Ein Tauber-Satz mit Restglied für die Laplace-Transformation.

Autor(en): **Stadler, Albert**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **64 (1989)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-48932

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 64 (1989) 1–33 0010–2571/89/010001–33$01.50 + 0.20/0
© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel

Ein Tauber-Satz mit Restglied für die Laplace-Transformation

ALBERT STADLER

1. Einleitung

In dieser Arbeit wird eine Verallgemeinerung des nachstehenden klassischen Satzes von Wiener–Ikehara [10], [21] bewiesen:

Sei $A(x)$ eine in $x \geq 0$ definierte, nicht negative und nicht fallende Funktion derart, dass das Integral

$$f(s) = \int_0^\infty A(x)e^{-xs}\,dx, \qquad s = \sigma + it,$$

für $\sigma > \alpha \geq 0$ konvergiert. Existiert nun eine reelle Zahl a so, dass $f(s) - a/(s-\alpha)$ regulär ist in $\sigma \geq \alpha$, so gilt:

$$A(t) \sim ae^{\alpha t}, \qquad t \to \infty. \tag{1}$$

Die Verallgemeinerung zielt in zwei Richtungen. Erstens wird die Singularität $a/(s-\alpha)$ ersetzt durch eine Funktion $f_0(s)$, die Laplace-Transformierte einer Funktion $A_0(x)$ sein soll, und zweitens wird unter gewissen Annahmen bezüglich Regularitätseigenschaften und Wachstumsverhalten der Funktion $g(s) = f(s) - f_0(s)$ eine Abschätzung für $|A(x) - A_0(x)|$ nach oben gegeben (in Verschärfung der asymptotischen Aussage (1)).

Der Tauber-Satz wird schliesslich verwendet für die Bestimmung des Haupt- und Resttermes für

$$\sum_{n \leq x} d(n), \quad \sum_{n \leq x} \tau^2(n), \quad \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \quad c(n), \quad p(n),$$

wo $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n, $\tau(n)$ die Ramanujansche Funktion, $\Lambda(n)$ die von Mangoldtsche Funktion, $p(n)$ die Anzahl der Partitionen von n und $c(n)$ (bis auf einen konstanten Faktor) den $(n-1)$-ten Fourierkoeffizienten der absoluten Invarianten $J(\tau)$ bezeichnet. Es zeigt sich, dass die durch den Tauber-Satz erzielten Restglieder nur unwesentlich schwächer

sind als jene Restglieder, die man durch die klassischen Methoden der Funktionentheorie erhält ([1], [2], [3], [4]).

Diese Arbeit ist eine überarbeitete Fassung meiner Dissertation, die ich bei Prof. K. Chandrasekharan geschrieben habe. Ich möchte ihm und seinem früheren Assistenten Dr. P. Thurnheer danken für Ermutigungen, Anregungen und wertvolle Hinweise.

2. Resultate

SATZ 1. *Sei $A(x)$ eine für $x \geq 0$ definierte, nicht negative und nicht fallende Funktion. Das Integral*

$$\int_0^\infty A(x)e^{-xs}\,dx, \qquad s = \sigma + it,$$

besitze die Konvergenzabszisse α, $0 \leq \alpha < \infty$, und konvergiere für $\sigma > \alpha$ nach $f(s)$. Sei $A_0(x)$ eine reellwertige, messbare Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f_0(s) = \int_0^\infty A_0(x)e^{-xs}\,dx$, $s = \sigma + it$, *besitze die Abszisse der absoluten Konvergenz α.*

(ii) *Es gibt eine für $x \geq 0$ definierte, nicht negative und messbare Funktion $B_0(x)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $|A_0(y)| \leq B_0(y)$ *für alle* $y \geq 0$.

(b) *Es gibt eine absolute Konstante $M_1 > 0$ so, dass $|A_0(y+h) - A_0(y)| \leq M_1\,|h|\,B_0(y)$ für alle $y \geq 4$ und alle h, $-2 \leq h \leq 2$.*

(c) *Es gibt absolute Konstanten $M_2 \geq 1$, $\omega \geq \alpha$ so, dass $B_0(y+h) \leq M_2 B_0(y) e^{\omega|h|}$ für alle $y \geq 4$ und alle h, $h \geq 1 - y$.*

(d) $\int_0^1 B_0(y)\,dy < \infty$.

(e) $B_0(y) \geq 1$, $y \geq 4$.

Sei für ein festes c aus dem offenen Intervall $(0, 1/(2(2+\omega+\alpha)))$

$$h(x) = e^{-cx^2} (x \in \mathbb{R}),\ \hat{h}(t) = \int_{-\infty}^\infty h(x)e^{ixt}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\,e^{-t^2/(4c)} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Seien T, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq T \geq 1$. Sei $g(s) = f(s) - f_0(s)$. Dann ist $g(s)$ analytisch in $\operatorname{Re} s > \alpha$, *und es gilt für $y \geq 4$, $\alpha < \sigma \leq \alpha + 1$:*

$$|A(y) - A_0(y)| \leq M_3 \frac{T}{\lambda} B_0(y) + M_3 \hat{h}(T)\Big(B_0(y) + e^{\sigma y}\int_{-\infty}^\infty h(t)\,|g(\sigma+it)|\,dt\Big)$$
$$+ M_3 e^{\sigma y} \max_{x = \pm T/\lambda} \left| \int_{-\infty}^\infty h\Big(\frac{t}{\lambda}\Big) e^{it(y+x)} g(\sigma+it)\,dt \right|,$$

wo M_3 eine positive Konstante ist, die unabhängig ist von y, λ, T und σ. Genügt $g(s)$ zusätzlich der nachstehenden

Voraussetzung (*):

(i) *$g(s)$ besitzt eine analytische Fortsetzung nach* $\operatorname{Re} s > \beta$, *wo* $\beta \le \alpha$, *die zudem stetig ist in* $\operatorname{Re} s \ge \beta$.

(ii) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $M(\varepsilon) > 0$ so, dass $|g(\sigma + it)| \le M(\varepsilon)e^{\varepsilon t^2}$, gleichmässig in $\beta \le \sigma \le \alpha + 1$, so gilt für $y \ge 4$:*

$$|A(y) - A_0(y)| \le M_4 \frac{T}{\lambda} B_0(y) + M_4 \hat{h}(T)(B_0(y) + e^{\beta y})$$
$$+ M_4 e^{\beta y} \max_{x = \pm T/\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{\beta - \alpha + it}{i\lambda}\right) e^{it(y+x)} g(\beta + it)\, dt \right|,$$

wo M_4 eine positive Konstante ist, die unabhängig ist von y, λ und T. Aus Satz 1 *können folgende Korollare abgeleitet werden:*

KOROLLAR 1. *Seien $A(x)$, $f(s)$, α, $h(x)$, $\hat{h}(t)$ wie in Satz* 1 *definiert, wobei c im Intervall* $(0, 1/(4\alpha + 6))$ *fest gewählt sei. Man setze voraus, dass $f(s)$ eine meromorphe Fortsetzung nach* $\operatorname{Re} s \ge \beta$ $(\beta \le \alpha)$ *besitzt mit endlich vielen Polen $s_1, s_2, \ldots, s_q$ in* $\beta \le \operatorname{Re} s \le \alpha$. *Der Hauptteil von $f(s)$ in s_j* $(1 \le j \le q)$ *sei*

$$\sum_{\kappa=0}^{a_j} \frac{v_{j\kappa}}{(s - s_j)^{\kappa+1}} \quad (a_j \in \mathbb{N}_0,\ 1 \le j \le q;\ v_{j\kappa} \in \mathbb{C},\ 0 \le \kappa \le a_j,\ 1 \le j \le q).$$

Man kann annehmen, dass $\beta \le \operatorname{Re} s_q \le \operatorname{Re} s_{q-1} \le \cdots \le \operatorname{Re} s_1 \le \alpha$ *ist. Man setzt*

$$g(s) = f(s) - \sum_{j=1}^{q} \sum_{\kappa=0}^{a_j} \frac{v_{j\kappa}}{(s - s_j)^{\kappa+1}}$$

und nimmt an, dass $g(s)$ Voraussetzung (*) *in Satz* 1 *erfüllt. Seien T, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \ge T \ge 1$. Dann gilt für $y \ge 4$:*

$$\left| A(y) - \sum_{j=1}^{q} \sum_{\kappa=0}^{a_j} \frac{v_{j\kappa}}{\kappa!} y^{\kappa} e^{s_j y} \right| \le M_5 y^L e^{\alpha y} \left(\frac{T}{\lambda} + \hat{h}(T) \right)$$
$$+ M_5 e^{\beta y} \max_{x = \pm T/\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{\beta - \alpha + it)}{i\lambda}\right) e^{it(y+x)} g(\beta + it)\, dt \right|,$$

wo M_5 eine positive Konstante ist, die unabhängig ist von y, λ, T, und wo $L = \max_{\mathrm{Re}\, s_j = \alpha} a_j$ die um eins verminderte höchste Ordnung derjenigen Pole von f ist, deren Realteil $= \alpha$ ist.

