**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 64 (1989)

**Artikel:** Composantes de petite codimension du lieu de Noether-Lefschetz.
**Autor:** Voisin, Claire
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-48961

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Comment. Math. Helvetici 64 (1989) 515–526 0010–2571/89/040515–12$01.50 + 0.20/0
© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel

# Composantes de petite codimension du lieu de Noether–Lefschetz

CLAIRE VOISIN

## 0. Introduction – Rappels

0.1 Soit $U \subset H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))$ l'ouvert paramètrant les surfaces lisses, et soit $\mathcal{S}_d \subset Y$ le lieu de Noether–Lefschetz: $\mathcal{S}_d = \{F \in U/\text{la surface } S \text{ d'équation } F \text{ satisfait } \operatorname{Pic} S \neq \mathbb{Z}\}$. $\mathcal{S}_d$ est une union dénombrable d'ensembles algébriques; le théorème de Noether affirme que $\mathcal{S}_d \neq U$ pour $d \geq 4$.

Dans [3] et [7] il est prouvé que pour $d \geq 5$ toute composante de $\mathcal{S}_d$ est de codimension au moins $d-3$, l'égalité étant réalisée seulement par la famille des surfaces contenant une droite. On prouve ici:

0.2. THEOREME. *Les composantes de $\mathcal{S}_d$ sont de codimension strictement supérieure à $2d-7$, à l'exception de la famille des surfaces contenant une droite (codimension $d-3$), et de la famille des surfaces contenant une conique (codimension $2d-7$).*

0.3. Rappelons la description locale des composantes de $\mathcal{S}_d$ (cf. [7], [9]): Pour chaque composante $M$ de $\mathcal{S}_d$ il existe localement une classe $\lambda$ primitive entière de type $(1,1)$ telle que $M$ soit définie schématiquement par la condition "$\lambda$ *reste de type* $(1,1)$". On notera $M = \mathcal{S}_{d,\lambda}$. Si $0 \in \mathcal{S}_{d,\lambda}$, soit $V$ un voisinage de 0 dans $U$; soit $\lambda$ la section plate du faisceau naturel $H^2_{\mathbb{Z}}$ sur $V$, prolongeant la classe $\lambda_0 \in H^2(S_0, \mathbb{Z})$. Soit $F^2\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{H}^2$ le sous-fibré holomorphe de $\mathcal{H}^2 = H^2_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_V$, de fibre $H^0(\Omega^2_{S_t}) \subset H^2(S_t, \mathbb{C})$ en $t \in V$. Alors $\lambda_t$ est de type $(1,1)$ équivaut à: $\lambda_t$ est orthogonale à $F^2\mathcal{H}^2_{(t)}$. On en déduit que $\mathcal{S}_{d,\lambda}$ est définie localement par $r = h^{2,0}$ équations. Les travaux récents rendent plausible la conjecture suivante, proposée par J. Harris.

0.4. CONJECTURE. *Pour chaque $d$ il existe un nombre fini de composantes de $\mathcal{S}_d$ qui ne sont pas de la codimension (naturelle) $r$.*

Notons que le théorème 0.2 prouve la conjecture 0.4 en degré $d = 5$.

0.5. La différentiation des équations 0.3 fournit immédiatement la description suivante de l'espace tangent de Zariski $T\mathcal{S}_{d,\lambda(0)}$ en 0: Soit $H_\lambda \subset H^1(\Omega_{S_0})^{prim}$,

l'hyperplan orthogonal à $\lambda \in H^1(\Omega_{S_0})^{prim}$, où *prim* dénote la cohomologie primitive de $S_0$. On a (tenant compte du fait que pour $d \geq 5$ toute déformation de $S_0$ est projective):

$$T\mathcal{S}_{d,\lambda(0)} = \{R \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))/\rho(R) \cdot \omega \in H_\lambda, \forall \omega \in H^0(\Omega^2_{S_0})\},$$

où $\rho$ est l'application de Kodaïra–Spencer:

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)) \to H^0(\mathcal{O}_{S_0}(d)) \to H^1(T_{S_0}),$$

et "$\cdot$" dénote le cup-produit:

0.6. Soit $F_0$ le polynôme définissant la surface $S_0$: notons $J^k$ la composante de degré $k$ de l'idéal jacobien de $F_0$, $S^k = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k))$ et $R^k = S^k/J^k$. On a des isomorphismes naturels: (cf. [10]):

$$-H^0(\Omega^2_{S_0}) \simeq S^{d-4} \simeq R^{d-4}$$
$$-H^1(T_{S_0}) \simeq R^d$$
$$-H^1(\Omega_{S_0})^{prim} \simeq R^{2d-4},$$

tels que le cup–produit précédent s'identifie à la multiplication dans $R^{\cdot}$, et un isomorphisme $R^{4d-8} \simeq \mathbb{C}$, tel que la forme d'intersection sur $H^1(\Omega_{S_0})$ s'identifie au produit:

$$R^{2d-4} \otimes R^{2d-4} \to R^{4d-8}.$$

Notant $\tilde{H}_\lambda \subset S^{2d-4}$ l'image réciproque de l'hyperplan $H_\lambda \subset R^{2d-4}$, 0.5 se réécrit de la façon suivante:

$$T\mathcal{S}_{d,\lambda(0)} = \{P \in S^d/P \cdot S^{d-4} \subset \tilde{H}_\lambda\} \underset{\text{déf}}{=} [\tilde{H}_\lambda : S^{d-4}].$$

Dans la suite, l'hyperplan $\tilde{H}_\lambda$ étant donné, on notera pour tout $k \leq 2d-4$

$$E_k = [\tilde{H}_\lambda : S^{2d-4-k}] \subset S^k.$$

0.7. La proposition principale de [3] et [7] s'énonce comme suit:

0.8. PROPOSITION. *Soient donnés des hyperplans* $H_\lambda \subset R^{2d-4}$, $\tilde{H}_\lambda \subset S^{2d-4}$ *comme plus haut*; *si* codim $E_d \leq d-3$, *il existe une unique droite* $\Delta \subset \mathbb{P}^3$ *telle que*

$E_{d-4} = I_\Delta(d-4) \underset{\text{def}}{=}$ *la composante de degré* $d-4$ *de l'idéal de* $\Delta$. *De plus* $\Delta$ *satisfait la condition suivante*:

0.9. $\operatorname{rang}(J^{d-1}(F_0)_{|\Delta}) = 2$.

