μ est irréductible.*

Le théorème 2 sera démontré dans les §4 et §5. On va donc supposer dans ces § que G_0 est simple.

Comme $\mathcal{W}$ est contenu dans le voisinage de Harish–Chandra, on peut définir une fonction holomorphe $\hat{\pi} : \exp(\mathcal{W}) \to V$ par la formule $\hat{\pi}(\exp(X)) = \pi_v(X)$. Posons $\pi^\chi = P_\chi \circ \hat{\pi}$.

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des ouverts connexes de K et $\mathcal{D}'$ respectivement tels que $1_K \in \mathcal{S}$, que la section zéro de $\mathcal{D}'$ soit contenue dans $\mathcal{T}$, et que $\mu(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ soit contenu dans $\mathcal{W}$. Si $k \in \mathcal{S}$ et $(u, xP) \in \mathcal{T}$, on a

$$\Lambda_\chi(k, (u, xP)) = \varpi_\chi(k, P_\chi(\pi_v(u))) = P_\chi(\hat{\pi}(k \exp(u))) = \pi^\chi \circ \mu(k, (u, xP))$$

Par conséquent Λ_χ est constante sur l'intersection des fibres de μ avec $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$.

Considérons alors le produit fibré

$$\Phi = (K \times \mathcal{D}') \times_G (K \times \mathcal{D}')$$

et notons $p_1, p_2 : \Phi \to K \times \mathcal{D}'$ les projections de Φ sur les deux facteurs $K \times \mathcal{D}'$. Les fonctions analytiques $\Lambda_\chi \circ p_1$ et $\Lambda_\chi \circ p_2$ coincident sur l'ouvert $(\mathcal{S} \times \mathcal{T}) \times_G (\mathcal{S} \times \mathcal{T})$. Si Φ_0 est une composante irréductible de Φ qui rencontre $(\mathcal{S} \times \mathcal{T}) \times_G (\mathcal{S} \times \mathcal{T})$, $\Lambda_\chi \circ p_1$ et $\Lambda_\chi \circ p_2$ coincident sur Φ_0 par l'unicité du prolongement analytique.

PROPOSITION 15. *Toute composante irréductible de Φ qui domine G rencontre $(\mathcal{S} \times \mathcal{T}) \times_G (\mathcal{S} \times \mathcal{T})$. Par conséquent, il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_1$ de G tel que pour tout $y \in \mathcal{Y}_0$, Λ_χ soit constante sur $\mu^{-1}(y)$.*

Remarquons d'abord que l'assertion de la proposition 15 pour un produit de groupes G_0 simples est un conséquence de la même assertion pour les facteurs. Pour G_0 simple avec $\dim(G_0) > 3$ le théorème 2 implique qu'il n'existe qu'une composante irréductible de Φ qui domine G. La proposition sera un conséquence du théorème 2 et l'étude des groupes de dimension 3 faite dans le §2.

La proposition 15 implique que π^χ admet un prolongement holomorphe à un ouvert de Zariski non vide de G qui vérifie

$$\pi^\chi \circ \mu = \Lambda_\chi$$

Le lemme 1 permet alors de déduire que π^χ admet un prolongement à G tout entier. Le théorème W montrera alors que π^χ est constante, et le théorème P–W montrera qu'il en est de même de $\hat{\pi}$, d'où le théorème 1. Cette déduction du théorème 1 de la proposition 15 sera faite dans le §6.

§2 Etude de $SU(1, 1)$. Démonstration du théorème L.

Dans la proposition 2 et les lemmes 3 et 4 on spécialise au groupe

$$G_0 = SU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} x - iy & w - iz \\ w + iz & x + iy \end{pmatrix} \middle| \, x, y, w, z \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 - w^2 - z^2 = 1 \right\}.$$

On choisit $\theta(g) = \overline{{}^t g^{-1}}$, de sorte que K_0 est le sous groupe des matrices diagonales

de $SU(1, 1)$. Le complexifié

$$G = SL(2, \mathbf{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} x - iy & w - iz \\ w + iz & x + iy \end{pmatrix} \middle| \, x, y, w, z \in \mathbf{C}, x^2 + y^2 - w^2 - z^2 = 1. \right\}.$$

Avec cet écriture un élément de G est unipotent si et seulement si $x = 1$.

PROPOSITION 2. *Si $G_0 = SU(1, 1)$, la fibre générique de μ consiste en deux points et Φ a exactement deux composantes irréductibles qui dominent G. Chacune d'elles rencontre tout voisinage de $(\{1_K\} \times \{(0_{\mathbf{g}}, xP) \mid x \in G\}) \times (\{1_K\} \times \{(0_{\mathbf{g}}, xP) \mid x \in G\})$.*

Démonstration. Pour déterminer la fibre $\mu^{-1}(\{g\})$ on aura à résoudre l'équation

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - a & b \\ c & 1 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

avec $bc = -a^2$. On trouve alors

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(1 - g_{11}g_{22})} \\ b &= g_{12}g_{11}^{-1}(1 - \sqrt{(1 - g_{11}g_{22})}) = g_{12}g_{22}(1 + \sqrt{(1 - g_{11}g_{22})})^{-1} \\ c &= g_{21}g_{22}^{-1}(1 + \sqrt{(1 - g_{11}g_{22})}) = g_{11}g_{21}(1 - \sqrt{(1 - g_{11}g_{22})})^{-1} \\ u &= g_{22}^{-1}(1 + \sqrt{(1 - g_{11}g_{22})}) = g_{11}(1 - \sqrt{(1 - g_{11}g_{22})})^{-1} \end{aligned}$$

et comme l'expression sous le radical tend vers zéro lorsque g_{11} et g_{22} tendent vers 1, la proposition 2 en résulte.

On considère l'opération de $G = SL(2, \mathbf{C})$ sur la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qui est isomorphe à G/P; on a:

$$g(z) = \frac{g_{11}z + g_{12}}{g_{21}z + g_{22}}$$

Dans cette identification G_0/P_0 correspond au grand cercle $\{z \mid |z| = 1\}$.

LEMME 3. *Soient $\psi : E \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ un fibré vectoriel holomorphe, et $\mathcal{V}$ un ouvert connexe de E contenant $\psi^{-1}(\{z \mid |z| = 1\})$ et la section nulle. Une fonction*

analytique φ à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe complet, définie sur $\mathcal{V}$ admet un prolongement analytique à E tout entier.

Démonstration. Comme $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\{\infty\} = \mathbf{C}$, la restriction du fibré $\psi : E \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\{\infty\}$ est un fibré trivial. Sur $\psi^{-1}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\{\infty\})$ on peut écrire $\varphi = \varphi(\zeta, e)$ où ζ est la variable dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\{\infty\}$ et e est la variable dans la fibre de E. La fonction φ est définie comme fonction de ζ et e dans un voisinage de $|\zeta| = 1$, $e \in \mathbf{C}$ et $e = 0$, $\zeta \in \mathbf{C}$.

Le théorème de la marmite de Hartogs (c.f. [1] Ch. 4 ou [12] p. 164) implique maintenant que φ admet un prolongement analytique à $|\zeta| < 1$, $e \in \mathbf{C}$, donné par la formule

$$\varphi(\zeta, e) = \oint \frac{\varphi(z, e)\, dz}{z - \zeta} \tag{!}$$

où le chemin d'intégration est le cercle $|z| = 1$. La démonstration usuelle du théorème de la marmite est valable pour les fonctions aux valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe complet parce que l'intégrale (!) définit une fonction holomorphe.

Un raisonnement analogue montre que φ admet un prolongement analytique pour les autres valeurs de ζ.

LEMME 4. *Soient $\psi : E \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ un fibré vectoriel holomorphe, $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et $\mathcal{V}$ un ouvert connexe de E contenant $\psi^{-1}(\mathcal{U})$ et la section nulle. Une fonction analytique φ à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe complet, définie sur $\mathcal{V}$ admet un prolongement analytique à E tout entier.*

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $\infty \in \mathcal{U}$. Quitte à remplacer dans l'intégrale (!) le chemin $|z| = 1$ par le chemin $|z| = R$ pour R suffisament grand, la démonstration sera alors la même que pour le lemme 3.

PROPOSITION 3. *Soient $\psi : E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe, et $\varphi : E \to V$ une fonction à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe complet. Si φ est holomorphe dans un voisinage de la section nulle, et la restriction de φ à chaque fibre de ψ est holomorphe, alors $\varphi : E \to V$ est une fonction globale holomorphe.*

Démonstration. D'après [12] corollaire 11.3, φ est holomorphe si $f \circ \varphi$ est holomorphe pour tout $f \in V^*$. On peut donc supposer que $V = \mathbf{C}$. Comme la

conclusion de la proposition est une propriété locale, on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et que ψ est un fibré trivial. La proposition devient alors le 'lemme de Hartogs' (c.f. [1] p. 139 théorème 2).