KOROLLAR 2. *Seien $A(x)$, $f(s)$, α, $h(x)$, $\hat{h}(t)$, c wie in Korollar 1 definiert. Es gebe Zahlen $\rho > 0$, $(\rho \in \mathbb{R})$, $k \geq 0$, $(k \in \mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{R}$ so, dass*

$$g(s) = f(s) - \frac{b}{(s-\alpha)^\rho}\left(\log \frac{1}{s-\alpha}\right)^k$$

die Voraussetzung (*) in Satz 1 erfüllt. (Hier sei $s \to \log(1/(s-\alpha))$ der Hauptzweig der Logarithmusfunktion, definiert durch

$$\log \frac{1}{s-\alpha} = \log \left|\frac{1}{s-\alpha}\right| + i \operatorname{Arg} \frac{1}{s-\alpha},$$

$$-\pi < \operatorname{Arg} \frac{1}{s-\alpha} < \pi \quad \text{und} \quad \frac{1}{(s-\alpha)^\rho} = \exp\left(\rho \log \frac{1}{s-\alpha}\right)).$$

Seien T, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq T \geq 1$. Dann gilt für $y \geq 4$:

$$\left|A(y) - be^{\alpha y}\left(\frac{d}{dv}\right)^k \frac{y^{v-1}}{\Gamma(v)}\bigg|_{v=\rho}\right| \leq M_6(1 + y^{\rho-1})(\log^k y)e^{\alpha y}\left(\frac{T}{\lambda} + \hat{h}(T)\right)$$
$$+ M_6 e^{\beta y} \max_{x = \pm T/\lambda} \left|\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{\beta - \alpha + it}{i\lambda}\right) e^{it(y+x)} g(\beta + it)\, dt\right|,$$

wo M_6 eine positive Konstante ist, die unabhängig ist von y, λ, T.

3. Beweise

LEMMA 1. *Seien $A(x)$, $A_0(x)$ in $x \geq 0$ definierte, reellwertige, messbare Funktionen. Die Integrale*

$$f(s) = \int_0^\infty A(x)e^{-xs}\, dx, \qquad f_0(s) = \int_0^\infty A_0(x)e^{-xs}\, dx, \qquad s = \sigma + it,$$

seien absolut konvergent für $\sigma > \alpha$, wo $0 \leq \alpha < \infty$ sei. Sei

$$g(s) = f(s) - f_0(s), \qquad \mathrm{Re}\, s > \alpha,$$
$$R(x) = A(x) - A_0(x), \qquad x \geq 0.$$

Die Funktionen $h(x)$, $\hat{h}(t)$ seien für $c>0$ wie in Satz 1 definiert. Dann gilt für $\sigma>\alpha$, $\lambda>0$, $y\in\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{(\sigma+it)y}g(\sigma+it)\,dt=\int_{-\infty}^{\lambda y} R\left(y-\frac{u}{\lambda}\right)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du. \tag{2}$$

Besitzt $g(s)$ eine stetige Fortsetzung nach $\operatorname{Re} s\geq\alpha$ *und gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Konstante $M(\varepsilon)>0$ so, dass*

$$|g(\sigma+it)|\leq M(\varepsilon)e^{\varepsilon t^2},\ \textit{gleichmässig in } \alpha\leq\sigma\leq\alpha+1, \tag{3}$$

so gilt für $\lambda>0$, $y\in\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{(\alpha+it)y}g(\alpha+it)\,dt=\int_{-\infty}^{\lambda y} R\left(y-\frac{u}{\lambda}\right)e^{\alpha u/\lambda}\hat{h}(u)\,du. \tag{4}$$

Beweis. Sei $s=\sigma+it$ und $\sigma>\alpha$. Dann ist

$$g(s)=\int_0^{\infty} R(x)e^{-xs}\,dx$$

und

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{(\sigma+it)y}g(\sigma+it)\,dt&=\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{(\sigma+it)y}\int_0^{\infty} R(x)e^{-x(\sigma+it)}\,dx\,dt\\&=\int_0^{\infty} R(x)e^{\sigma(y-x)}\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{it(y-x)}\,dt\,dx=\int_0^{\infty} R(x)e^{\sigma(y-x)}\lambda\hat{h}(\lambda(y-x))\,dx\\&=\int_{-\infty}^{\lambda y} R\left(y-\frac{u}{\lambda}\right)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du\end{aligned}$$

unter Verwendung der Substitution $x=y-(u/\lambda)$, $dx=-(1/\lambda)\,du$. Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist gestattet wegen der absoluten Konvergenz des Doppelintegrals.

(4) folgt aus (2), indem man den Limes $\sigma\to\alpha$ bildet und sich überlegt, dass man unter der Voraussetzung (3) und der Stetigkeit von $g(s)$ in $\operatorname{Re} s\geq\alpha$ den Limes unter die Integrale ziehen kann.

LEMMA 2. (i) *Seien a, b, $t\in\mathbb{R}$, $b>0$, $t\geq(1+a)/(2b)$. Dann gilt:*

$$\int_t^{\infty} e^{au-bu^2}\,du\leq e^{at-bt^2}.$$

Im Folgenden seien α, y, λ, T, c, A_0, B_0, h, $\hat{h}$ *wie in Satz* 1 *definiert. Sei* $\alpha \le \sigma \le \alpha + 1$. *Es gilt*:

(ii) $$\int_{-T}^{T} \left| A_0(y) - A_0\left(y \pm \frac{T}{\lambda} - \frac{u}{\lambda}\right) \right| e^{\sigma u/\lambda} \hat{h}(u)\, du \le c_1 B_0(y) \frac{T}{\lambda},$$

(iii) $$\int_{T}^{\infty} \left| A_0\left(y \pm \frac{T}{\lambda} + \frac{u}{\lambda}\right) \right| e^{-\sigma u/\lambda} \hat{h}(u)\, du$$
$$\le \int_{T}^{\infty} B_0\left(y \pm \frac{T}{\lambda} + \frac{u}{\lambda}\right) e^{-\sigma u/\lambda} \hat{h}(u)\, du \le c_2 B_0(y) \hat{h}(T),$$

(iv) $$\int_{T}^{\lambda y + T} \left| A_0\left(y + \frac{T}{\lambda} - \frac{u}{\lambda}\right) \right| e^{\sigma u/\lambda} \hat{h}(u)\, du \le c_3 B_0(y) \hat{h}(T),$$

(v) $$\int_{T}^{\lambda y - T} \left| A_0\left(y - \frac{T}{\lambda} - \frac{u}{\lambda}\right) \right| e^{\sigma u/\lambda} \hat{h}(u)\, du \le c_4 B_0(y) \hat{h}(T).$$

Hierin sind die Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 *unabhängig von* y, λ, T *und* σ.

Beweis.