0.10. Inversement, une droite $\Delta$ satisfaisant la condition 0.9 détermine uniquement un hyperplan $H_\lambda$ de $R^{2d-4}$, (donc une classe $\lambda_\Delta \in H^1(\Omega_{S_0})^{prim}$, définie à un coefficient près), par la relation: $\tilde{H}_\lambda = I_\Delta(2d-4) + J^{2d-4}$. Les espaces $E_k$ de 0.6 satisfont alors:

$$E_{d-4} = I_\Delta(d-4) \quad \text{et} \quad E_d = I_\Delta(d) + J^d.$$

0.11. Le texte est organisé de la façon suivante:

En paragraphe 1, on fixe une composante $\mathcal{S}_{d,\lambda}$ de codimension $\leq 2d-7$, un point générique $0 \in \mathcal{S}_{d,\lambda}$; on a: $\operatorname{codim} T\mathcal{S}_{d,\lambda(0)} \leq \operatorname{codim} \mathcal{S}_{d,\lambda} \leq 2d-7$, d'où un hyperplan $\tilde{H}_\lambda$ comme plus haut, satisfaisant d'après 0.5 la condition: $\operatorname{codim} E_d \leq 2d-7$. On montre alors la proposition suivante:

PROPOSITION 1.1. *On a les deux possibilités suivantes*:

(a) $\operatorname{codim} E_d = 2d-7$, *et* $E_d$ *contient* $I_P(d)$, *la composante de degré* $d$ *de l'idéal d'un plan* $P$ *de* $\mathbb{P}^3$. *Le plan* $P$ *est alors uniquement déterminé par la donnée de* $H_\lambda$, *ou de* $E_d$.

(b) $\operatorname{codim} E_d = d-3$, *et l'on est dans la situation décrite en* 0.8, 9, 10.

D'après le théorème principal de [3], [7] le cas b) correspond d'une part à la composante de $\mathcal{S}_d$ constituée des polynômes s'annulant sur une droite (cas $\operatorname{codim} \mathcal{S}_{d,\lambda} = d-3$), d'autre part à d'éventuelles composantes non réduites de $\mathcal{S}_d$ (cas $\operatorname{codim} \mathcal{S}_{d,\lambda} > d-3$, $\operatorname{codim} T\mathcal{S}_{d,\lambda} = d-3$ en tout point de $\mathcal{S}_{d,\lambda}$). La section 2 montre la non existence de ces composantes.

La section 3 étudie le cas a), qui correspond à des composantes réduites de $\mathcal{S}_d$, puisque l'on a génériquement $2d-7 = \operatorname{codim} T\mathcal{S}_{d,\lambda} \leq \operatorname{codim} \mathcal{S}_{d,\lambda} \leq 2d-7$. On montre essentiellement la proposition suivante:

PROPOSITION 3.0. *Soit* $\mathcal{S}_{d,\lambda}$ *une composante de codimension égale à* $2d-7$ *satisfaisant* a). *Soit* $F$ *un point générique de* $\mathcal{S}_{d,\lambda}$. *Soit* $P$ *le plan fourni par l'énoncé* a). *Soit* $C$ *la courbe plane d'équation* $F_{|P}$. *Alors tout polynôme* $G \in U$ *s'annulant sur* $C$ *est dans* $\mathcal{S}_{d,\lambda}$.

On conclut alors par un argument semblable à celui de [2], que $C$ est réductible, puis par un compte de dimensions, que $C$ a une composante de degré 2.

## 1. Preuve de la proposition 1.1

1.2. L'énoncé est évident pour $d=5$, du fait de l'accouplement parfait: $S^1/E_1 \otimes S^5/E_5 \to S^6/\tilde{H}_\lambda$; on a alors $d-3=2$, et $2d-7=3$. On ne peut pas avoir $\operatorname{codim} E_1 = 1$, par la proposition 0.8; on a donc les seules possibilités:

a) $\operatorname{codim} E_1 = 3 = 2d-7 = \operatorname{codim} E_5$, et $E_1 = I_p(1)$ pour un plan $P$ de $\mathbb{P}^3$.

b) $\operatorname{codim} E_1 = 2 = d-3$, et l'on est dans la situation de la proposition 0.8.

On supposera donc dans la suite $d \geq 6$.