Convention. Soient $\psi : E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe, et φ une fonction holomorphe dans un voisinage de la section nulle de ψ. On dira que $x \in X$ est un *point entier* de φ s'il existe une fonction globale holomorphe sur $\psi^{-1}(\{x\})$ qui coincide avec $\varphi|_{\psi^{-1}(\{x\})}$ dans un voisinage de zéro.

PROPOSITION 4. *Soient Q un sous-groupe parabolique de G, $\psi : E \to G/Q$ un fibré vectoriel holomorphe, $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de G/Q et $\mathcal{V}$ un ouvert connexe de E contenant $\psi^{-1}(\mathcal{U})$ et la section nulle. Une fonction analytique φ à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe complet, définie sur $\mathcal{V}$ admet un prolongement analytique à E tout entier.*

Démonstration. D'après la proposition 3, il suffira de démontrer que tout point de G/Q est un point entier de φ.

Supposons d'abord que $Q = B$ est un sous-groupe de Borel de G. Il suffira de démontrer que $1_G B$ est un point entier de φ. Soit ω_0 l'élément le plus long du groupe de Weyl de G. Comme $B\omega_0 B$ est dense dans G/B, il existe $xB \in \mathcal{U} \cap B\omega_0 B$, d'où $\mathbf{h} = \mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{b}) \cap \mathbf{b}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{g}$. Des résultats de Kostant (c.f. [16] ou [6] Chapitre 8 §11) montrent qu'il existe $e \in \mathbf{b}$, $f \in \mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{b})$, et $h \in \mathbf{h}$ vérifiant

1) (h, e, f) est un sl_2-triplet dans $\mathbf{g}$.

2) Chacun des éléments e et f est contenu dans une seule sous-algèbre de Borel de $\mathbf{g}$.

Soit J le sous-groupe analytique correspondant au sl_2-triplet (h, e, f); il existe $y \in J$ vérifiant $\mathrm{Ad}\,(y)(e) = f$. On a $f \in \mathrm{Ad}\,(y)(\mathbf{b})$ et $\mathrm{Ad}\,(y)(\mathbf{b}) = \mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{b})$ à cause de 2). Comme $e, h \in \mathbf{j} \cap \mathbf{b}$, la J-orbite R sur G/B contenant $1_G B$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. On peut alors appliquer le lemme 4 au fibré $\psi^{-1}(R) \to R$ et conclure que tout point de R est un point entier de φ. En particulier $1_G B$ est un point entier de φ.

Soient maintenant Q un sous-groupe parabolique quelconque de G et B un sous-groupe de Borel contenu dans Q. Soient $D \to G/B$ le fibré induit par l'application $G/B \to G/Q$, et $\xi : D \to E$ la projection. D'après ce qui précède, la fonction $\varphi \circ \xi$ admet un prolongement analytique à G/B, qu'on notera κ. Soient q_1 et q_2 les deux projections de $D \times_E D$ sur D; alors les fonctions analytiques $\kappa \circ q_1$ et $\kappa \circ q_2$ coincident sur l'ouvert non vide $\mathcal{V}$ de E et sont donc égales. Il en résulte que $\kappa : D \to V$ passe au quotient E et définit un prolongement holomorphe global de φ.

THÉORÈME L. *Soient $\psi : E \to G/P$ un fibré vectoriel holomorphe, et $\mathcal{V}$ un ouvert connexe de E contenant $\psi^{-1}(G_0/P_0)$ et la section nulle. Une fonction analytique φ à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe complet, définie sur $\mathcal{V}$ admet un prolongement analytique à E tout entier.*

Démonstration. On considère, avec Kostant–Rallis [18], un sl_2-triplet principal normal standard de G, c'est à dire un sl_2-triplet (h, e, f) tel que $h \in \mathbf{k}$, $e, f \in \mathfrak{p}$ et $e + f = w$, où w est l'élément de la chambre de Weyl positive de $\mathbf{a}_0$ vérifiant $\alpha(w) = 2$ pour tout élément α d'une base des racines restreintes positives (c.f. [18] proposition 13). Soient $\mathbf{j}_0$ la sous-algèbre de G_0 engendré par (h, e, f), $\mathbf{j}$ son complexifié, et J le sous-groupe analytique de G correspondant à $\mathbf{j}$; il existe $y \in J$ tel que $\mathrm{Ad}(y)(h) = w$ et $\mathrm{Ad}(y^2) = \mathrm{Id}_{\mathbf{j}}$. D'après le théorème 5 de [18], ou directement, on voit qu'on peut choisir (h, e, f) de façon que $\mathrm{Ad}(y)(e)$ et $\mathrm{Ad}(y)(f)$ soient dans $\mathbf{g}_0$.

Considérons la J-orbite R de $1_G P$ dans G/P. Comme $\mathbf{u} = \mathbf{j} \cap \mathbf{p}$ contient w et $\mathrm{Ad}(y)(e)$, l'isomorphisme $R \simeq J/U$ induit $R \cap G_0/P_0 \simeq J_0/U_0$. On peut donc appliquer le lemme 3 au fibré $\psi^{-1}(R) \to R$ et conclure que les points de R, dont yP, sont des points entiers de φ.

Comme $\mathbf{p}$ est la somme des espaces propres de $\mathrm{ad}(w)$ correspondants aux valeurs propres non-negatives, $\mathrm{Ad}(y)(\mathbf{p})$ est la somme des espaces propres de $\mathrm{ad}(h)$ correspondants aux valeurs propres non-negatives. Par conséquent $\mathrm{Ad}(y)(\mathbf{p})$ contient une sous algèbre de Borel de $\mathbf{k}$, la K-orbite T de yP est compact, et K_0 opère transitivement sur T. Il résulte alors de [21] corollaire p. 357 ou [22] corollaire 2 p. 317 que la G_0-orbite S de yP est ouverte dans G/P. Les hypothèses du théorème L étant stables pour l'opération de G_0 sur G/P, on peut déduire que tous les points de S sont des points entiers. Une application de la proposition 4 achève la démonstration.

§3 Représentations sphériques et fonctions rondes

Nous rassemblons ici plusieurs résultats, pour le plupart bien connus, qui seront utiles pour la suite. Fixons d'abord quelques notations. Soit $\mathbf{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{m}$, par suite $\mathbf{h} = \mathbf{t} \oplus \mathbf{a}$ est une sous-algèbre de Cartan θ-stable de $\mathbf{g}$. On choisit un ordre de $\mathbf{h}$ compatible avec l'ordre de $\mathbf{a}$, par exemple l'ordre lexicographique par rapport à une base $x_1, \ldots, x_r$ de $\mathbf{h}$ telle que $x_1, \ldots, x_l$ soit une base de $\mathbf{a}$. On note $\langle\ ,\ \rangle$ la forme de Killing de $\mathbf{g}$, ainsi que sa restriction à $\mathbf{h}$ et la forme induite sur la duale $\mathbf{h}^*$ de $\mathbf{h}$.

DÉFINITION. Une représentation (W, σ) irréductible de dimension finie de G est dite *sphérique* s'il existe dans W un vecteur w, $\mathbf{K}$-invariant et non nul.

Pour les représentations sphériques, on a le théorème de Cartan–Helgason (cf. [10], [11]). Soient (W, σ) une représentation irréductible; on notera η son plus haut poids, u son plus haut vecteur. Pour tout $h \in H$ on posera $\lambda_\sigma(h) = \exp(\eta(\log(h)))$, d'où $\sigma(h)u = \lambda_\sigma(h)u$.

THÉORÈME C–H. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:
1) (W, σ) *est sphérique*;
2) $\dim(W^K) = 1$;
3) u *est* M*-invariant*;
4) $\lambda_\sigma(K \cap H) = 1$.
5) η *vérifie*

$$\eta(\mathbf{h} \cap \mathbf{k}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\langle \eta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbf{Z}^+$$

pour toutes les racines restreintes positives α.

Si (W, σ) *est sphérique, et* w *son vecteur* K*-invariant, il existe une forme bilinéaire non-dégénérée* $B(\ ,\ )$ *sur* W *vérifiant* $B(u, w) \neq 0$ *et*

$$B(\sigma(x)v_1, v_2) = B(v_1, \sigma(\theta(x)^{-1})v_2) \tag{†}$$

pour tout $v_1, v_2 \in W$.