(i) $$\int_{t}^{\infty} e^{au - bu^2}\, du \le \int_{t}^{\infty} (2bu - a) e^{au - bu^2}\, du = e^{at - bt^2}.$$

(ii) $$\int_{-T}^{T} \left| A_0(y) - A_0\left(y \pm \frac{T}{\lambda} - \frac{u}{\lambda}\right) \right| e^{\sigma u/\lambda} \hat{h}(u)\, du \le M_1 B_0(y) \int_{-T}^{T} \left| \pm \frac{T}{\lambda} - \frac{u}{\lambda} \right| e^{\sigma u/\lambda} \hat{h}(u)\, du$$
$$\le 2M_1 B_0(y) \frac{T}{\lambda} e^{\sigma T/\lambda} \int_{-T}^{T} \hat{h}(u)\, du \le c_1 B_0(y) \frac{T}{\lambda} \text{ wegen } \sigma \le \alpha + 1 \text{ und } \lambda \ge T \ge 1.$$

(iii) $$\int_{T}^{\infty} \left| A_0\left(y \pm \frac{T}{\lambda} + \frac{u}{\lambda}\right) \right| e^{-\sigma u/\lambda} \hat{h}(u)\, du \le \int_{T}^{\infty} B_0\left(y \pm \frac{T}{\lambda} + \frac{u}{\lambda}\right) e^{-\sigma u/\lambda} \hat{h}(u)\, du$$
$$\le M_2 B_0(y) \int_{T}^{\infty} e^{\omega |\pm (T/\lambda) + (u/\lambda)|} \hat{h}(u)\, du = M_2 B_0(y) e^{\pm \omega (T/\lambda)} \sqrt{\frac{\pi}{c}} \int_{T}^{\infty} e^{(u/\lambda)\omega - (u^2/(4c))}\, du$$
$$\le M_2 B_0(y) e^{\pm \omega (T/\lambda)} \sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{\omega (T/\lambda) - (T^2/(4c))} \le c_2 B_0(y) \hat{h}(T),$$

da nach (i)

$$\lambda \geq T \geq 1 \geq \frac{2+\omega+\alpha}{2\frac{1}{4c}} \geq \frac{1+\omega}{2\frac{1}{4c}}.$$

(iv) $$\int_T^{\lambda y+T} \left|A_0\left(y+\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)\right| e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du \leq \int_T^{\lambda y+T} B_0\left(y+\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$

$$= \left(\int_T^{\lambda y-\lambda+T} + \int_{\lambda y-\lambda+T}^{\lambda y+T}\right)\cdots du \leq M_2 B_0(y)\int_T^{\lambda y-\lambda+T} e^{\omega|(T/\lambda)-(u/\lambda)|}e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$

$$+ \sup_{u\geq \lambda y-\lambda+T}(e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u))\int_{\lambda y-\lambda+T}^{\lambda y+T} B_0\left(y+\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)du \leq c_3 B_0(y)\hat{h}(T),$$

wenn man den ersten Summanden auf der linken Seite der letzten Ungleichung wie unter (iii) abschätzt und für die Abschätzung des zweiten Summanden verwendet, dass $u \to e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)$ für $u \geq 2c\sigma/\lambda$ monoton fällt sowie

$$\lambda e^{\sigma(\lambda y-\lambda+T)/\lambda}\hat{h}(\lambda y-\lambda+T) \leq c_5\hat{h}(T), \qquad \lambda \geq T \geq 1, \qquad \alpha \leq \sigma \leq \alpha+1, \qquad y \geq 4.$$

(v) wird ähnlich wie (iv) bewiesen.

Beweis von Satz 1. Sei $\alpha \leq \sigma \leq \alpha+1$ und sei die Annahme getroffen, dass im Falle $\sigma = \alpha$ $g(s)$ eine stetige Fortsetzung nach $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ besitzt und es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $M(\varepsilon) > 0$ so gibt, dass

$$|g(\sigma+it)| \leq M(\varepsilon)e^{\varepsilon t^2}, \text{ gleichmässig in } \alpha \leq \sigma \leq \alpha+1.$$

Ersetzt man nun in Lemma 1 y durch $y+(T/\lambda)$ beziehungsweise durch $y-(T/\lambda)$, so gewinnt man folgende Identitäten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{(\sigma+it)(y+(T/\lambda))}g(\sigma+it)\,dt = \int_{-\infty}^{\lambda y+T} R\left(y+\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du, \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{(\sigma+it)(y-(T/\lambda))}g(\sigma+it)\,dt = \int_{-\infty}^{\lambda y-T} R\left(y-\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du. \tag{6}$$

In einem ersten Schritt beweist man die Ungleichung:

$$R(y) \leq c_6\left(B_0(y)\left(\frac{T}{\lambda}+\hat{h}(T)\right) + \left|\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{(\sigma+it)(y+(T/\lambda))}g(\sigma+it)\,dt\right|\right). \tag{7}$$

Dazu schätzt man die rechte Seite in (5) wie folgt nach unten ab:

$$\int_{-\infty}^{\lambda y+T} R\left(y+\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du = \int_{-\infty}^{\lambda y+T} (A-A_0)\left(y+\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$

$$\geq A(y)\int_{-\infty}^{T} e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du - \int_{-\infty}^{\lambda y+T} A_0\left(y+\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$

$$\geq (A-A_0)(y)\int_{-\infty}^{T} e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$

$$-|A_0(y)|\int_{-\infty}^{-T} e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du - \int_{-\infty}^{-T}\left|A_0\left(y+\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)\right| e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$

$$-\int_{-T}^{T}\left|A_0(y)-A_0\left(y+\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)\right| e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$

$$-\int_{T}^{\lambda y+T}\left|A_0\left(y+\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\right)\right| e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du,$$

wo in der vorletzten Ungleichung die Monotonie von A benutzt wurde. Schätzt man nun in der letzten Ungleichung jeden der Subtrahenden mit Lemma 2 ab und verwendet die Abschätzung

$$\int_{-\infty}^{T} e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du \geq \int_{0}^{1}\hat{h}(u)\,du > 0,$$

so entsteht zusammen mit der linken Seite von (5) die Ungleichung (7). Wählt man in (7) speziell $T=\lambda=1$, so findet man die Abschätzung

$$R(y) \leq c_7\left(B_0(y) + e^{\sigma y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct^2}\,|g(\sigma+it)|\,dt\right). \tag{8}$$

Erfüllt $g(s)$ die Voraussetzung (*) in Satz 1, so kann das Integral in (7) mit Cauchy's Satz umgeformt werden, und man erhält:

$$R(y) \leq c_8\left(B_0(y)\left(\frac{T}{\lambda}+\hat{h}(T)\right) + \left|\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t+i(\alpha-\beta)}{\lambda}\right)e^{(\beta+it)(y+(T/\lambda))}g(\beta+it)\,dt\right|\right). \tag{9}$$

Wählt man in (9) speziell $T=\lambda=1$, so findet man die Abschätzung:

$$R(y) \leq c_9(B_0(y) + e^{\beta y}). \tag{10}$$

In einem zweiten Schritt beweist man die Ungleichung

$$R(y) \geq -c_{10}\Big(B_0(y)\Big(\frac{T}{\lambda}+\hat{h}(T)\Big)+\hat{h}(T)e^{\sigma y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct^2}\,|g(\sigma+it)|\,dt$$
$$+\left|\int_{-\infty}^{\infty} h\Big(\frac{t}{\lambda}\Big)e^{(\sigma+it)(y-(T/\lambda))}g(\sigma+it)\,dt\right|\Big). \tag{11}$$