1.3. LEMME. *$E_{d-4}$ possède une base locus de dimension positive.*

La démonstration occupera les paragraphes 1.3.1–1.3.10. On aura recours aux théorèmes suivants (cf. [1], [3], [5]):

1.3.1. Fixons un entier $d$; pour tout entier $c$ écrivons uniquement:

$$c = \binom{k_d}{d} + \binom{k_{d-1}}{d-1} + \cdots + \binom{k_\delta}{\delta}, \quad \text{avec} \quad k_i \geq i \quad \text{et} \quad k_i > k_{i-1}, \quad \text{l'entier} \quad \delta$$

étant uniquement déterminé par $c$. Notons alors:

$$c_{\langle d \rangle} = \binom{k_d - 1}{d} + \binom{k_{d-1} - 1}{d-1} + \cdots + \binom{k_\delta - 1}{\delta},$$

et

$$c^{\langle d \rangle} = \binom{k_d + 1}{d+1} + \binom{k_{d-1} + 1}{d} + \cdots + \binom{k_\delta + 1}{\delta + 1}.$$

Soit $W \subset H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d))$ un système linéaire de codimension $c$. Notons $c_H$ la codimension de $W_{|H}$, pour $H$ hyperplan générique de $\mathbb{P}^r$ et $c_i$ la codimension de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(i)).W$ dans $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d+i))$. On a:

1.3.2. THEOREME (Green). $c_H \leq c_{\langle d \rangle}$.

1.3.3. THEOREME (Macaulay–Gotzmann). $c_1 \leq c^{\langle d \rangle}$, *et si l'égalité est réalisée, on a pour tout $i$,* $c_i = (\cdots((c^{\langle d \rangle})^{\langle d+1 \rangle})\cdots)^{\langle d+i-1 \rangle}$.

1.3.4. Considérons l'espace $E_{d-4} \subset H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d-4))$. Par la dualité: $S^k/E_k \simeq (S^{2d-4-k}/E_{2d-4-k})^*$, on a: $c = \operatorname{codim} E_{d-4} = \operatorname{codim} E_d \leq 2d-7$. Le théorème 1.3.2 entraîne immédiatement: $c_H \leq 2$.

Appliquons alors le Théorème 1.3.3 à la restriction $E_{d-4|H}$ pour $H$ un plan générique dans $\mathbb{P}^3$: on obtient:

1.3.5. $c_1^H \leq 2$, avec égalité si et seulement si $c_i^H = 2, \forall i \in \mathbb{N}$, où $c_i^H = \operatorname{codim} H^0(\mathcal{O}_H(i)) \cdot E_{d-4|H}$.

1.3.6. Supposons par l'absurde que $E_{d-4}$ a seulement des points base isolés. Alors $E_{d-4|H}$ n'a pas de point base pour $H$ générique: on en déduit que pour $k$ assez grand: $H^0(\mathcal{O}_H(k)) \cdot E_{d-4|H} = H^0(\mathcal{O}_H(k+d-4))$, ce qui entraîne que l'égalité est impossible dans 1.3.5.

On a donc: $1 \geq \operatorname{codim} E_{d-3|H}$ et, par le même raisonnement, $\operatorname{codim} E_{d-2|H} = 0$ pour $H$ générique.

1.3.7. Pour chaque $Q \in S^1$, notons $\mu_Q^k : S^k/E_k \to S^{k+1}/E_{k+1}$ la multiplication par $Q$. Remarquons que $\mu_Q^k$ est duale de $\mu_Q^{2d-5-k}$. La conclusion de 1.3.6 s'écrit encore: pour $Q$ générique dans $S^1$, et $k \geq d-3$, $\mu_Q^k$ est surjective. Par dualité, on en déduit:

$$\mu_Q^{d-3} \quad \text{est un isomorphisme.} \tag{*}$$

On a d'autre part, d'après 1.3.6, $\operatorname{codim} E_{d-3|H} \leq 1$, pour $H$ générique, soit: $\operatorname{corang} \mu_Q^{d-4} \leq 1$, pour $Q \in S^1$ générique, et donc: $\dim S^{d-3}/E_{d-3} \leq 2d-6$.

1.3.8. Fixons $Q_0 \in S^1$, satisfaisant (*), et pour $Q \in S^1$, notons:

$$\nu_Q = (\mu_{Q_0}^{d-3})^{-1} \circ \mu_Q^{d-3} : S^{d-3}/E_{d-3} \to S^{d-3}/E_{d-3}.$$

On vérifie aisément que les $\nu_Q$ forment un ensemble linéaire commutatif d'endomorphismes contenant Id. L'hypersurface $\mathcal{D}$ de $S^1$, de degré $\leq 2d-6$, définie par l'annulation du déterminant est donc une union de plans $P_i$ comptés avec multiplicité $\alpha_i$.

1.3.9. Fixons $i$ et soit $Q \in P_i$, définissant l'hyperplan $H_Q$ de $\mathbb{P}^3$. Notons $c_Q^k$ la codimension de $E_{k|H_Q}$; alors $c_Q^{d-2} = \operatorname{corang} \mu_Q^{d-3} = \dim \operatorname{Ker} \mu_Q^{d-3} \underset{\text{dualité}}{=} \operatorname{corang} \mu_Q^{d-2} = c_Q^{d-1}$, et ces nombres sont $>0$ par définition de $P_i$. Supposons $c_Q^{d-2} \leq d-3$: alors $c_Q^{d-2\langle d-2\rangle} = c_Q^{d-2} = (c_Q^{d-2\langle d-2\rangle})^{\langle d-1\rangle} = \cdots$ Le théorème 1.3.3 s'applique alors et entraîne:

$$E_{d-1|H_Q} = H^0(\mathcal{O}_{H_Q}(1)) \cdot E_{d-2|H_Q}, \quad \text{et} \operatorname{codim} (H^0(\mathcal{O}_{H_Q}(k)) \cdot E_{d-2|H_Q}) > 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cela entraîne que $E_{d-1|H_Q}$ doit avoir des points base, ce qui est absurde car $J^{d-1}(F_0) \subset E_{d-1}$.

1.3.10. L'hypothèse faite en 1.3.9 est donc absurde, et l'on doit avoir $c_Q^{d-3} > d-3$. Cela entraîne que la multiplicité $\alpha_i$ est strictement supérieure à

$d-3$. Comme le degré de $\mathcal{D}$ est au plus $2d-6$, on en déduit que $\mathcal{D}$ est en fait un plan multiple $P_1$.