Soit (W, σ) une représentation sphérique; la fonction $\rho_\sigma(x) = B(\sigma(x)u, w)$ vérifie alors, pour tout $k \in K$, $g \in G$, $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$,

$$\begin{aligned} \rho_\sigma(kxman) &= B(\sigma(kxman)u, w) \\ &= B(\sigma(x)\sigma(man)u, \sigma(\theta(k)^{-1})w) \\ &= \lambda_\sigma(a)B(\sigma(x)u, w) \\ \rho_\sigma(kxman) &= \lambda_\sigma(a)\rho_\sigma(x). \end{aligned} \tag{\%}$$

Le théorème de Cartan–Helgason et la structure connue de l'algèbre des fonctions polynomiales sur G impliquent que les ρ_σ quand σ parcourt les représentations sphériques de G forment une base d'espace vectoriel de l'algèbre $\mathfrak{R}$ des fonctions polynomiales sur G, invariantes à gauche par K et à droite par N.

Comme $\eta(\mathbf{h} \cap \mathbf{k}) = 0$, on a $\eta \circ \theta = -\eta$, et (†) montre que u est orthogonal à tous les autres espaces de poids de W. Donc $B(u, u) \neq 0$, sinon u serait orthogonal à W tout entier. On va supposer désormais que u et w sont normalisés de façon que $B(u, u) = 1$ et $B(u, w) = 1$, de sorte que $\rho_\sigma|_H = \lambda_\sigma$.

Fixons une base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ des racines restreintes positives, et soit

$(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_l)$ une base du système des racines dual dans $\mathbf{a}^*$. Comme le cône engendré par les $\tilde{\alpha}_j$ est le même que celui engendré par les α_j, on peut supposer que $\tilde{\alpha}_j$ est un multiple scalaire de α_j pour tout j. Soit α'_j la racine restreinte qui vérifie $\tilde{\alpha}_j = 2\alpha'_j/\langle \alpha'_j, \alpha'_j \rangle$. On considère un système basique de représentations sphériques de G, $(W_1, \sigma_1), \ldots, (W_l, \sigma_l)$ où le plus haut poids η_j de (W_j, σ_j) vérifie

$$\tfrac{1}{2}\langle \eta_j, \tilde{\alpha}_i \rangle = \frac{\langle \eta_j, \alpha'_i \rangle}{\langle \alpha'_i, \alpha'_i \rangle} = \delta_{ij}.$$

On note u_j son plus haut vecteur, w_j son vecteur K-invariant, B_j la forme bilinéaire non-dégénérée vérifiant (†), $\rho_j(x) = B_j(\sigma_j(x)u_j, w_j)$ la fonction polynomiale $K - N$-biinvariante correspondante, et $\lambda_j = \rho_j|_H$.

Si (W, σ) est une représentation sphèrique, de plus haut poids η, on a $\eta = \sum_{j=1}^{l} c_j \eta_j$, où les c_j sont des entiers positifs. Comme l'espace propre pour l'opération de A sur $\mathcal{R}$ associé à la valeur propre λ_σ est de dimension un, on a $\rho_\sigma = \prod_{j=1}^{l} \rho_j^{c_j}$. Les monômes en les ρ_j forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{R}$. On a donc le

COROLLAIRE. *L'algèbre $\mathcal{R}$ des fonctions polynomiales sur G, invariantes à gauche par K et à droite par N est l'algèbre des polynômes engendrée par $\rho_1, \ldots, \rho_l$.*

On a ainsi une application polynomiale $\rho : G \to \mathbf{C}^l$ invariante à gauche par K et à droite par MN. La restriction de ρ à A est un homomorphisme de A dans $\mathbf{C}^{*l}$ et le théorème de Cartan–Helgason implique que son noyau est égal à $A \cap K$.

DÉFINITION. Dans la suite, on appellera *fonctions rondes sur G* les fonctions polynomiales sur G, invariantes à gauche par K et à droite par N, fonctions propres pour l'opération à droite de A.

LEMME 5. *Pour $x \in G$, les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) $\theta(x)^{-1}x \in N_G(H)$, *normalisateur de H dans G.*

2) xHx^{-1} *est un sous-groupe de Cartan θ-stable de G. De plus, chaque double classe KyN de G contient un élément vérifiant* 1) *et* 2).

Démonstration. Si 1) est vérifiée, on a

$$\theta(xHx^{-1}) = \theta(x)H\theta(x)^{-1} = xx^{-1}\theta(x)H\theta(x)^{-1}xx^{-1} = xHx^{-1}.$$

Si 2) est vérifiée, on a

$$xHx^{-1} = \theta(xHx^{-1}) = \theta(x)H\theta(x)^{-1}$$

et

$$\theta(x)^{-1}xHx^{-1}\theta(x) = H.$$

Pour la deuxième assertion voir [21] ou [25].

LEMME 6. $\rho_j(x)^2 = B_j(\sigma_j(x)u_j, \sigma_j(x)u_j)$.

Démonstration. Il est clair que $x \mapsto B_j(\sigma_j(x)u_j, \sigma_j(x)u_j)$ est une fonction ronde et que $B_j(\sigma_j(xa)u_j, \sigma_j(xa)u_j) = \lambda_j(a)^2 B_j(\sigma_j(x)u_j, \sigma_j(x)u_j)$. L'égalité résulte du fait qu'il n'existe qu'une fonction ronde, aux scalaires près, qui transforme suivant le caractère λ_j^2 de $\mathbf{a}$, et des normalisations qu'on a faites.

PROPOSITION 5. *Soit KxP une double classe telle que xHx^{-1} soit θ-invariant. Alors ou bien ρ_j ne s'annule pas sur KxP, ou bien ρ_j est identiquement nulle sur KxP. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1) *ρ_j ne s'annule pas sur KxP;*
2) $\operatorname{Ker}(\lambda_j) \supseteq A \cap x^{-1}Kx$;
3) $\operatorname{Ker}(\lambda_j) \supseteq H \cap x^{-1}Kx$.

Démonstration: La première assertion est une conséquence immédiate de la formule (%).

L'équivalence de 2) et 3) est une conséquence du théorème de Cartan–Helgason.

1) implique 3): Si $h \in H \cap x^{-1}Kx$, on a

$$\begin{aligned}\lambda_j(h)\rho_j(x) &= \lambda_j(h)B_j(\sigma_j(x)u_j, w_j) = B_j(\sigma_j(x)\sigma_j(h)u_j, w_j)\\ &= B_j(\sigma_j(xhx^{-1})\sigma_j(x)u_j, w_j) = B_j(\sigma_j(x)u_j, \sigma_j(\theta(xh^{-1}x^{-1}))w_j)\\ &= B_j(\sigma_j(x)u_j, w_j) = \rho_j(x)\end{aligned}$$

parce que $xh^{-1}x^{-1} \in K$. Si $\lambda_j(h) \neq 1$, on a $\rho_j(x) = 0$.

3) implique 1): Supposons $\rho_j(x) = 0$. Soient $\eta_j = \eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(m)}$ les poids extrémaux distincts de (W, σ_j) pour H; ils sont forcément de multiplicité un. Soient $u_j = u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}$ les vecteurs correspondants, et $\lambda^{(i)}(h) = \exp(\eta^{(i)}(\log(h)))$ pour $1 \leq i \leq m$. La restriction de la forme bilinéaire B au

sous-espace E de W_j engendré par les $u^{(i)}$ est non-dégénérée. On a

$$0 = \rho_j(x)^2 = B_j(\sigma_j(x)u_j, \sigma_j(x)u_j) = B_j(\sigma_j(\theta(x)^{-1}x)u_j, u_j)$$

et $\sigma_j(\theta(x)^{-1}x)u_j \in E$ parce que $\theta(x)^{-1}x$ normalise H. Par conséquent il existe un $q \neq 0$ tel que

$$B_j(\sigma_j(x)u^{(0)}, \sigma_j(x)u^{(q)}) = B_j(\sigma_j(\theta(x)^{-1}x)u^{(0)}, u^{(q)}) \neq 0$$

et, pour tout $h \in H$:

$$\begin{aligned}
\lambda^{(0)}(h)B_j(\sigma_j(x)u^{(0)}, \sigma_j(x)u^{(q)}) &= B_j(\sigma_j(xh)u^{(0)}, \sigma_j(x)u^{(q)}) \\
&= B_j(\sigma_j(xhx^{-1}x)u^{(0)}, \sigma_j(x)u^{(q)}) \\
&= B_j(\sigma_j(x)u^{(0)}, \sigma_j(\theta(xh^{-1}x^{-1})x)u^{(q)}) \\
&= B_j(\sigma_j(x)u^{(0)}, \sigma_j(xx^{-1}\theta(x)\theta(h^{-1})\theta(x)^{-1}x)u^{(q)}) \\
&= \lambda^{(q)}(x^{-1}\theta(x)\theta(h^{-1})\theta(x)^{-1}x)B_j(\sigma_j(x)u^{(0)}, \sigma_j(x)u^{(q)})
\end{aligned}$$

parce que $x^{-1}\theta(x)$ normalise $H = \theta(H)$. Par conséquent

$$\lambda^{(q)} \circ c_{x^{-1}\theta(x)} \circ \theta = \lambda^{(0)^{-1}},$$

où on a posé $c_y(g) = ygy^{-1}$ pour tout $y, g \in G$. L'involution θ_x de G qui fixe $x^{-1}Kx$ vérifie

$$\theta_x = c_{x^{-1}} \circ \theta \circ c_x = c_{x^{-1}\theta(x)} \circ \theta$$

donc

$$\lambda^{(q)} \circ \theta_x = \lambda^{(0)^{-1}},$$

et

$$\lambda^{(0)} \circ \theta_x \neq \lambda^{(0)^{-1}},$$

parce que les $\lambda^{(i)}$ sont distincts. Par conséquent λ n'est pas identiquement 1 sur $H \cap x^{-1}Kx$.

LEMME 7. *Le normalisateur $N_G(A)$ de A dans G est contenu dans KA.*

Démonstration. Soit $x \in N_G(A)$. Alors x normalise $\mathbf{a}$ et le centralisateur $\mathbf{m} \oplus \mathbf{a}$ de $\mathbf{a}$ dans $\mathbf{g}$. Quitte à multiplier x à gauche par un élément de M, on peut supposer que x normalise $\mathbf{t}$ et $\mathbf{h}$. Comme chaque élément du groupe de Weyl restreint a un représentant dans K, on peut supposer que x centralise A et normalise $\mathbf{t}$. Il en résulte (c.f. l'appendice de [26]) que $x \in KA$.

PROPOSITION 6.

$KAN = \rho^{-1}(\mathbf{C}^{*l})$.

Démonstration. Si $g = kan$, on a $\rho_j(g) = \lambda_j(a) \neq 0$ pour $1 \leq j \leq l$ donc $KAN \subseteq \rho^{-1}(\mathbf{C}^{*l})$. Pour montrer la réciproque, soit KxN une double classe dans $\rho^{-1}(\mathbf{C}^{*l})$. On peut supposer que x vérifie les deux conditions équivalentes du lemme 5. La proposition 5 implique alors $\mathrm{Ad}\,(x^{-1})(\mathbf{k}) \cap \mathbf{h} \subseteq \mathbf{t}$, d'où $\mathbf{k} \cap \mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{h}) \subseteq \mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{t})$. Mais comme $\mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{h})$ est θ-stable, $\dim(\mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{h}) \cap \mathbf{k}) \geq \dim(\mathbf{t})$, et $\mathbf{k} \cap \mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{h}) = \mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{t})$. Mais $\mathfrak{p} \cap \mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{h})$ est contenu dans l'orthogonal $\mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{a})$ pour la forme de Killing de $\mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{t})$ dans $\mathrm{Ad}\,(x)(\mathbf{h})$. Comme ces deux espaces ont la même dimension, ils se confondent. Il résulte alors de [18], théorème 1 qu'il existe $k \in K$ tel que $\mathrm{Ad}\,(kx)(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, c'est à dire que kx normalise $\mathbf{a}$. Mais d'après le lemme 7 le normalisateur de $\mathbf{a}$ est contenu dans KA.

Soit $\Delta = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ le système de racines simples de $\mathbf{h}$. On note δ la demi-somme des racines positives de $\mathbf{h}$; c'est aussi la somme des poids fondamentaux de $\mathbf{h}$. Posons

$$\Delta_0 = \{\beta \in \Delta \mid \beta|_{\mathbf{a}} = 0\}$$

$$\Delta_1 = \Delta \setminus \Delta_0.$$

On a alors le lemme suivant (c.f. Satake [26], p. 80, lemme 1):

LEMME 8. *Pour tout $\beta \in \Delta_1$, il existe $\beta^\theta \in \Delta_1$ tel que $-\theta(\beta) = \beta^\theta + s$, où s est une somme d'éléments de Δ_0.*

COROLLAIRE 8.1. *Toute racine restreinte simple α_j est la restriction à $\mathbf{a}$ d'une racine simple $\beta_k \in \Delta_1$. Il existe au plus deux racines simples dont la restriction à $\mathbf{a}$ est égale à α_j. La restriction d'une racine simple à $\mathbf{a}$ est soit* 0, *soit une racine restreinte simple.*

Démonstration du corollaire 8.1. On a

$$\alpha_j = \sum c_k \beta_k|_{\mathbf{a}},$$

où les c_k sont des entiers positifs et où chaque $\beta_k \in \Delta_1$. Comme chaque $\beta_k|_{\mathbf{a}}$ est une racine restreinte positive, et α_j est une racine restreinte fondamentale, on a $\alpha_j = \beta|_{\mathbf{a}}$ pour un $\beta \in \Delta_1$ convenable, et $\alpha_j = (\beta + \beta^\theta + s)/2$, où α_j est prolongée à $\mathbf{h}$ en posant $\alpha_j|_{\mathfrak{t}} = 0$. Cette représentation est unique, d'où la deuxième assertion du corollaire.

Soit maintenant β une racine simple, et supposons $\beta|_{\mathbf{a}} = \sum c_i\alpha_i$, d'où $\beta + \beta^\theta = s + \sum c_i(\beta_i + \beta_i^\theta)$, où s est une somme d'éléments de Δ_0, comme précédemment. Or l'unicité de la représentation implique la troisième assertion du corollaire.

COROLLAIRE 8.2. *Les plus hauts poids η_j, $1 \leq j \leq l$ des représentations sphériques basiques sont soit égaux à deux fois un poids fondamental, soit égaux à la somme de deux poids fondamentaux, soit égaux à deux fois la somme de deux poids fondamentaux distincts. Si G_0 admet une structure complexe, chaque η_j est la somme de deux poids fondamentaux. Les poids qui interviennent dans les représentations des η_j distincts comme somme des poids fondamentaux, sont distincts.*

Démonstration. On a vu que la base du système dual consiste en multiples scalaires d'éléments de la base du système de racines restreintes. Supposons que α_j soit la restriction de β_j à $\mathbf{a}$. Les η_j vérifient alors $\theta(\eta_j) = -\eta_j$ et $\langle \eta_j, \beta_i \rangle = 0$ si $\beta_i \neq \beta_j, \beta_j^\theta$. On étend les éléments α de $\mathbf{a}^*$ à $\mathbf{h}$ en posant $\alpha|_{\mathfrak{t}} = 0$, de sorte que $\alpha_j = \frac{1}{2}(\beta_j - \theta(\beta_j))$. On a

$$\langle \eta_j, \beta_j^\theta \rangle = \langle \eta_j, \beta_j \rangle = \langle \eta_j, \alpha_j \rangle = c\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle$$

où c vérifie $\alpha' = c\alpha$ donc $c = 1$ ou 2. Comme θ conserve la forme de Killing, ceci équivaut à

$$c\left(1 - \frac{\langle \beta_j, \theta(\beta_j) \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle}\right) = 2\frac{\langle \eta_j, \beta_j \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle}$$

Comme $\beta_j + \theta(\beta_j)$ n'est jamais une racine, soit $\beta_j = -\theta(\beta_j)$, soit $2(\langle \beta_j, \theta(\beta_j) \rangle / \langle \beta_j, \beta_j \rangle)$ est un entier non-négatif, forcément 0 ou 1, parce que si $2(\langle \beta_j, \theta(\beta_j) \rangle / \langle \beta_j, \beta_j \rangle) = 2$, on a $\beta_j = \theta(\beta_j)$ et $\alpha_j = 0$. Si $\beta_j = -\theta(\beta_j)$, on a $\beta_j = \alpha_j$ et η_j est $2c$ fois un poids fondamental. Mais dans ce cas, on a forcément $c = 1$. Or si ψ est une racine dont la restriction à $\mathbf{a}$ est $2\alpha_j$, on a $2(\langle \beta_j, \psi \rangle / \langle \beta_j, \beta_j \rangle) = 4$, ce qui est impossible pour un système de racines réduit.