Dazu schätzt man die rechte Seite in (6) wie folgt nach oben ab:

$$\int_{-\infty}^{\lambda y-T} R\Big(y-\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\Big)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du = \int_{-\infty}^{\lambda y-T}(A-A_0)\Big(y-\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\Big)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$
$$\leq \int_{-\infty}^{-T}(A-A_0)\Big(y-\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\Big)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$
$$+\int_{-T}^{\lambda y-T}\left|A_0(y)-A_0\Big(y-\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\Big)\right|e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$
$$+(A-A_0)(y)\int_{-T}^{\lambda y-T} e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du = I_1+I_2+I_3,$$

wo in der letzten Ungleichung die Monotonie von A verwendet wurde. Um I_1 abzuschätzen, verwendet man (8) sowie Lemma 2:

$$I_1 \leq c_7\int_{-\infty}^{-T}\Big(B_0\Big(y-\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\Big)+e^{\sigma(y-(T/\lambda)-(u/\lambda))}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct^2}\,|g(\sigma+it)|\,dt\Big)e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$
$$\leq c_{11}\hat{h}(T)\Big(B_0(y)+e^{\sigma y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct^2}\,|g(\sigma+it)|\,dt\Big). \tag{12}$$

I_2 wird mit Lemma 2 abgeschätzt:

$$I_2 \leq \int_{-T}^{T}\left|A_0(y)-A_0\Big(y-\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\Big)\right|e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du+|A_0(y)|\int_{T}^{\lambda y-T} e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du$$
$$+\int_{T}^{\lambda y-T}\left|A_0\Big(y-\frac{T}{\lambda}-\frac{u}{\lambda}\Big)\right|e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du \leq c_{12}B_0(y)\Big(\frac{T}{\lambda}+\hat{h}(T)\Big).$$

Verwendet man die Abschätzung:

$$\int_{-T}^{\lambda y-T} e^{\sigma u/\lambda}\hat{h}(u)\,du \geq \int_0^1 \hat{h}(u)\,du > 0$$

sowie die Abschätzungen für I_1, I_2, so entsteht zusammen mit der linken Seite von (6) die Ungleichung (11).

Erfüllt $g(s)$ die Voraussetzung (*) in Satz 1, so kann man die Abschätzung (11) für $R(y)$ verfeinern zu

$$R(y) \geq -c_{13}\left(B_0(y)\left(\frac{T}{\lambda}+\hat{h}(T)\right)+\hat{h}(T)e^{\beta y}\right.$$
$$\left.+\left|\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t+i(\alpha-\beta)}{\lambda}\right)e^{(\beta+it)(y-(T/\lambda))}g(\beta+it)\,dt\right|\right), \tag{13}$$

indem man erstens statt (12) die Abschätzung

$$I_1 \leq c_{14}\hat{h}(T)(B_0(y)+e^{\beta y})$$

verwendet, die sich unmittelbar aus (10) und Lemma 2 ergibt, und zweitens das entstehende Integral wiederum mit Cauchy's Satz umformt. Die Behauptung des Satzes 1 folgt nun, wenn (7) und (11) kombiniert werden beziehungsweise (9) und (13) im Falle, wo $g(s)$ die Voraussetzung (*) in Satz 1 erfüllt.

Beweis von Korollar 1. Nach einem Satz von Landau [12], S. 536, ist $s=\alpha$ eine Singularität der Funktion $f(s)$. Nach Voraussetzung sind die einzigen Singularitäten von $f(s)$ in $\operatorname{Re} s \geq \beta$ Pole, sodass $\operatorname{Re} s_1 = \alpha$. Sei nun mit den Bezeichnungen von Korollar 1

$$A_0(y)=\sum_{j=1}^{q}\sum_{\kappa=0}^{a_j}\frac{v_{j\kappa}}{\kappa!}y^{\kappa}e^{s_j y}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

$A_0(y)$ ist reell für reelle y, da vermöge $f(s)=\bar{f}(\bar{s})$ für alle $s \neq s_j$ mit $\operatorname{Re} s \geq \beta$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f in jedem Pol s_j komplex konjugiert ist zu jenem in $\bar{s}_j$. Setzt man

$$f_0(s)=\sum_{j=1}^{q}\sum_{\kappa=0}^{a_j}\frac{v_{j\kappa}}{(s-s_j)^{\kappa+1}},$$

so ist $f_0(s)=\int_0^\infty A_0(x)e^{-xs}\,dx$, $\operatorname{Re} s > \alpha$.

Setzt man nun $B_0(y)=c_{15}(y^L+1)e^{\alpha y}$ (wo $c_{15} \geq 1$ so gross gewählt wird, dass $|A_0(y)| \leq B_0(y)$, $y \geq 0$, und L wie in Korollar 1 definiert ist) sowie $\omega=\alpha+1$, so verifiziert man ohne weiteres die Voraussetzungen von Satz 1. Es folgt die Behauptung.

Beweis von Korollar 2. Für $\operatorname{Re} s > \alpha$, $v > 0$ gilt:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^v} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^\infty y^{v-1} e^{-(s-\alpha)y}\, dy.$$

Differenziert man beide Seiten k-mal nach v und setzt $v = \rho$, so entsteht:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^\rho}\left(\log\frac{1}{s-\alpha}\right)^k = \int_0^\infty \left(\frac{d}{dv}\right)^k \left(\frac{y^{v-1}}{\Gamma(v)}\right)\Bigg|_{v=\rho} e^{-(s-\alpha)y}\, dy.$$

Sei nun

$$A_0(y) = \left(\frac{d}{dv}\right)^k \frac{y^{v-1}}{\Gamma(v)}\Bigg|_{v=\rho} e^{\alpha y}.$$

Setzt man nun $B_0(y) = c_{16}(1 + y^{\rho-1})(1 + |\log y|^k)e^{\alpha y}$ (wo $c_{16} \geq 1$ so gross gewählt wird, dass $|A_0(y)| \leq B_0(y)$, $y \geq 0$) sowie $\omega = \alpha + 1$, so verifiziert man ohne weiteres die Voraussetzungen von Satz 1. Es folgt die Behauptung.

4. Anwendungen

4.1. $\sum_{n\leq x} d(n)$, $\sum_{n\leq x} \tau^2(n)$

Die Bestimmung der Haupt- und Restglieder für $\sum_{n\leq x} d(n)$ und $\sum_{n\leq x} \tau^2(n)$ kann unter folgendem allgemeineren Gesichtspunkt betrachtet werden (vgl. [13]):

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ sei eine Folge nicht negativer reeller Zahlen.

(ii) $\phi(s) = \sum_{n\geq 1} a_n/n^s$ konvergiere absolut für $\sigma > \alpha \geq 0$.

(iii) $\phi(s)$ sei meromorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzbar und die Anzahl der Polstellen in jedem festen Streifen $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, wo $\sigma_2 > \sigma_1$ ist, sei endlich.

(iv) Es gebe reelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, positive $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ $(\mu \geq 1)$, reelle $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$, positive $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ $(\nu \geq 1)$, eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ komplexer Zahlen sowie ein $d > 0$, sodass $\sum_{n\geq 1} b_n n^s$ für $\sigma < 0$ absolut konvergiert und für $\sigma < 0$ gilt:

$$\Gamma(\alpha_1 + \beta_1 s)\Gamma(\alpha_2 + \beta_2 s) \cdots \Gamma(\alpha_\mu + \beta_\mu s)\phi(s)$$
$$= \Gamma(\gamma_1 - \delta_1 s)\Gamma(\gamma_2 - \delta_2 s) \cdots \Gamma(\gamma_\nu - \delta_\nu s) \sum_{n\geq 1} b_n (dn)^s.$$

(v) Für jeden Streifen $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ endlicher Breite und jedes $\varepsilon > 0$ gelte eine

Abschätzung der Form

$$|\phi(\sigma+it)| \leq c_{17}(\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2)e^{\varepsilon t^2}, \qquad \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \qquad |t| \geq t_0.$$