D'autre part, pour $Q \in P_1$, on a: $\dim \operatorname{Ker} \mu_Q^{d-3} > d-3$; on en déduit que le polynôme minimal de $\nu_Q$, pour $Q \in P_1$, est de la forme $X^k$, avec $k \leq d-3$. Or ceci nous mène encore à une contradiction: en effet, soit $x_0 \in \mathbb{P}^3$ le point correspondant au plan $P_1 \subset S^1$; on vérifie facilement que $\nu_Q^k = 0$, pour $Q \in P_1$ entraîne: $I_{x_0}^k \cdot S^{d-3} \subset E_{d-3+k}$, et comme $k \leq d-3$, $I_{x_0}^{d-3} \cdot S^{d-1} \subset \tilde{H}_\lambda$. Mais $\tilde{H}_\lambda$ contient également $S^{d-3} \cdot J^{d-1}$, et $J^{d-1}$ est sans point base. Comme dans [7], on voit facilement que $I_{x_0}^{d-3} \cdot S^{d-1} + S^{d-3} \cdot J^{d-1} = S^{2d-4}$, ce qui est absurde.

L'hypothèse 1.3.6 mène donc à une contradiction, et le lemme 1.3 est donc démontré.

1.4. LEMME. *On a seulement les deux possibilités suivantes*:

i) $E_{d-4} \subset I_C(d-4)$, *où $C$ est une conique de* $\mathbb{P}^3$;

ii) *Il existe une droite $\Delta \subset \mathbb{P}^3$, unique, telle que $E_{d-4} \subset I_\Delta(d-4)$.*

DEMONSTRATION. Comme $d \geq 6$, il est facile de voir que $E_{d-4}$, étant de codimension $\leq 2d-7$, ne peut pas s'annuler sur une surface de $\mathbb{P}^3$. Donc son base locus contient une courbe; comme $\operatorname{codim} E_{d-4} \leq 2d-7$ le lemme de [8], p. 115 montre que cette courbe doit être plane, et il est facile de voir que cette courbe ne peut être qu'une droite ou une conique (ici *courbe* signifie *courbe réduite*).

1.5. Notons que dans le cas i) on a nécessairement l'égalité par $\operatorname{codim} E_{d-4} \leq 2d-7$, et que $E_{d-4}$ contient $I_P(d-4)$ pour une plan $P$ uniquement déterminé. La proposition 1.1 est donc prouvée dans ce cas. Il reste donc à étudier le cas ii).

1.6. On procéde exactement comme dans [7]; esquissons seulement les étapes de la démonstration: on a $E_{d-4} \subset I_\Delta(d-4)$, avec $\operatorname{codim} E_{d-4} \leq 2d-7$, et $\operatorname{codim} I_\Delta(d-4) = d-3$; notant $\beta_k$ la codimension de $E_k$ dans $I_\Delta(k)$, pour $k \leq d-4$, (l'inclusion $E_{d-4} \subset I_\Delta(d-4)$ entraîne $E_k \subset I_\Delta(k)$, pour $k \leq d-4$), on a: $\beta_{d-4} \leq d-4$. Si $S^d \cdot E_{d-4} = I_\Delta(2d-4)$, alors on a $I_\Delta(2d-4) \subset \tilde{H}_\lambda$, d'où en fait $E_{d-4} = I_\Delta(d-4)$, puisque $E_{d-4} = [\tilde{H}_\lambda : S^d]$; sinon, on montre que l'on doit avoir: $\beta_{k-1} < \beta_k$, $k \leq d-4$. Il vient donc: $\beta_1 \leq 1$, et si $\beta_1 = 0$, on a $E_1 = I_\Delta(1)$, d'où comme précédemment $E_{d-4} = I_\Delta(d-4)$. De plus, si $\beta_1 = 1$, on doit en fait avoir $d-4 = \beta_{d-4}$, soit $\operatorname{codim} E_{d-4} = 2d-7$. Le cas $E_{d-4} = I_\Delta(d-4)$ correspond au cas b) de la proposition 1.1, le cas $\beta_1 = 1$ correspond au cas a) de la proposition 1.1, puisque l'on a alors: $\dim E_1 = 1$ et il existe un unique plan $P \subset \mathbb{P}^3$ tel que $I_P(d) \subset E_d$, et de plus: $\operatorname{codim} E_{d-4} = 2d-7 = \operatorname{codim} E_d$. La proposition 1.1 est donc prouvée.

1.7. REMARQUE. J'ignore si l'on peut prouver que dans le cas a), $E_{d-4}$ est en fait l'idéal d'une conique. Comme c'est évidemment faux pour $d=5$, et que

l'argument donné en paragraphes 3, 4 paraît plus intéressant du point de vue de la conjecture 0.4, je n'ai pas poursuivi mes investigations dans ce sens.

## 2. Non-existence de composantes non réduites de codimension $\leq 2d-7$

2.1. On montre dans cette section que le cas b) de la proposition 1.1 ne se produit que pour la composante de $\mathcal{S}_d$ constituée des surfaces contenant une droite. On raisonnera par l'absurde; pour alléger les notations, on appellera $M$ une composante $\mathcal{S}_{d,\lambda}$ de $\mathcal{S}_d$, de codimension $\leq 2d-7$, satisfaisant la proposition 1.1 b), différente de la famille des surfaces contenant une droite. On notera $M_{\text{red}} \subset M$ la variété réduite sous-jacente à $M$. Soit 0 un point générique de $M_{\text{red}}$. D'apres 0.8–0.10, on a: Il existe une droite $\Delta_0 \subset \mathbb{P}^3$, uniquement déterminée, telle que:

i) $\operatorname{rang}(J^{d-1}(F_0)_{|\Delta_0}) = 2$, où $F_0$ est le polynôme correspondant au point 0.

ii) L'hyperplan $\tilde{H}_\lambda$ défini en 0.5–0.6 est égal à $I_{\Delta_0}(2d-4) + J^{2d-4}(F_0)$.

iii) $TM_{(0)} = I_{\Delta_0}(d) + J^d(F_0)$, et évidemment $TM_{\text{red}\,(0)} \subset TM_{(0)}$, avec $\operatorname{codim} TM_{\text{red}\,(0)} \leq 2d-7$.