Si $2(\langle \beta_j, \theta(\beta_j) \rangle / \langle \beta_j, \beta_j \rangle) = 1$, c est pair, donc $c = 2$, d'où $2(\langle \eta_j, \beta_j \rangle / \langle \beta_j, \beta_j \rangle) = 1$ et η_j est la somme des poids fondamentaux associés à β_j et β_j^θ. Si $\beta_j \perp \theta(\beta_j)$, on a $2(\langle \eta_i, \beta_i \rangle / \langle \beta_j, \beta_j \rangle) = c$. Dans ce cas, η_j est c fois la somme des poids fondamentaux associés à β_j et β_j^θ.

réduit, donc $c = 1$. De plus, on a toujours $\beta_j \perp \theta(\beta_j)$, donc chaque η_j est la somme des poids fondamentaux associés à β_j et β_j^θ.

Comme les ensembles $\{\beta_j, \beta_j^\theta\}$ sont disjoints, le corollaire est démontré.

Notons P_j le stabilisateur dans G de la droite $\mathbf{C}u_j$ dans W_j. C'est un sous-groupe parabolique de G qui contient P, et laisse le lieu de zéros de ρ_j invariant. Le corollaire 8.2 implique que P_j correspond au sous-ensemble $\Delta \setminus \{\beta_j, \beta_j^\theta\}$ de Δ.

DÉFINITION. On dira qu'un poids est *singulier* s'il est orthogonal à une racine.

COROLLAIRE 8.3. *Supposons G_0 simple. Si $S \subseteq \{1, \ldots, l\}$ et $\delta - \sum_{j \in S} \eta_j$ n'est pas un poids singulier, on a soit $S = \phi$ et $\delta - \sum_{j \in S} \eta_j = \delta$, soit $S = \{1, \ldots, l\}$ et $\delta - \sum_{j \in S} \eta_j = -\delta$.*

Démonstration. D'après le corollaire 8.2, $\delta - \sum_{j \in S} \eta_j$ est une somme de poids fondamentaux, chaque poids fondamental ayant un coefficient égal à 1, 0, ou -1. Si un poids a un coefficient 0, $\delta - \sum_1^i \eta_j$ est orthogonal à la racine correspondante, donc singulier. Si G_0 admet une structure complexe, le seul cas qui reste est $S = \phi$ et la proposition est démontré.

Si deux poids fondamentaux qui sont liés dans le diagramme de Dynkin ont des coefficients ± 1, alors la somme des racines simples correspondantes est une racine orthogonale à $\delta - \sum_{j \in S} \eta_j$, qui est donc encore singulier. Si G_0 n'admet pas de structure complexe, alors G est simple et le seul cas restant est $\delta - \sum_{j \in S} \eta_j = \pm\delta$. Si $\delta - \sum_{j \in S} \eta_j = -\delta$, on a forcément $S = \{1, \ldots, l\}$. La démonstration est achèvée.

§4 L'espace Θ

Dans ce § et le prochain on suppose que G_0 est simple.

On aura à considérer le produit fibré $F = G \times_\rho G$, c'est à dire le sous-espace $\{(g_1, g_2) \in G \times G \mid \rho(g_1) = \rho(g_2)\}$ de $G \times G$. On notera P^d l'image de P par l'application diagonale $d : G \to G \times G$. L'opération à droite du sous-groupe P^d de $G \times G$ laisse F invariant, et on va noter $\Theta = F/P^d$ le quotient.

Définissons l'application $\tau : K \times \mathcal{D} \to (G \times_\rho G)/P^d = \Theta$ par la formule

$$\tau(k, (X, gP)) = (k(\exp X)g, g)P^d = (kg(g^{-1}(\exp X)g), g)P^d$$

où $g^{-1}(\exp X)g \in N$, d'où $(k(\exp X)g, g) \in F$. Ainsi

$$\tau(k, (u, gpP)) = (k(\exp X)gp, gp)P^d = (k(\exp X)g, g)P^d,$$

et τ est bien définie.

Soit $\nu : \Theta \to G$, $\nu((g_1, g_2)P^d) = g_1 g_2^{-1}$. On a alors $\mu = \nu \circ \tau \mid K \times \mathcal{D}'$. Comme Θ est fermé dans $G \times G/P^d$, et G/P est une variété projective, ν est un morphisme projectif.

Remarque. On montre facilement que l'image de τ est le sous-espace $G \times_{K\backslash G/N} G$ de $G \times_\rho G$ et que les fibres de τ sont isomorphes à des espaces affines. On peut aussi vérifier que le principe d'unicité de prolongement analytique implique que Λ_χ est constante le long des fibres de τ.

Remarque. La topologie quotient de la topologie classique de G fait de $K\backslash G/N$ un espace accessible, d'après un théorème de Kostant–Rosenlicht (c.f. [29] p. 120), mais non séparée. Par conséquent le produit fibré $G \times_{K\backslash G/N} G$ n'est pas localement compact, sauf dans le cas $\dim(G_0) = 3$.

LEMME 9. *Soient*

$$F' = KAN \times_\rho KAN \subset F$$
$$\Theta' = F'/P^d$$

Alors F' est un ouvert de Zariski non vide de F, et Θ' est un ouvert de Zariski non vide de Θ. De plus, la restriction de τ à $K \times \mathcal{D}'$ est un isomorphisme de $K \times \mathcal{D}'$ sur Θ'.

Démonstration. D'après la proposition 6, l'image réciproque de $\mathbf{C}^{*l}$ dans F est égale à F', d'où la première assertion du lemme. La deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première.

Montrons que la restriction de τ à $K \times \mathcal{D}' = K \times \Psi^{-1}(KP)$ est injective. Si

$$\tau(k_1(X, kP)) = \tau(k_2, (Y, k_3P)),$$

on a

$$(k_1(\exp X)k, k)P^d = (k_2(\exp Y)k_3, k_3)P^d$$

et $k_3^{-1}k \in P$. D'où

$$(k_1(\exp X)k, k) = (k_2(\exp Y)k, k)$$

et on peut écrire $\exp X = knk^{-1}$ et $\exp Y = kn_1k^{-1}$ avec n et n_1 dans N. Il en

résulte que

$$k_1kn = k_2kn_1$$

Comme $K \cap N = \{1_G\}$, on a $k_1 = k_2$, $n_1 = n$ et $\tau|_{K\times\mathscr{D}'}$ est injective.

Soient maintenant $(k_1an_1, k_2an_2)P^d \in \Theta'$. On a

$$\tau(k_1k_2^{-1}, (\mathrm{Ad}\,(k_2a)(\log(n_1n_2^{-1})), k_2P)) = (k_1an_1n_2^{-1}a^{-1}, k_2)P^d = (k_1an_1, k_2an_2)P^d$$

et le lemme est démontré.

PROPOSITION 7. *Soit $(\rho_1, \ldots, \rho_p)$ un ensemble de fonctions rondes basiques sur G. Alors l'ensemble algébrique des zéros communs $X = V(\rho_1, \ldots, \rho_p)$ des ρ_j est de codimension p dans G.*

Démonstration. Si $p = 1$, la proposition est évidente. On raisonne par récurrence en p. Supposons alors que la proposition est vérifiée pour $q < p$ et que Y est une composante irréductible de X de codimension strictement plus petit que p. Soit $X_j = V(\rho_1, \ldots, \rho_{j-1}, \rho_{j+1}, \ldots, \rho_p)$ pour $1 \leq j \leq p$. Par l'hypothèse de récurrence, les X_j sont de codimension $p-1$ dans G. Posons $Q_j = P_1 \cap \cdots \cap P_{j-1} \cap P_{j+1} \cap \cdots \cap P_p$. Chaque composante irréductible de X_j est alors invariant par Q_j. Comme Y est aussi une composante irréductible de chaque X_j, Y est invariant par chaque Q_j. Mais le corollaire 8.2 implique que les Q_j, $1 \leq j \leq p$ engendrent G tout entier, d'où la contradiction $Y = G$. La démonstration est achèvée.

PROPOSITION 8. *Toutes les fibres de ρ sont de codimension $l = \dim(A)$ dans G, et* $\dim(F) = 2\dim(G) - l$.