(iii) und (iv) implizieren nun, dass $\phi(s)$ in $\mathbb{C}$ nur endlich viele Pole besitzt. Sei $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$. Dann ist $\phi(s)/s = \int_0^\infty A(e^y)e^{-ys}\,dy$, $\operatorname{Re} s > \alpha$. Sei $f(s) = \phi(s)/s$ und bezeichne $f_0(s)$ die Summe der Hauptteile der Laurententwicklung von $f(s)$ in ihren endlich vielen Polen. Sei $A_0(e^y)$ jene Funktion, für die gilt:

$$f_0(s) = \int_0^\infty A_0(e^y)e^{-ys}\,dy.$$

Mit Korollar 1 schliesst man, dass für $y \geq 4$, $\lambda \geq T \geq 1$:

$$|A(e^y) - A_0(e^y)| \leq M_5 y^L e^{\alpha y}\left(\frac{T}{\lambda} + \hat{h}(T)\right)$$
$$+ M_5 e^{\beta y} \max_{x=\pm T/\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\lambda} + i\frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right) e^{it(y+x)} g(\beta+it)\,dt \right|, \quad (14)$$

worin bedeuten: M_5 eine positive Konstante, die unabhängig von y, λ, T ist, L die um eins verminderte höchste Ordnung derjenigen Pole von $f(s)$, deren Realteil $=\alpha$ ist, β eine feste reelle Zahl $<\min(0, \gamma_1/\delta_1, \gamma_2/\delta_2, \ldots, \gamma_\nu/\delta_\nu)$ und $g(s) = f(s) - f_0(s)$. Man wird nun in einem ersten Schritt das Integral in (14) in Funktion der Parameter y, T, λ abschätzen, indem man für $g(s)$ die in $\sigma < 0$ gültige Darstellung

$$g(s) = \frac{\Gamma(\gamma_1 - \delta_1 s)\Gamma(\gamma_2 - \delta_2 s)\cdots\Gamma(\gamma_\nu - \delta_\nu s)}{s\Gamma(\alpha_1 + \beta_1 s)\Gamma(\alpha_2 + \beta_2 s)\cdots\Gamma(\alpha_\mu + \beta_\mu s)} \sum_{n \geq 1} b_n (dn)^s - f_0(s)$$

benutzt, und in einem zweiten Schritt die freien Parameter geeignet als Funktionen von y wählt. Die Methode soll an zwei Beispielen demonstriert werden.

4.1.1. $\sum_{n \leq x} d(n)$

Sei

$$d(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} 1, \qquad D(x) = \sum_{n \leq x} d(n).$$

Man wird sehen, dass

$$D(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{1/3}(\log x)^{7/6}), \qquad x \to \infty,$$

worin γ die Eulersche Konstante ist. Es ist

$$\frac{\zeta^2(s)}{s} = \int_0^\infty D(e^y) e^{-ys}\, dy, \qquad s = \sigma + it, \qquad \sigma > 1.$$

Aus der Theorie der Riemannschen Zeta-Funktion [19] ist bekannt, dass

(i) $g(s) = \dfrac{\zeta^2(s)}{s} - \dfrac{1}{(s-1)^2} - \dfrac{2\gamma - 1}{s-1} - \dfrac{1}{4s}$ eine ganze Funktion ist,

(ii) $\zeta^2(s)\pi^{-s}\Gamma^2\left(\dfrac{s}{2}\right) = \zeta^2(1-s)\pi^{s-1}\Gamma^2\left(\dfrac{1-s}{2}\right)$,

(iii) $|\zeta^2(\sigma + it)| \le c_{18}\, |t|^3, \qquad -1 \le \sigma \le 2, \qquad |t| \ge 1.$

Wählt man $\beta = -1$ und $c = \frac{1}{20}$, so gilt nach Korollar 1 für $y \ge 4$, $\lambda \ge T \ge 1$:

$$|D(e^y) - ye^y - (2\gamma - 1)e^y - \tfrac{1}{4}| \le M_5 y e^y \left(\frac{T}{\lambda} + 8e^{-5T^2}\right)$$
$$+ M_5 e^{-y} \max_{x = \pm T/\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\lambda} + \frac{2i}{\lambda}\right) e^{it(y+x)} g(-1 + it)\, dt \right|, \qquad (15)$$

worin man für $g(-1 + it)$ die in $\sigma < 0$ gültige Darstellung

$$g(s) = \frac{1}{s}\pi^{2s-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n \ge 1} n^{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2\gamma - 1}{s-1} - \frac{1}{4s}$$

verwenden wird. Mit der Stirlingschen Formel [14], S. 12,

$$\Gamma(\sigma + it) = \sqrt{(2\pi)}\, |t|^{\sigma - (1/2)} \exp\left(-\frac{\pi}{2}|t| + i\left(t \log |t| - t + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t \cdot (\sigma - \tfrac{1}{2})\right)\right)$$
$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right), \qquad |t| \to \infty \qquad (16)$$

schliesst man

$$g(-1+it)=\frac{1}{(2\pi)^3}t^2\pi^{2it}\zeta^2(2-it)e^{-2it\log(|t|/2)+2it}+O(|t|),\qquad |t|\to\infty.$$

Es ist daher

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty}h\left(\frac{t+2i}{\lambda}\right)e^{it(y+x)}g(-1+it)\,dt\right| &\le \int_{-1}^{1}\left|h\left(\frac{t+2i}{\lambda}\right)\right|\,|g(-1+it)|\,dt\\ &+\left|\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_{1}^{\infty}\right)e^{-(t^2+4it-4)/(20\lambda^2)}e^{it(y+x)}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 t^2\pi^{2it}\zeta^2(2-it)e^{-2it\log(|t|/2)+2it}\,dt\right|\\ &+c_{19}\int_{-\infty}^{\infty}\left|h\left(\frac{t+2i}{\lambda}\right)\right|\,|t|\,dt\le c_{20}\left(1+\sum_{n\ge1}\frac{d(n)}{n^2}\left|\int_1^{\infty}G(t)e^{iF_n(t)}\,dt\right|+\lambda^2\right),\qquad(17)\end{aligned}$$

wo $G(t)=t^2e^{-t^2/(20\lambda^2)}$, $F_n(t)=t\left(2\log(2\pi e)+y+x-(1/(5\lambda^2))-2\log t+\log n\right)$.
Es ist nun

$$\frac{d}{dt}F_n(t)=2\log(2\pi)+y+x-\frac{1}{5\lambda^2}+\log n-2\log t,\qquad \frac{d^2}{dt^2}F_n(t)=-\frac{2}{t},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{d}{dt}F_n(t)}{G(t)}\right)&=\frac{1}{t^3}e^{t^2/(20\lambda^2)}\left(\left(\frac{t^2}{10\lambda^2}-2\right)\right.\\ &\qquad\left.\times\left(y+x-\frac{1}{5\lambda^2}+2\log(2\pi)+\log n-2\log t\right)-2\right)\end{aligned}$$

Dabei hat die Funktion

$$h:t\to\left(\frac{t^2}{10\lambda^2}-2\right)\left(y+x-\frac{1}{5\lambda^2}+2\log(2\pi)+\log n-2\log t\right)-2$$

in $t\ge1$ höchstens 5 reelle Nullstellen, da

$$\frac{d^3}{dt^3}h(t)=\frac{4}{t^3}\left(2-\frac{t^2}{10\lambda^2}\right)$$

höchstens deren 2 in $t \geq 1$ hat. Ferner gelten wegen $\lambda \geq T \geq 1$ die Abschätzungen:

$$\left|\frac{d}{dt}F_n(t)\right| \geq 2\log(2\pi) + y - 2 + \log n - 2\log(2n^{1/2}e^{y/2}) = 2\log\pi - 2, \qquad 1 \leq t \leq 2n^{1/2}e^{y/2}, \tag{18}$$

$$\left|\frac{d}{dt}F_n(t)\right| \geq 2\log(20n^{1/2}e^{y/2}) - y - 2 - 2\log(2\pi) - \log n = 2\log\frac{10}{\pi} - 2, \qquad t \geq 20n^{1/2}e^{y/2}, \tag{19}$$

$$G(t) = \lambda^2\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 e^{-t^2/(20\lambda^2)} \leq \lambda^2 \sup_{u\geq 0} u^2 e^{-u^2/20} = c_{21}\lambda^2, \qquad t \geq 1, \tag{20}$$