2.2. Fixons une droite $\Delta \subset \mathbb{P}^3$, et notons $M_{\Delta,\,\text{red}}$ la sous-variété de $M_{\text{red}}$ (clairement de codimension $4 = \dim \operatorname{Grass}(2,4)$ dans $M_{\text{red}}$), qui satisfait i), ii) et iii) avec $\Delta_0 = \Delta$.

Notons par ailleurs $G_\Delta \subset U$ la clôture de la famille des polynômes $F$ tels que: $\operatorname{rang}(J^{d-1}(F)_{|\Delta}) = 2$, $F_{|\Delta} \neq 0$.

Notons $G^1_\Delta \subset G_\Delta$, la clôture de la famille des polynômes $F \in U$ tels que: $\operatorname{rang}(J^{d-1}(F)_{|\Delta}) = 2$, et: $\exists A \neq 0 \in H^0(\mathcal{O}_\Delta(1))$, avec $F_{|\Delta} = A^d$.

Notons enfin $G^2_\Delta \subset G_\Delta$ l'intersection de $G_\Delta$ avec la famille des polynômes $F \in U$, tels que $F_{|\Delta} = 0$. On a $G^2_\Delta \subset G^1_\Delta$.

L'hypothèse 2.1 donne une inclusion $M_{\Delta,\,\text{red}} \subset G_\Delta$, $M_{\Delta,\,\text{red}} \nsubseteq G^2_\Delta$. On a alors: (cf. [7]).

2.3. LEMME. *En tout point de $G_\Delta \backslash G^2_\Delta$, $G_\Delta$ est lisse de codimension* $2(d-2)$.

2.4. LEMME. *En tout point $F$ de $G_\Delta \backslash G^1_\Delta$, la codimension de $TG_{\Delta(F)} \cap (I_\Delta(d) + J^d(F))$ dans $TG_{\Delta(F)}$ est au moins deux.*

La démonstration de ces lemmes est facile (on a des équations explicites pour $G_\Delta$), et ne sera pas donnée ici.

2.5. Supposons $M_{\Delta,\,\text{red}} \nsubseteq G^1_\Delta$. Soit 0 un point générique de $M_{\Delta,\,\text{red}}$; comme

codim $M_{\text{red}} \leq 2d-7$, on a codim $M_{\Delta,\text{ red}} \leq 2d-3$, et d'après le lemme 2 $M_{\Delta,\text{ red}}$ doit s'identifier au voisinage de $F_0$ à une hypersurface de $G_\Delta \backslash G^1_\Delta$ ou à un ouvert de $G_\Delta \backslash G^1_\Delta$, selon que codim $M_{\Delta,\text{ red}} = 2d-3$ ou $2d-4$ (les autres possibilités étant exclues par l'inclusion $M_{\Delta,\text{ red}} \subset G_\Delta$). Or cela contredit le lemme 2.4 puisque cela entraînerait: la codimension de $TM_{\Delta,\text{ red}(0)}$ dans $TG_{\Delta,(F_0)}$ est au plus 1, avec, par 2.1 iii): $TM_{\Delta,\text{ red}(0)} \subset I_\Delta(d) + J^d(F_0)$.

2.6. L'hypothèse 2.5 est donc contradictoire, et l'on a: $M_{\Delta,\text{ red}} \subset G^1_\Delta$. Etudions $G^1_\Delta$.

2.7. LEMME. *$G^1_\Delta \backslash G^2_\Delta$ est irréductible de codimension $2d-3$.*

La preuve ne présente aucune difficulté et sera omise ici.

2.8. Du lemme 2.7, et de codim $M_{\Delta,\text{ red}} \leq 2d-3$, $M_{\Delta,\text{ red}} \subset G^1_\Delta$, on déduit:

$M_{\Delta,\text{ red}}$ est ouvert dans $G^1_\Delta$.

Par ailleurs, d'après 0.10, en tout point $F$ de $G_\Delta$, on a une classe $\lambda_\Delta \in H^1(\Omega_S)^{prim}$ définie à un coefficient près. Il est facile de voir que le sous-ensemble $E$ suivant de $G^1_\Delta$: $E = \{F \in G^1_\Delta / \lambda_\Delta$ est proportionnelle dans $H^1(\Omega_S)^{prim}$ à une classe entière de type $(1,1)$, (vue dans $H^1(\Omega_S)^{prim})\}$ est une union dénombrable de fermés analytiques. Comme $E$ contient un ouvert de $G^1_\Delta$, par ce qui précède, on en déduit:

2.9. Pour toute droite $\Delta \subset \mathbb{P}^3$, et pour tout polynôme $F \in U$, tels que:

i) rang $(J^{d-1}(F)_{|\Delta}) = 2$

ii) $\exists A \neq 0 \in H^0(\mathcal{O}_\Delta(1))$, avec $F_{|\Delta} = A^d$, on a: la classe $\lambda_\Delta \in H^1(\Omega_S)^{prim}$, définie en 0.10, est proportionnelle à une classe entière primitive de type $(1,1)$.