Démonstration. On sait d'après la proposition 6 que la proposition est vraie pour les fibres au-dessus de $\mathbf{C}^{*l}$. Soit $(z_1, \ldots, z_l) \in \mathbf{C}^l$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $z_1, \ldots, z_p = 0$ et que $z_{p+1}, \ldots, z_l \neq 0$. Alors $\rho^{-1}(z) \subseteq V(\rho_1, \ldots, \rho_p)$. Comme les $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_l$ sont des caractères indépendants de A, $\rho^{-1}(z)$ est de codimension $l-p$ dans $V(\rho_1, \ldots, \rho_p)$. La proposition est donc une conséquence de la proposition 7.

PROPOSITION 9. *F et Θ sont irréductibles. De plus, F est une intersection complète dans $G \times G$, et Θ est une intersection complète locale dans $G \times G/P^d$.*

Démonstration. On a

$$F = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid \rho_1(g_1) = \rho_1(g_2), \ldots, \rho_l(g_1) = \rho_l(g_2)\}.$$

Comme F est le produit fibré $G \times_P G$ et l'algèbre de fonctions polynomiales sur $\mathbf{C}^l$ est isomorphe à $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_l]$, l'idéal de fonctions qui s'annulent sur F est engendré par ces l équations. Par conséquent toutes les composantes irréductibles de F sont de codimension l dans $G \times G$ et F est une intersection complète. Comme Θ' est isomorphe à $K \times \mathcal{D}'$, Θ' et F' sont irréductibles. Comme $F \backslash F'$ est de codimension strictement supérieur à l dans $G \times G$, F est irréductible, donc Θ est irréductible. Comme le fibré algebrique $G \times G \to G \times G/P^d$ est localement trivial pour la topologie de Zariski, Θ est une intersection complète locale.

PROPOSITION 10. *La fibre générique de ν est une intersection complète locale dans $G \times G/P^d$.*

Démonstration. Il suffira de démontrer que la fibre générique de ν est une intersection complète locale dans Θ. Si $x \in \Theta$, soit R_x l'anneau local de Θ en x. Comme Θ est une intersection complète locale dans la variété non-singulière $G \times G/P^d$, tous les anneaux locaux R_x sont des anneaux locaux de Cohen–Macaulay. On peut trouver un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{Y}$ de G tel que pour tout $g \in \mathcal{Y}$, $\dim(\nu^{-1}(\{g\})) = \dim(G/P) - l$. Il en résulte que le morphisme $\nu|_{\nu^{-1}(\mathcal{Y})} : \nu^{-1}(\mathcal{Y}) \to \mathcal{Y}$ est un morphisme plat (c.f. [9], p. 276, Ex. 10.9). Soient alors $g \in \mathcal{Y}$ et $z_1, \ldots, z_{\dim(G)}$ un système de coordonnées locales en g. Si I est un idéal d'un anneau, on va noter $\sqrt{I}$ le radical de I; c'est l'intersection des idéaux premiers qui contiennent I. Si $\nu(x) = g \in Y$, l'anneau local de $\nu^{-1}(\{g\})$ en x est alors isomorphe au quotient de R_x par le radical $\sqrt{J}$ de l'ideal J engendré par les $z_j \circ \nu$, d'après le théorème des zéros de Hilbert.

Or on aura $J = \sqrt{J}$ si et seulement si la fibre $\nu^{-1}(\{g\})$ est réduite au sens des schémas. Comme tout ouvert de Zariski de G est réduit, et ν est propre, on peut appliquer le théorème 12.2.4 (iv) de [8], p. 183 et conclure que la fibre générique de ν est réduite. Il en résulte que, pour g dans un ouvert de Zariski de G, l'idéal de définition de $\nu^{-1}(\{g\})$ dans R_x est engendré par $\dim(G)$ éléments pour tout $x \in \nu^{-1}(\{g\})$, donc $\nu^{-1}(\{g\})$ est une intersection complète locale.

§5 Les fibrés vectoriels liés aux représentations sphériques

Considérons le fibré en droites holomorphe $\xi_j : G \times^{\lambda_j} \mathbf{C} \to G/P$ où λ_j est prolongé à un caractère de P en posant $\lambda_j(MN) = 1$. On note $\xi : \Xi \to G/P$ la somme directe des fibrés en droites ξ_j. Les ξ_j et ξ sont des fibrés vectoriels homogènes, et les représentations sphériques basiques sont réalisées par l'opération de G sur les espaces de sections des ξ_j.

La fonction ronde basique ρ_j correspond à une section K-invariante de ξ_j

qu'on notera ζ_j, et la somme des ζ_j est une section K-invariante de ξ qu'on notera ζ. La fibre $\nu^{-1}(\{g\})$ de ν au-dessus de $g \in G$ est alors isomorphe à l'intersection $g\zeta \cap \zeta$ dans Ξ. La projection $\xi(g\zeta \cap \zeta)$ est égale à la projection de $\nu^{-1}(\{g\}) \subseteq F/P^d$ dans G/P.

PROPOSITION 11. *Si* $\dim G_0 > 3$, *la fibre générique de* ν *est connexe.*

Démonstration. $\xi(g\zeta \cap \zeta)$ est le lieu des zéros communs des sections $g\zeta_j - \zeta_j$ de ξ_j. Notons Z_j ce lieu des zéros, et $\check{Z}_j$ le diviseur associé. Si $S \subseteq \{1, \ldots, l\}$, on note $D_S = -\sum_{j \in S} \check{Z}_j$. Pour un espace quelconque X, on note $\mathcal{O}_X$ le faisceau de germes des fonctions holomorphes sur X. Pour un diviseur D dans X, on note $\mathcal{O}_X(D)$ le faisceau des germes des fonctions méromorphes sur X qui sont multiples de D.

Posons $Y_j = \bigcap_i^j Z_i$. Pour tout j, $1 \leq j \leq l$ et tout $S \subseteq \{j+1, \ldots, l\}$, on a des suites extractes:

$$0 \to \mathcal{O}_{Y_{j-1}}(D_S - \check{Z}_j) \to \mathcal{O}_{Y_{j-1}}(D_S) \to \mathcal{O}_{Y_j}(D_S) \to 0$$

D'où les suites exactes en cohomologie:

$$\cdots \to H^i(\mathcal{O}_{Y_{j-1}}(D_S)) \to H^i(\mathcal{O}_{Y_j}(D_S)) \to H^{i+1}(\mathcal{O}_{Y_{j-1}}(D_S - \check{Z}_j)) \to \cdots \qquad (\natural)$$

Spécialisons au cas $i = |S|$. La suite exacte $(\natural)$ va nous permettre de démontrer par récurrence en j que

$$H^i(\mathcal{O}_{Y_j}(D_S)) = 0 \quad \text{si} \quad i = |S| > 0 \qquad (\#)$$

et

$$H^i(\mathcal{O}_{Y_j}(D_S)) = H^0(\mathcal{O}_{Y_j}) = \mathbf{C} \quad \text{si} \quad i = |S| = 0 \qquad (\flat)$$

au moins pour g dans un ouvert de Zariski non vide de G.

On peut appliquer le raisonnement utilisé dans la démonstration de la proposition 10 au morphisme $\nu_j : G \times_{P_j} G/P^d \to G$, $\nu_j(g_1, g_2)P^d = g_1 g_2^{-1}$ et conclure que la fibre générique de ν_j est réduite. On peut donc supposer que $g\zeta_j - \zeta_j$ n'est tangent à la section nulle le long d'aucune composante irréductible de Z_j. On a alors $\mathcal{O}_{G/P}(-\check{Z}_j) \simeq \mathcal{O}_{G/P}(\xi_j^*)$, où $\mathcal{O}_{G/P}(\xi_j^*)$ est le faisceau des germes de sections de ξ_j^*, fibré en droites inverse de ξ_j, et $\mathcal{O}_{G/P}(D_S) \simeq \mathcal{O}_{G/P}(\bigotimes_{j \in S} \xi_j^*)$. D'après le théorème de Bott–Borel–Weil (c.f. [4]), si $\delta - \sum_{i \in S} \eta_j$ est un poids

singulier, la cohomologie du faisceau $\mathcal{O}_{G/P}(\bigotimes_{i\in S}\xi_j^*)$ est nulle en toute dimension. Si $\delta - \sum_{i\in S}\eta_j$ est un poids non-singulier, le théorème de Bott–Borel–Weil affirme que la cohomologie $H^i(\mathcal{O}_{G/P}(\bigotimes_{i\in S}\xi_j^*))$ est nulle si $i \neq q$, où q est le nombre de racines positives α telles que $\langle \delta - \sum_{i\in S}\eta_j, \alpha\rangle < 0$. Si $S = \phi$, on a $q = 0$; si $\delta - \sum_{i\in S}\eta_j = -\delta$, toute racine positive vérifie $\langle \delta - \sum_{i\in S}\eta_j, \alpha\rangle < 0$ et q est égale au nombre p de racines positives. Si $G_0 \neq SL(2, \mathbf{R})$, on a $p > l$ et donc d'après le corollaire 8.3, on a (#) pour $j = 0$. On en déduit de (♮) par récurrence que (#) est vérifiée pour tout j.