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}F_n(t)\right| = \frac{2}{|t|} \geq \frac{1}{10n^{1/2}e^{y/2}}, \qquad t \leq 20n^{1/2}e^{y/2}, \tag{21}$$

$$\sup_{2n^{1/2}e^{y/2}\leq t\leq 20n^{1/2}e^{y/2}} G(t) \leq c_{22}ne^y e^{-ne^y/(5\lambda^2)}. \tag{22}$$

Nun ist

$$\left|\int_1^\infty G(t)e^{iF_n(t)}\,dt\right| \leq \left|\int_1^{2n^{1/2}e^{y/2}} \cdots dt\right| + \left|\int_{2n^{1/2}e^{y/2}}^{20n^{1/2}e^{y/2}} \cdots dt\right| + \left|\int_{20n^{1/2}e^{y/2}}^{\infty} \cdots dt\right| = I_1(n) + I_2(n) + I_3(n). \tag{23}$$

Mit Lemma E in [6] (, das man allerdings in einer leicht erweiterten Form für den Fall unendlicher Intervalle benötigt), findet man wegen (18), (19), (20):

$$I_1(n) + I_3(n) \leq c_{23}\lambda^2. \tag{24}$$

Mit Lemma G in [6] findet man wegen (21), (22):

$$I_2(n) \leq c_{24}n^{5/4}e^{(5/4)y}e^{-ne^y/(5\lambda^2)}. \tag{25}$$

Setzt man (24) und (25) in (23) und (23) in (17) ein, so wird:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t+2i}{\lambda}\right)e^{it(y+x)}g(-1+it)\,dt\right| \leq c_{25}\left(\lambda^2 + \sum_{n\geq 1}\frac{d(n)}{n^2}n^{5/4}e^{5y/4}e^{-ne^y/(5\lambda^2)}\right). \tag{26}$$

Mit partieller Integration und der trivialen Abschätzung $D(x) \leq c_{26}x(1+\log x)$, $x \geq 1$, findet man:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{d(n)}{n^{3/4}} e^{-ne^y/(5\lambda^2)} = \int_1^\infty D(u)e^{-ue^y/(5\lambda^2)}\left(\frac{3}{4}u^{-7/4} + \frac{e^y}{5\lambda^2 u^{3/4}}\right) du$$

$$\leq c_{26}\int_0^\infty (1+\log^+(u))e^{-ue^y/(5\lambda^2)}\left(\frac{3}{4}u^{-3/4} + \frac{e^y u^{1/4}}{5\lambda^2}\right) du$$

$$= c_{26}\int_0^\infty (1+\log^+(\lambda^2 e^{-y}v))e^{-v/5}\left(\frac{3}{4}v^{-3/4} + \frac{1}{5}v^{1/4}\right)(\lambda^2 e^{-y})^{1/4}\, dv$$

$$\leq c_{27}\left(1+\log^+\left(\frac{\lambda^2}{e^y}\right)\right)\lambda^{1/2}e^{-y/4}, \quad \text{wo } \log^+(u) = \max(0, \log u), \quad u > 0.$$

Setzt man dies in (26) und (26) in (15) ein, so hat man

$$|D(e^y) - ye^y - (2\gamma - 1)e^y - \tfrac{1}{4}| \leq M_5 ye^y\left(\frac{T}{\lambda} + 8e^{-5T^2}\right)$$
$$+ c_{28}\left(\lambda^2 e^{-y} + \lambda^{1/2}\left(1+\log^+\left(\frac{\lambda^2}{e^y}\right)\right)\right)$$

Wählt man nun $\lambda = e^{2y/3}y^{1/3}$, $T = y^{1/2}$, so folgt:

$$|D(e^y) - ye^y - (2\gamma - 1)e^y| \leq c_{29}e^{y/3}y^{7/6}.$$

Dies ist bis auf einen Faktor $y^{1/6}$ Voronoi's Resultat [20]. Wollte man stärkere Restglieder als das obige erzielen, müsste man das Integral

$$\int_1^\infty G(t)e^{iF_n(t)}\, dt$$

(z.B. mit der Methode der stationären Phase) asymptotisch entwickeln und die Hauptbeiträge mit Methoden aus der Theorie der Exponentialsummen abschätzen.

4.1.2. $\sum_{n\leq x} \tau^2(n)$

Sei $\tau(n)$ Ramanujan's Funktion, die definiert ist durch die Taylorentwicklung des unendlichen Produktes

$$q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24} = \sum_{n\geq 1}\tau(n)q^n, \qquad |q| < 1.$$

Man wird sehen, dass

$$\sum_{n\le x} \tau^2(n) = Ax^{12} + O(x^{12-(2/5)}(\log x)^{7/20}), \qquad x\to\infty,$$

worin A eine an späterer Stelle definierte numerische Konstante ist. Sei

$$f(s) = \sum_{n\ge 1} \frac{\tau^2(n)}{n^s}, \ \operatorname{Re} s > 12, \qquad Z(s) = \zeta(2s) f(s+11).$$

Es ist

$$Z(s) = \sum_{n\geqq 1} e_n n^{-s}, \ \operatorname{Re} s > 1, \quad \text{wo } e_n = \sum_{\mu\nu^2=n} \mu^{-11}\tau^2(\mu). \tag{27}$$

Es gilt nun:

(i) $Z(s)$, definiert in $\operatorname{Re} s > 1$ durch (27) und daselbst analytisch, ist meromorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzbar.

(ii) $Z(s) - (2\pi^2 A/(s-1))$ ist ganz.

$$A = \frac{(4\pi)^{11}}{\Gamma(12)} \iint_D y^{10}\, |\Delta(x+iy)|^2\, dx\, dy; \text{ hierin bedeuten}$$

$$D = \{x+iy \mid -\tfrac{1}{2} \le x \le \tfrac{1}{2},\ y>0,\ |x+iy| \ge 1\},$$

$$\Delta(\tau) = e^{2\pi i\tau} \prod_{k\ge 1} (1-e^{2\pi i k\tau})^{24}, \quad \operatorname{Im}\tau > 0.$$

(iii) $\Gamma(s)\Gamma(s+11)Z(s) = (2\pi)^{4s-2}\Gamma(1-s)\Gamma(12-s)Z(1-s)$.

(iv) $|Z(\sigma+it)| \le c_{30}\,|t|^{10/3}$, $\sigma \ge -\frac{1}{3}$, $|t| \ge 1$.

Sei nun $E(x) = \sum_{n\le x} e_n$. Es ist $Z(s)/s = \int_0^\infty E(e^y) e^{-ys}\, dy$, $\operatorname{Re} s > 1$.