2.10. Il est aisé de voir que 2.9 est faux; (je remercie le rapporteur pour m'avoir signalé que ma démonstration initiale etait trop compliquée):

2.11. En effet, pour toute surface lisse $S$, il existe dans $\mathbb{P}(H^1(\Omega_S)^{prim})$ au plus un ensemble dénombrable de classes proportionnelles à une classe entière; or, considérons la surface de Fermat, d'équation $F = X_0^d + X_1^d + X_2^d + X_3^d$; soit $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta^d = -1$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, soit $\Delta_\alpha$ la droite d'équations: $X_1 = \alpha X_0$, $X_3 = \zeta X_2$. On a: $F_{|\Delta_\alpha} = (1+\alpha^d)X_0^d$ et rang $J^{d-1}(F)_{|\Delta_\alpha} = 2$. Les droites $\Delta_\alpha$ déterminent dans $\mathbb{P}(H^1(\Omega_S)^{prim})$ des classes $\lambda_{\Delta_\alpha}$ distinctes, et comme $\alpha$ parcourt $\mathbb{C}$, il existe un $\alpha$ tel que $\lambda_{\Delta_\alpha}$ n'est pas proportionnel à une classe entière. Le couple $(\Delta_\alpha, F)$ ne satisfait donc pas à 2.9. Cette contradiction montre la non-existence de la composante $M$ de 2.1.

2.12. REMARQUE. La rapporteur suggère par ailleurs l'argument suivant: on peut construire un pinceau de Lefschetz dans $\overline{G^1_\Delta}$, la clôture de $G^1_\Delta$; on peut donc appliquer le principe d'irréductibilité de l'action de monodromie pour un tel pinceau et en déduire que $\operatorname{Pic}\Sigma = \mathbb{Z}$ pour en élément générique $\Sigma$ de $G^1_\Delta$, puisque $h^{2,0}(\Sigma) > 0$ pour $\Sigma \in G^1_\Delta$; ceci contredit évidemment 2.8.

## 3. Preuve de la proposition 3.0

3.1. Il reste à étudier les composantes $M$ de $\mathcal{S}_d$ de codimension $2d-7$ et satisfaisant le cas a) de la proposition 1.1. Une telle composante est réduite et on appellera $M^0 \subset M$ l'ouvert de lissité de $M$.

On a par hypothèse une application $\Phi : M^0 \to \mathbb{P}(S^1)$, évidemment holomorphe, qui à un point $t \in M^0$ associe l'unique plan $P \subset \mathbb{P}^3$, tel que $\tilde{P} \cdot S^{d-1} \subset TM^0_{(t)}$, où $\tilde{P}$ est une équation de $P$. Par ailleurs, soit $0 \in M$, et soit $V$ un voisinage de 0 dans $U$ tel qu'il existe sur $V$ une section $\lambda$ de $H^2_{\mathbb{Z}}$, avec $\lambda_0$ de type $(1,1)$, et que $M^0 \cap V = \mathcal{S}_{d,\lambda}$, comme en 0.3. Alors, avec les notations du paragraphe 0, on a sur $M^0 \cap V$:

3.1.1. $\Phi(t) = A \Leftrightarrow \tilde{A} \cdot S^{2d-5} \subset \tilde{H}_\lambda$, où $\tilde{A} \in S^1$ relève $A$.

3.2. Soit $\gamma_0$ un deux cycle dans $S_0$, égal, via la dualité de Poincaré, à $\lambda_0$. Soit un voisinage tubulaire de $S_0$ dans $\mathbb{P}^3$, contenant $S_t$ pour $t \in V$, qui existe à condition de supposer $V$ assez petit. L'interprétation topologique de l'isomorphisme $R^{2d-4}_{(t)} \simeq H^1(\Omega_{S_t})^{prim}$ permet d'écrire 3.1.1 sous la forme:

3.2.1. Pour $t \in M^0 \cap V$, $\Phi(t) = A \Leftrightarrow \int_{\operatorname{Tub}\gamma_0} (\tilde{A}P)/F^2_t \cdot \Omega = 0$, $\forall P \in S^{2d-5}$, où $\Omega$ est la section canonique de $K_{\mathbb{P}^3}(4)$, et $\operatorname{Tub}\gamma_0$ est le tube sur $\gamma_0$ (homologue dans $\mathbb{P}^3 \backslash S_t$ au tube sur $\gamma_t$).

3.3. On notera $M^0_A = \Phi^{-1}(A)$, pour $A \in \mathbb{P}(S^1)$. Remarquons que $\Phi$ commute avec l'action de $PGl(3)$, de sorte que $M^0_A$ est lisse, de codimension $2d-4$ dans $U$; 3.2.1 se différencie aisément et donne la description suivante de l'espace tangent $TM^0_{A(0)}$ à $M^0_A$ en 0:

3.3.1. $TM^0_{A(0)} = \{S \in TM^0_{(0)} / \int_{\operatorname{Tub}\gamma_0} (\tilde{A}SP)/F^3_0 \cdot \Omega = 0, \forall P \in S^{2d-5}\}$.

On consacrera les paragraphes 3.4.1–3.4.8 à la démonstration du lemme suivant:

3.4. LEMME. $\tilde{A} \cdot S^{d-1} \subset TM^0_{A(0)}$.

DEMONSTRATION. Par construction, $\tilde{A} \cdot S^{d-1} \subset TM^0_{(0)}$. Au vu de 3.3.1 il suffit donc de prouver:

3.4.1. $\forall Q \in S^{d-1}$, $\forall P \in S^{2d-5}$, $\int_{\operatorname{Tub}\gamma_0} (\tilde{A}^2 PQ)/F^3_0 \cdot \Omega = 0$.