On a évidemment $H^0(\mathcal{O}_{G/P}) = \mathbf{C}$. On montre alors par récurrence à partir de (#) et (♮) que

$$\dim (H^0(\mathcal{O}_{Y_j})) \leq 1$$

pour tout j. Mais d'après la proposition 1, la fibre générique de ν est non vide et on peut supposer que $\dim (H^0(\mathcal{O}_{Y_j})) \geq 1$ pour tout j. On a donc (♭) pour tout j, $0 \leq j \leq l$. En particulier on a $H^0(\mathcal{O}_{Y_l}) = \mathbf{C}$ et $Y_l = \bigcap_1^l Z_j = \xi(g\zeta \cap \zeta)$ est connexe.

PROPOSITION 12. *L'intersection $\rho_j^{-1}(\{0\})$ de ζ_j avec la section nulle de ξ_j est le réunion d'un nombre fini de K-orbites dans G/P. L'ensemble des points où ζ_j est tangent à la section nulle est un ensemble algébrique de dimension strictement inférieure à la dimension de $\rho_j^{-1}(\{0\})$. Il est donc rare pour la topologie de Zariski de $\rho_j^{-1}(\{0\})$.*

Démonstration. D'après Matsuki [21] ou Rossman [25], il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de K dans G/P. Il faut alors démontrer que ρ_j n'a pas de facteur carré dans l'anneau $R(G)$ des fonctions polynomiales sur G. Comme λ_j n'est pas un produit de deux caractères de A non-triviaux qui sont associés aux fonctions rondes, le théorème de Cartan–Helgason implique que ρ_j n'est pas un produit des fonctions non-constantes invariantes à gauche par K et à droite par N. Or, $R(G)$ est un anneau factoriel (cf. [14], [23], ou [31]). Soit $\rho_j = f_1 \cdots f_t$ la factorisation de ρ_j dans $R(G)$. Comme $R(G)$ est factoriel, on a

$$f_i(kgn) = \chi_i(k)\chi_i'(n)f(g)$$

pour $1 \leq i \leq t$, où χ_i est un caractère de K et χ_i' est un caractère de N. Or N n'a pas de caractère rationnel non-trivial. Si K est semi-simple K n'en pas non plus, ρ_j est indécomposable, et la démonstration est achèvée. Le cas contraire se produit si et seulement si G_0/K_0 est un espace Hermitien symmetrique. Dans ce cas, il existe une involution κ (c.f. Flensted–Jensen [7], où l'involution en

question est notée $\sigma\gamma$, ou [26], p. 86–87) de G ayant les propriétés suivantes:

1) κ stabilise K et N et centralise A.

2) $\kappa(z) = z^{-1}$ pour z dans le centre de K.

Pour $f \in R(G)$ notons f^κ le composé de f et κ. On a alors

$$f_1 \cdots f_t = \rho_j = \rho_j^\kappa = f_1^\kappa \cdots f_t^\kappa$$

Si $f_1 = f_1^\kappa$ alors f_1 est invariant a gauche par K et à droite par N, $t = 1$ et $\rho_j = f_1$. Si $f_1 \neq f_1^\kappa$, comme $R(G)$ est factoriel, $f_1 f_1^\kappa$ divise ρ_j. Mais $f_1 f_1^\kappa$ est une fonction non-constante invariante à gauche par G et à droite par N. Il en résulte que $f_1 f_1^\kappa$ est un multiple scalaire de ρ_j, et la proposition est démontrée.

Nous avons besoin du théorème suivant de Kleiman [15].

THÉORÈME K. *Soient X un espace homogène sous le groupe algébrique G, Y et Z deux sous-variétés lisses de X. Il existe alors un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{Y}$ de G tel que pour tout $g \in \mathcal{Y}$, l'intersection $gY \cap Z$ est transverse, non-singulière, et équidimensionelle de codimension $codim(Y) + codim(Z)$.*

L'espace total Ξ est réunion de 2^l G-orbites, correspondant aux 2^l sous-ensembles S de $(W_1, \sigma_1), \ldots, (W_l, \sigma_l)$. Les points qui ont un répresentant de la forme $(g; z_1, \ldots, z_l)$ où $z_j = 0$ si et seulement si $j \in S$, forment une G-orbite qu'on note Ω_S.

PROPOSITION 13. *La fibre générique de v est non-singulière en codimension un.*

Démonstration. Comme G/P n'a qu'un nombre fini de K-orbites, ζ n'a qu'un nombre fini de K-orbites, qui sont les images réciproques suivant ξ des K-orbites de G/P. On considère la stratification de ζ par ses K-orbites $\omega_1, \ldots, \omega_t$. Chaque ω_j est une sous-variété lisse d'une Ω_S qui la contient. Si ω_j et ω_i sont inclus dans Ω_S, le théorème de Kleiman implique qu'il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{Y}$ tel que pour tout $g \in \mathcal{Y}$ l'intersection $g\omega_i \cap \omega_j$ est transverse et la formule

$$\operatorname{codim}_\Xi (g\omega_i \cap \omega_j) = |S| + \operatorname{codim}_{\Omega_S}(\omega_i) + \operatorname{codim}_{\Omega_S}(\omega_j) \qquad (\ddagger)$$

est valable. Par conséquent il existe un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{Y}$ tel que la formule ($\ddagger$) est vraie pour tout i et j pour tout $g \in \mathcal{Y}$. Si $g \in \mathcal{Y}$ on a $\operatorname{codim}_\Xi (g\zeta \cap \zeta) = 2l$. On a

$$\xi(\Omega_S \cap \zeta) = \{gP \in G/P \mid \rho_j(g) = 0 \quad \text{si et seulement si } j \in S\}$$

donc $\operatorname{codim}_\zeta(\Omega_S \cap \zeta) = |S|$ et $\operatorname{codim}_{\Omega_S}(\Omega_S \cap \zeta) = l$, d'après la proposition 7. Par conséquent

$$\operatorname{codim}_\Xi(g\omega_i \cap \omega_j) \geq |S| + 2l$$

et pour démontrer la proposition on n'a qu'à considerer les Ω_S avec $|S| = 1$, et les ω_j de codimension l dans Ω_S. Cela équivaut à dire que ω_j est une K-orbite ouverte dans la variété $\zeta \cap \Omega_S$. Désormais on suppose que ω_j et ω_k sont des K-orbites de codimension l dans Ω_S, et que $|S| = 1$. Soient $g \in \mathcal{Y}$ et $x \in g\omega_j \cap \omega_k$. Comme ω_k respectivement $g\omega_j$ est un voisinage de x dans $\zeta \cap \Omega_S$ respectivement $g\zeta \cap \Omega_S$, on a les égalités des espaces tangents $T_x(\omega_k) = T_x(\zeta \cap \Omega_S)$ et $T_x(g\omega_j) = T_x(g\zeta \cap \Omega_S)$. Mais comme $g\omega_j \cap \omega_k$ est transverse et non-singulier dans Ω_S,

$$T_x(g\zeta \cap \Omega_S) \cap T_x(\zeta \cap \Omega_S) = T_x(g\omega_j) \cap T_x(\omega_k) = T_x(g\omega_j \cap \omega_k)$$

et

$$\dim(T_x(g\zeta \cap \Omega_S) \cap T_x(\zeta \cap \Omega_S)) = \dim(\Xi) - 2l - 1$$

Mais d'après la proposition 12, $T_x(\zeta \cap \Omega_S)$ est de codimension un dans $T_x(\zeta)$ d'où

$$\dim(T_x(g\zeta \cap \zeta)) \leq \dim(\Xi) - 2l$$

Donc $g\zeta \cap \zeta$ est non-singulier en x, et la proposition est démontrée.

PROPOSITION 14. *Si G_0 est simple et* $\dim G_0 > 3$, *la fibre générique de ν est irréductible.*

Démonstration. On sait par les propositions 10 et 13 que la fibre générique de ν est une intersection complète locale et non-singulier en codimension un. Il en résulte, d'après un critère dû à Serre (c.f. [9], proposition 8.23, p. 186), qu'elle est normale. D'après la proposition 11, elle est connexe. La proposition résulte du fait qu'un ensemble algébrique normal et connexe est irréductible.