$Z(0) = -\frac{11}{2}A$, da wegen (iii)

$$Z(0) = \lim_{s\to 0} \frac{(2\pi)^{4s-2}\Gamma(1-s)\Gamma(12-s)Z(1-s)}{\Gamma(s+11)\Gamma(s)} = -\tfrac{11}{2}A.$$

Wendet man nun Korollar 1 mit $\beta = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{20}$ an, so folgt die für $y \ge 4$, $\lambda \ge T \ge 1$ gültige Beziehung:

$$|E(e^y) - 2\pi^2 A e^y + \tfrac{11}{2}A| \le M_5 e^y \left(\frac{T}{\lambda} + 8e^{-5T^2}\right)$$

$$+ M_5 e^{-y/3} \max_{x=\pm T/\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+(4i/3))^2/(20\lambda^2)} e^{it(y+x)} g(-\tfrac{1}{3}+it)\, dt \right|, \tag{28}$$

wo $g(s) = Z(s)/s - 2\pi^2 A/(s-1) + 11A/(2s)$ und M_5 eine von λ, T und y unabhängige Konstante ist. Mit (iii) schliesst man nun

$$g(-\tfrac{1}{3}+it) = \frac{(2\pi)^{-10/3+4it}\Gamma(\frac{4}{3}-it)\Gamma(12+\frac{1}{3}-it)}{\Gamma(\frac{2}{3}+it)\Gamma(11-\frac{1}{3}+it)} Z(\tfrac{4}{3}-it) + O\left(\frac{1}{1+|t|}\right), \qquad |t|\to\infty,$$

und zusammen mit der Stirlingschen Formel (16) folgt:

$$g(-\tfrac{1}{3}+it) = (2\pi)^{-10/3+4it}\,|t|^{7/3}\, i e^{i(-4t\log|t|+4t)} \operatorname{sgn} t \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n^{4/3-it}} + O(|t|^{4/3}), \qquad |t|\to\infty.$$

Setzt man diese Entwicklung in (28) ein, so entsteht:

$$\begin{aligned}
&|E(e^y) - 2\pi^2 A e^y + \tfrac{11}{2}A| \leq M_5 e^y\left(\frac{T}{\lambda} + 8e^{-5T^2}\right) \\
&+ M_5 e^{-y/3}\left(\int_{-1}^{1} |e^{-(t+(4i/3))^2/(20\lambda^2)}|\,|g(-\tfrac{1}{3}+it)|\,dt + c_{31}\int_1^\infty e^{-t^2/(20\lambda^2)} t^{4/3}\,dt\right. \\
&\left. + 2\max_{x=\pm T/\lambda}\left|\int_1^\infty e^{-(t+(4i/3))^2/(20\lambda^2)} e^{it(y+x)}(2\pi)^{-10/3+4it} t^{7/3} e^{i(-4t\log t+4t)} \cdot \sum_{n\geq 1}\frac{e_n}{n^{4/3-it}}\,dt\right|\right) \\
&\leq c_{32}e^y\left(\frac{T}{\lambda} + e^{-5T^2}\right) + c_{32}e^{-y/3}\lambda^{7/3} + c_{32}e^{-y/3}\max_{x=\pm T/\lambda}\sum_{n\geq 1}\frac{e_n}{n^{4/3}}\left|\int_1^\infty G(t)e^{iF_n(t)}\,dt\right|,
\end{aligned}$$

wo diesmal

$$G(t) = e^{-t^2/(20\lambda^2)} t^{7/3},$$

$$F_n(t) = -4t\log t + \left(4 + y + x - \frac{2}{15\lambda^2} + 4\log(2\pi) + \log n\right)t.$$

Durch analoge Ueberlegungen wie im Dirichletschen Teilerproblem findet man

$$\left|\int_1^\infty G(t)e^{iF_n(t)}\,dt\right| \leq c_{33}(\lambda^{7/3} + n^{1/8}e^{y/8}n^{7/12}e^{7y/12}e^{-n^{1/2}e^{y/2}/(2\lambda^2)})$$

Mit partieller Summation und Verwendung der Abschätzung

$$|E(x)| = O(x), \qquad x\to\infty,$$

ergibt sich

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n^{4/3}} n^{1/8} e^{y/8} n^{7/12} e^{7y/12} e^{-n^{1/2}e^{y/2}/(2\lambda^2)} \leq c_{34} e^{y/3} \lambda^{3/2}.$$

Daher ist

$$|E(e^y) - 2\pi^2 A e^y + \tfrac{11}{2} A| \leq c_{35} e^y \left(\frac{T}{\lambda} + e^{-5T^2}\right) + c_{35} e^{-y/3} \lambda^{7/3} + c_{35} \lambda^{3/2}.$$

Wählt man nun $\lambda = e^{2y/5} y^{3/20}$, $T = y^{1/2}$, so folgt schliesslich

$$|E(e^y) - 2\pi^2 A e^y| \leq c_{36} e^{3y/5} y^{7/20}.$$

Wie in [9] folgt daraus, dass

$$\left| \sum_{n\leq x} \tau^2(n) - A x^{12} \right| \leq c_{37} x^{12-(2/5)} (\log x)^{7/20}.$$

Bis auf einen Faktor $(\log x)^{7/20}$ ist dies Rankin's Resultat [16].

4.2. Der Primzahlsatz

Der Primzahlsatz ist ein klassisches Anwendungsbeispiel des in der Einleitung beschriebenen Satzes von Wiener–Ikehara. Denn mit

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p^n \leq x \\ n\geq 1, p \text{ prim}}} \log p$$

gilt:

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_0^\infty \psi(e^y) e^{-ys}\, dy, \ \operatorname{Re} s > 1 \quad \text{und} \quad -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

ist analytisch in $\operatorname{Re} s \geq 1$, sodass mit dem Satz von Wiener–Ikehara folgt:

$$\psi(e^y) \sim e^y, \qquad y \to \infty. \tag{29}$$

Dies zeigt, dass in (29) im wesentlichen nur die Eigenschaft $\zeta(1+it) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$, einfliesst. Will man die asymptotische Formel (29) verbessern zu einer Aussage mit Haupt- und Restglied, so muss man mehr Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion benutzen. In Lemma 3 sind die zusätzlich zu verwendenden

Eigenschaften beschrieben. Folgende Form des Primzahlsatzes soll bewiesen werden:

Sei $\eta(t)$ eine in $t \geq 0$ definierte, monoton fallende, stetig differenzierbare, reellwertige Funktion mit

(i) $0 < \eta(t) < \frac{1}{2}$,

(ii) $\eta'(t) \to 0$, $t \to \infty$,

(iii) $1/\eta(t) \leq c_{38} \log t$, $t \geq e$,

(iv) $\zeta(s) \neq 0$ in $\{\sigma + it \mid \sigma \geq 1 - \eta(|t|)\}$.

Sei $\omega(x) = \inf_{t \geq 1} (\eta(t) \log x + \log t)$. Dann gilt: $\psi(x) = x + O(xe^{-c_{39}\omega(x)})$, $x \to \infty$, worin $c_{39} > 0$ eine absolute Konstante ist. Für den Beweis dieses Satzes benötigt man zwei Lemmata:

LEMMA 3. *Sei $\eta(t)$ eine in $t \geq 0$ definierte, monoton fallende, stetig differenzierbare, reellwertige Funktion mit den Eigenschaften (i)–(iv) des obigen Satzes. Sei ρ eine feste Zahl mit $0 < \rho < 1$. Dann gilt:*

$$\left|\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(k)}(s)\right| \leq c_{40}^{k+1} k! \left(\frac{1}{\eta(|t|)}\right)^{k+1} \log |t|, \; k \geq 0$$

$$\text{in } \{\sigma + it \mid \sigma \geq 1 - \rho\eta(|t|), \; |t| \geq e\},$$

wo $\sigma = \operatorname{Re} s$, $t = \operatorname{Im} s$ und c_{40} weder von k noch von t abhängt.

Beweis. Lemma 3 ist eine verallgemeinerte Form des Theorems 5 in [6], S. 78.

Es seien daher die wesentlichen Beweisschritte nur skizziert. Sei o.E.d.A. $t > 0$. Sei zunächst $s \in \{\sigma + it \mid \sigma \geq 1 + \rho\eta(t)\}$. Aus der Darstellung

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n \geqq 1} \Lambda(n) n^{-s}, \; \operatorname{Re} s > 1,$$

folgt durch k-maliges Ableiten:

$$\left|\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(k)}(s)\right| \leq \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \log^k n \, n^{-\sigma} \leq c_{41}^{k+1} k! \frac{1}{(\eta(t))^{k+1}}, \qquad k \geq 0, \qquad t \geq e,$$

indem man den vorletzten Term partiell summiert und die Tschebyscheff-Abschätzung $\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = O(x)$, $x \to \infty$, verwendet.