3.4.2. Mais $\lambda$ fournit un morphisme $m_\lambda : S^{d-4} \otimes \mathcal{O}_{M^0} \to (S^d)^* \otimes \mathcal{O}_{M^0}$, défini ponctuellement par: $m_{\lambda(t)}(B) = (c \mapsto \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_0} BC/F_t^2 \cdot \Omega)$, pour $B \in S^{d-4}$ et $C \in S^d$. Par hypothèse, $m_\lambda$ est de rang $2d-7$ au voisinage de 0.

3.4.3. En général, si l'on a un morphisme $f$ entre deux faisceaux localement libres $E$ et $F$ sur une variété lisse $S$, on en déduit une application linéaire $df_{(0)}$: $\mathrm{Ker}\, f_0 \to (\mathrm{Coker}\, f_0) \otimes \Omega_{S(0)}$, en chaque point 0 de $S$, qui s'annule au point 0 si et seulement si $f$ est de rang constant au premier ordre en 0. Dans une trivialisation locale de $E$ et $F$, $df_{(0)}$ est simplement donnée par la différentielle de la matrice de $f$, composée avec la restriction à $\mathrm{Ker}\, f_0$ et la projection sur $\mathrm{Coker}\, f_0$.

3.4.4. Dans notre situation les faisceaux $E = S^{d-4} \otimes \mathcal{O}_{M^0}$ et $F = (S^d)^* \otimes \mathcal{O}_{M^0}$ sont triviaux; de plus, avec les notations du paragraphe 0, on a: $\mathrm{Ker}\, m_{\lambda,0} = E_{d-4}$ et $\mathrm{Coker}\, m_{\lambda,0} = E_d^*$. Enfin, $\Omega_{M(0)}$ est isomorphe à $E_d^*$. Il est alors facile de voir, à l'aide de la règle décrite en 3.4.3, que:

$$(3.4.5)\quad dm_{\lambda,0}(B)(P \otimes Q) = -2\int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_0} (B.P.Q)/F_0^3 \cdot \Omega, \quad \text{pour} \quad B \in E_{d-4},\ P, Q \in E_d.$$

D'après 3.4.2–3.4.5 on a donc:

$$(3.4.6)\quad \forall B \in E_{d-4}, \forall P, Q \in E_d, \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_0} (BPQ)/F_0^3 \cdot \Omega = 0.$$

Comparant avec 3.4.1 on voit que le lemme 3.4 est démontré si l'on a:

3.4.7. $\tilde{A}^2 \cdot S^{3d-6} \subset E_{d-4} \cdot E_d \cdot E_d$.

Mais on a: $\tilde{A} \cdot S^{d-5} \subset E_{d-4}$, et $\tilde{A} \cdot S^{d-1} \subset E_d$; il suffit donc de prouver

3.4.8. $S^{3d-6} \subset E_d \cdot S^{2d-6}$.

Or $E_d$ est sans point base, de codimension $2d-7$. 3.4.8 résulte alors de ([6], théorème 2.16), (M. Green a maintenant supprimé la condition sur la codimension du système linéaire considéré cf. [4], §4). Le Lemme 3.4 est donc prouvé.

3.5. La preuve de la proposition 3.0 est maintenant facile. En effet, considérons l'application $\Psi_A : M_A^0 \to H^0(\mathcal{O}_A(d))$ définie par $\Psi_A(t) = F_{t|A}$. Le Lemme 3.4 donne immédiatement:

3.5.1. Corang $(\Psi_A) = \mathrm{codim}\,(TM_A^0)$ en tout point de $M_A^0$.

On en déduit que l'image de $\Psi_A$ dans $H^0(\mathcal{O}_A(d))$ est de codimension égale à celle de $M_A^0$ dans $S^d$, ce qui entraîne évidemment:

3.5.2. La fibre de $\Psi_A$ en $F_0$ contient un ouvert de Zariski de l'ensemble

$\{G \in U/G_{|A} = F_{0|A}$. Ce qui est le contenu de la proposition 3.0 compte tenu du fait que si $F \in M$, $\alpha F \in M$ pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

## 4. Preuve du théorème 0.2

4.1. Soit $M$ une composante de $\mathcal{S}_d$ comme en paragraphe 3; soit 0 un point générique de $M$; soit $A = \Phi(0)$, et soit $C$ la courbe plane d'équation $F_{0|A}$. D'après la proposition 3.0, toute surface lisse $S$ de degré $d$ contenant $C$ satisfait $\operatorname{Pic} S \neq \mathbb{Z}$.

Une adaptation de l'argument donné par Griffiths et Harris dans [2] va alors nous donner la proposition suivante:

4.2. PROPOSITION. *Une courbe plane $C$ réduite satisfaisant cette hypothèse est réductible.*

DEMONSTRATION. On rappelle que $\tilde{A}$ est l'équation du plan $A$ et que $C$ est définie par l'équation $F_{0|A}$. Soit $G$ un polynôme de degré $d-1$ définissant une surface lisse $Q$, telle que $Q \cap A$ soit lisse et coupe $C$ transversalement en $d(d-1)$ point $p_i$. Soit $\Delta$ un disque, et soit $X \subset \mathbb{P}^3 \times \Delta$ l'hypersurface d'équation $\tilde{A}G + tF_0 = 0$.