THÉORÈME 2. *Supposons G_0 simple. Si* $\dim(G_0) > 3$, *la fibre générique de μ est irréductible.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 14 et le lemme 9.

§6. Conclusion

PROPOSITION 15. *Toute composante irréductible de Φ qui domine G rencontre $(\mathcal{S} \times \mathcal{T}) \times_G (\mathcal{S} \times \mathcal{T})$. Par conséquent, il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{Y}_2 \subseteq \mathcal{Y}_1$ de G tel que pour tout $y \in \mathcal{Y}_2$, Λ_χ soit constante sur $\mu^{-1}(y)$.*

Démonstration. Si G_0 est simple et $\dim(G_0) > 3$, le théorème 2 implique qu'il n'y a qu'une composante irréductible de Φ qui domine G, celle qui contient la diagonale de $(K \times \mathcal{D}') \times (K \times \mathcal{D}')$. Si $\dim(G_0) = 3$, la proposition 2 montre que chacune des deux composantes irréductibles de $(K \times \mathcal{D}') \times_G (K \times \mathcal{D}')$ qui dominent G rencontre tout voisinage de $(\{1_K\} \times \{(0_{\mathfrak{g}}, xP) \mid x \in G\}) \times (\{1_K\} \times \{(0_{\mathfrak{g}}, xP) \mid x \in G\})$. Si G_0 est un produit de groupes simples, $(K \times \mathcal{D}') \times_G (K \times \mathcal{D}')$ est un produit de facteurs correspondants aux facteurs simples de G_0. Il en résulte que toute composante irréductible qui domine G rencontre tout voisinage de $(\{1_K\} \times \{(0_{\mathfrak{g}}, xP) \mid x \in G\}) \times (\{1_K\} \times \{(0_{\mathfrak{g}}, xP) \mid x \in G\})$.

Comme les compositions $\Lambda_\chi \circ p_1$ et $\Lambda_\chi \circ p_2$ coincident sur $(\mathcal{S} \times \mathcal{T}) \times_G (\mathcal{S} \times \mathcal{T})$, ils sont égales sur toute composante de $(K \times \mathcal{D}') \times_G (K \times \mathcal{D}')$ qui domine G, d'où le théorème.

PROPOSITION 16. *La fonction $\pi^\chi = P_\chi \circ \hat{\pi}$ admet un prolongement analytique à un ouvert de Zariski $\mathcal{Y}_3$ non vide de G.*

Démonstration. Il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{Y}_3 \subseteq \mathcal{Y}_2$ de G tel que pour tout $y \in \mathcal{Y}_3$, il existe $x \in \mu^{-1}(\{y\})$ tel que la différentielle de μ soit de rang maximal en x. Donc pour tout $y \in \mathcal{Y}_3$, il existe un inverse à gauche holomorphe j_y à μ défini dans un voisinage de y et $f_y = \Lambda_\chi \circ j_y$ est donc une fonction analytique definie dans un voisinage de y. Deux telles fonctions f_{y_1} et f_{y_2} coincident en tous points où elles sont définies. Les f_y induisent donc une fonction globale holomorphe $\mathcal{Y}_3 \to V_\chi$ qui prolonge π^χ, et qui sera notée également π^χ.

On peut maintenant achèver la démonstration du théorème 1. Soit $g \in G_0$. Comme le vecteur $\pi(g)v \in V$ est vecteur analytique invariant par $g\Gamma g^{-1}$, on peut prolonger la fonction $\pi_g^\chi(x) = P_\chi(\pi(x)(\pi(g)v))$ de G_0 à l'ouvert de Zariski $\mathcal{Y}_3$. Comme $\mathcal{Y}_3 g \cap \mathcal{Y}_3$ est un ouvert de Zariski non vide de G, il est connexe, et on a l'égalité $\pi^\chi(x) = \pi_g^\chi(xg^{-1})$ sur $\mathcal{Y}_3 g \cap \mathcal{Y}_3$. Cela étant le cas pour tout $g \in G_0$, et G_0 étant dense dans G pour la topologie de Zariski, on déduit que la fonction $\pi^\chi = P_\chi \circ \hat{\pi}$ peut être prolongée à G tout entier. Comme π^χ est invariant à droite par Γ, elle est constante d'après le théorème W. Le théorème P–W implique maintenant que $\hat{\pi}$ est constante, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

REFERENCES

[1] BOCHNER, S. et MARTIN, W. T., *Several Complex Variables.* Princeton University Press, Princeton 1948.
[2] BOREL, A., *Density properties of certain subgroups of semisimple groups.* Ann. of Math. *72* (1960), 179–188.
[3] BOREL, A., *Linear Algebraic Groups.* W. A. Benjamin Co., New York 1969.
[4] BOTT, R., *Homogeneous Vector Bundles.* Annals of Mathematics, *66* (1957), 203–248.
[5] BOURBAKI, N., *Groupes et Algèbres de Lie,* Chapitres 4, 5, 6. Hermann, Paris 1968.
[6] BOURBAKI, N., *Groupes et Algèbres de Lie,* Chapitres 7, 8. Hermann, Paris 1975.
[7] FLENSTED-JENSEN, M., *Spherical functions on a simply connected semisimple Lie group.* Amer. J. Math. *99* (1977), 341–361.
[8] GROTHENDIECK, A., Eléments de Géometrie Algébrique IV, Etude locale des Schémas et des Morphismes de Schémas (Troisieme Partie). IHES Publications Mathématiques no. 28, Bûres-sur-Yvette 1966.
[9] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, New York, 1977.
[10] HELGASON, S., *Groups and Geometric Analysis.* Academic Press, New York 1984.
[11] HELGASON, S., *A duality for symmetric spaces with applications to group representations.* Advan. Math. *5* (1970), 1–154.
[12] HERVÉ, M., *Les Fonctions Analytiques.* Presses Universitaires de France, Paris 1982.
[13] HOCHSCHILD, G. P., *Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras.* Springer Verlag, New York 1981.
[14] IVERSEN, B., *The geometry of algebraic groups.* Advan. Math. *20* (1976), 57–85.
[15] KLEIMAN, S., *The transversality of a general translate.* Compositio Mathematicae, *28* (1974), 287–297.
[16] KOSTANT, B., *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group.* Amer. J. Math. *81* (1959), 973–1032.
[17] KOSTANT, B., *On convexity, the Weyl group, and the Iwasawa decomposition.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. *6* (1973), 413–455.
[18] KOSTANT, B., et RALLIS, S., *Orbits and representations associated with symmetric spaces.* Amer. J. Math. *93* (1971), 753–809.
[19] KRAFT, H., *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie.* Vieweg & Sohn, Braunschweig 1984.
[20] LESCURE, F., *Un résultat de type 'Hartog'.* Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Série 1, *303* (1986), 177–180.
[21] MATSUKI, T., *The orbits of minimal parabolic subgroups on affine symmetric spaces.* J. Math. Soc. Japan *31* (1979), 331–357.
[22] MATSUKI, T., *Orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups.* Hiroshima Mathematical Journal *12* (1982), 307–320.
[23] POPOV, V. L., *Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one dimensional vector bundles.* Mathematics of the USSR (Izvestiya) *8* (1974), 301–327.
[24] RAGHUNATHAN, M. S., *Discrete Subgroups of Lie Groups.* Springer Verlag, New York 1972.
[25] ROSSMAN, W., *The structure of semisimple symmetric spaces.* Canadian Journal of Mathematics *31* (1979), 157–180.
[26] SATAKE, I., *On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces.* Annals of Mathematics *71* (1960), 77–110.
[27] SATAKE, I., Algebraic Structure of Symmetric Domains. Publications of the Mathematical Society of Japan, 14. Iwanami Shoten, Tokyo 1980.
[28] SPRINGER, T. A., *The unipotent variety of a semisimple group.* Proceedings of the colloquium on algebraic geometry, Tata Institute, Bombay 1968, 373–391.

[29] SPRINGER, T. A., *Linear Algebraic Groups*. Birkhäuser, Boston 1981.
[30] STEINBERG, R., *Endomorphisms of linear algebraic groups*. Memoirs of the AMS 80, (1968).
[31] VOSKRESENSKII, V. E., *Groupes de Picard des groupes algébriques linéaires*. Etudes en Théorie des Nombres 3, Izdatelstvo Saratov (1969), 7–16 (en Russe).
[32] WEIL, A., *On discrete subgroups of Lie groups (II)*. Ann. of Math. *75* (1962), 587–602.

Université Paris VI
75252 Paris Cedex 05

Reçu le 13 février 1986/24 septembre 1986