Les hypothèses impliquent, si $\Delta$ est suffisamment petit, que $X$ a pour seules singularités des noeuds aux points $(p_i, 0)$. On désingularise $X$ en éclatant ces points, puis en contractant chaque quadrique exceptionnelle suivant le réglage défini par la droite exceptionnelle de $\tilde{Q}$, le transformé strict de $Q$. La fibre centrale est alors constituée de la réunion $\tilde{\mathbb{P}}^2 U_D Q$ où $\tilde{\mathbb{P}}^2$ est l'éclatement du plan $A$ aux points $p_i$ et $D \subset \tilde{\mathbb{P}}^2$ est le transformé strict de la courbe $Q \cap A \subset A$. Toutes les fibres $\tilde{X}_t$, $t \neq 0$, contiennent la courbe $C$ et satisfont donc: il existe $\lambda \neq 0 \in \operatorname{Pic}(\tilde{X}_t)^{prim} = H^2(\tilde{X}_t, \mathbb{Z})^{prim} \cap H^{1,1}(\tilde{X}_t)$. Supposons pour simplifier que la monodromie autour de 0 agisse trivialement sur la classe $\lambda$. Il existe alors un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $\tilde{X}$ qui satisfait: $c_1(\mathcal{L}_{|\tilde{X}_t}) = \lambda$, pour $t \neq 0$. Suivant [2], on montre alors que si $\operatorname{Pic} \tilde{X}_0 = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$, ou $u$ est le diviseur qui vaut $\mathcal{O}(1)$ sur chaque composante, et $v$ est le diviseur qui vaut 0 sur $Q$ et $\mathcal{O}(d) - \sum_i E_i$ sur $\tilde{\mathbb{P}}^2$, alors on doit avoir $\mathcal{L}_{|\tilde{X}_t} = \mathcal{O}_{X_t}(k)$, pour un $k \in \mathbb{Z}$. L'hypothèse implique donc: $\operatorname{Pic} \tilde{X}_0 \neq \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$. Or si $\operatorname{Pic} Q = \mathbb{Z}$, comme on peut le supposer puisque $\deg(Q) \geq 4$, on a: $\operatorname{Pic} \tilde{X}_0 = \mathbb{Z}u \oplus \operatorname{Ker}(\operatorname{Pic} \tilde{\mathbb{P}}^2 \to \operatorname{Pic} D)$. On doit donc avoir:

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Pic} \tilde{\mathbb{P}}^2 \to \operatorname{Pic} D) \neq \mathbb{Z}v,$$

ou encore:

$$\operatorname{Ker}\left(\bigoplus_{i=1}^{d(d-1)} \mathbb{Z}p_i \oplus \mathbb{Z}h \to \operatorname{Pic} D\right)$$

n'est pas engendré par $dh - \sum_{i=1}^{d(d-1)} p_i$, où $h$ est la classe du diviseur $\mathcal{O}_D(1)$. La courbe $D$ décrit un ouvert de Zariski dans la famille des courbes planes de degré $d-1$; l'existence d'une relation non triviale entre les $p_i$ autre que la relation évidente $\sum_{i=1}^{d(d-1)} p_i = dh$ interdit que la monodromie agisse comme le groupe symétrique sur l'ensemble $\{p_i\}$. Cela entraîne que $C$ est réductible ([8], p. 111).

Dans le cas où la monodromie agit de façon non triviale sur la classe $\lambda$, il est montré dans [2] qu'après un changement de base et une désingularisation, on obtient une variété $\tilde{X}'$ dont le groupe de Picard diffère de celui de $\tilde{X}$ essentiellement de la même façon que celui de la fibre centrale $\tilde{X}'_0$ diffère de celui de $\tilde{X}_0$; de sorte que l'argument reste le même.

4.3. Comme $C$ est réductible, $M$ est contenue dans l'un des ensembles suivants $T_k = \{F \in U/S$ possède une section plane réductible $C_k \cup C_{d-k}$, avec $\deg(C_k) = k \leq d-k\}$. Comptant les dimensions, on voit immédiatement que codim $T_k \leq 2d-7 \Rightarrow k = 1$ ou 2, et donc $M$ est la famille des surfaces contenant une droite ou la famille des surfaces contenant une conique, ce qui achève la preuve du théorème 0.2.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] GOTZMANN, G., *Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbert polynom eines Graduierten Ringes*. Math. Z. *158* (1978), 61–70.

[2] GRIFFITHS, P. and HARRIS, J., *On the Noether–Lefschetz theorem and some remarks on codimension two cycles*. Math. Ann. *271* (1985) 31–51.

[3] GREEN, M., *Components of maximal dimension in the Noether–Lefschetz locus*. A paraître dans J. Differential Geometry.

[4] GREEN, M., *Koszul cohomology and geometry*. Preprint.

[5] GREEN, M., *Macaulay representations and hyperplane restrictions*. Preprint.

[6] GREEN, M., *Koszul cohomology and the geometry of projective varieties II*. J. Differential Geometry *20* (1984), 279–288.

[7] VOISIN, C., *Une précision concernant le théorème de Noether*. Math. Ann. *280* (1988), 605–611.

[8] ARBARELLO, E., CORNALBA, M., GRIFFITHS, P. and HARRIS, J., *Geometry of algebraic curves*. Vol. I, Springer Verlag (1984).

[9] GRIFFITHS, P. and HARRIS, J., *Infinitesimal variations of Hodge structures II: an infinitesimal invariant of Hodge classes*. Compo. Math. Vol. *50*, (1983).

[10] CARLSON, J. and GRIFFITHS, P., *Infinitesimal variations of Hodge structure and the global Torelli problem*. Géométrie Algébrique, Angers, Sijthoff and Nordhoff (1980), 51–76.

[11] GRIFFITHS, P. and HARRIS, J., *Algebraic geometry and local differential geometry*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. *12*, (1979), 355–342.

[12] HARRIS, J., *Galois groups of enumerative problems*. Duke Math. J. *46* No. 4 (1979), 685–724.



*Département de Mathématiques*
*Centre d'Orsay,*
*Université de Paris-Sud*
*91405 ORSAY CEDEX*


Reçu le 7 avril 1988