Sei nun $s \in \{\sigma + it \mid 1 - \rho\eta(t) \leq \sigma \leq 1 + \rho\eta(t)\}$. Die Funktion $Z(s) = \log \zeta(s)$ ist regulär in $D = \{\sigma + it \mid \sigma > 1 - \eta(t), \; t > 0\}$ und $Z(s) = \log \zeta(s) = \sum_{p,m} 1/mp^{ms}$, $\sigma > 1$.

Sei $T > 1$ und $\eta(T) = H$. Man wählt den Punkt $s_0 = 1 + \rho H + iT$ als Zentrum zweier konzentrischer Kreise mit Radien $r = 2\rho H$ und $R = \frac{1}{2}(1 + 3\rho)H$. Wie im Beweis des Theorems 5 in [6] beweist man, dass

(i) beide Kreise in D liegen für $T > T_1$,

(ii) $|\mathrm{Re}\, Z(s_0)| \leq 1/\rho H$,

(iii) $\mathrm{Re}\, Z(s) < \log T$, falls $T > T_2$ und $|s - s_0| < R$.

Anwendung des Satzes von Borel–Caratheodory ([6], S. 41, Lemma B) liefert

$$\left|\frac{Z^{(k+1)}(s)}{(k+1)!}\right| = \left|\frac{\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)^{(k)}}{(k+1)!}\right| < \frac{2R}{(R-r)^{k+2}}(\log T - \mathrm{Re}\, Z(s_0))$$
$$< \frac{(1+3\rho)H}{(\frac{1}{2}(1-\rho)H)^{k+2}}\left(\log T + \frac{1}{\rho H}\right) \quad \text{in } |s - s_0| < r.$$

Insbesondere folgt für $s = \sigma + iT$, wo $T \geq \max(T_1, T_2) = T_0$, $|\sigma - 1| \leq \rho\eta(T)$

$$\left|\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(k)}(s)\right| < k!\, c_{42}^{k+1} \frac{1}{(\eta(T))^{k+1}} \log T.$$

Zu beweisen bleibt Lemma 3 somit noch in

$$F = \{\sigma + it \mid |\sigma - 1| \leq \rho\eta(t),\ e \leq t \leq T_0\}.$$

Nun folgt mit Cauchy's Satz:

$$\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(k)}(s) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{|w-s|=r} \frac{\frac{\zeta'}{\zeta}(w)}{(w-s)^{k+1}}\, dw, \qquad s \in F, \qquad k \geq 0,$$

worin r, $0 < r < 1$, so klein gewählt wird, dass die Kreisscheibe mit Zentrum s, $s \in F$, und Radius r ganz in $\{\sigma + it \mid \sigma \geq 1 - ((1+\rho)/2)\eta(t)\}$ liegt, sodass

$$\left|\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(k)}(s)\right| \leq \sup_{\substack{|\mathrm{Re}\, w - 1| \leq ((1+\rho)/2)\eta(\mathrm{Im}\, w) \\ 1 \leq \mathrm{Im}\, w \leq T_0 + 1}} \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(w)\right| \frac{k!}{r^k} \leq c_{43}^{k+1} k!, \qquad s \in F, \qquad k \geq 0.$$

LEMMA 4. *Sei* $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(d/dx)^n e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, *das Hermite–Polynom vom Grade n. Sei* $U \geq \sqrt{((n/2) + 1)}$. *Dann gilt*:

$$\sup_{-U \leq u \leq U} |H_n(u)| \leq c_{44} 2^{3n/2} U^n.$$

Beweis. Es ist

$$H_n(u) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u + it)^n e^{-t^2}\, dt$$

(siehe [14], S. 252/254). Für $-U \le u \le U$ ist daher

$$\begin{aligned} |H_n(u)| &\le \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + t^2)^{n/2} e^{-t^2}\, dt \le \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^U + \int_U^{\infty} \right) (U^2 + t^2)^{n/2} e^{-t^2}\, dt \\ &\le \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}} (2U^2)^{n/2} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt + \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_U^{\infty} (2t^2)^{n/2} e^{-t^2}\, dt \\ &\le 2^{3n/2} U^n + \frac{2^{(3n/2)+1}}{\sqrt{\pi}} \int_U^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \sup_{t \ge U} (t^n e^{-t^2}(1+t^2)). \end{aligned}$$

Die Funktion $t \to t^n e^{-t^2}(1+t^2)$ fällt monoton für $t \ge U$ und es ist $\sup_{t \ge U} (t^n e^{-t^2}(1+t^2)) = U^n e^{-U^2}(1+U^2) \le c_{45} U^n$.

Beweis des Primzahlsatzes. Korollar 1, angewendet auf

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_0^{\infty} \psi(e^y) e^{-ys}\, dy, \ \operatorname{Re} s > 1,$$

liefert mit $\alpha = \beta = 1$, $c = \frac{1}{20}$, $\lambda \ge T \ge 1$, $y \ge 4$:

$$\begin{aligned} |\psi(e^y) - e^y)| \le M_5 e^y \left(\frac{T}{\lambda} + 8e^{-5T^2} \right) + M_5 e^y \max_{x = \pm T/y} 1 \times \\ \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/(20\lambda^2)} e^{it(y+x)} g(1+it)\, dt \right|, \end{aligned} \tag{30}$$

worin

$$g(1+it) = \frac{-1}{1+it} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1+it) + \frac{1+it}{it} \right).$$

Integriert man das letzte Integral n-mal partiell, so entsteht:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/(20\lambda^2)} e^{it(y+x)} g(1+it)\, dt = \frac{(-1)^n}{(i(y+x))^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(y+x)} \cdot \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_j \ge 0,\, j=1,2,3}} \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \\ \times \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^{n_1} e^{-t^2/(20\lambda^2)} \right) \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^{n_2} \frac{-1}{1+it} \right) \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^{n_3} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1+it) + \frac{1+it}{it} \right) \right) dt. \end{aligned} \tag{31}$$

Es ist

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_1} e^{-t_2/(20\lambda^2)} = e^{-t^2/(20\lambda^2)}\left(-\frac{1}{\sqrt{20}\,\lambda}\right)^{n_1} H_{n_1}\left(\frac{t}{\sqrt{20}\,\lambda}\right), \tag{32}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_2} \frac{1}{1+it} = \frac{(-i)^{n_2} n_2!}{(1+it)^{n_2+1}}, \tag{33}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_3}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1+it) + \frac{1+it}{it}\right) = \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(n_3)}(1+it)i^{n_3} + \delta_{0n_3} + \frac{(-1)^{n_3} n_3!}{it^{n_3+1}}. \tag{34}$$

Mit den Bezeichnungen von Lemma 3 besteht eine Ungleichung der Art

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^{k}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(1+it) + \frac{1+it}{it}\right)\right| \le c_{46}^{k+1} k! \log(\max(e, |t|)) \frac{1}{(\eta(\max(e, |t|)))^{k+1}},$$
$$t \in \mathbb{R}, \qquad k \ge 0. \tag{35}$$

Setzt man (32), (33) und (34) in (31) ein und verwendet Abschätzung (35), so entsteht:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/(20\lambda^2)} e^{it(y+x)} g(1+it)\,dt\right| \le \frac{2n!}{(y+x)^n}\left(\int_0^{\lambda^2} + \int_{\lambda^2}^{\infty}\right) e^{-t^2/(20\lambda^2)} \cdot \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_j \ge 0,\, j=1,2,3}} \frac{1}{n_1!}$$
$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{20}\,\lambda}\right)^{n_1} \left|H_{n_1}\left(\frac{t}{\sqrt{20}\,\lambda}\right)\right| \frac{1}{|1+it|^{n_2+1}} c_{46}^{n_3+1} \frac{\log(\max(e, |t|))}{(\eta(\max(e, |t|)))^{n_3+1}}\,dt.$$

Setzt man voraus, dass $\lambda \ge \max(e, \sqrt{20}\,(n+2))$, so kann obige Abschätzung mit Lemma 4 und der Voraussetzung, dass $\eta(t)$ monoton fallend ist in $t \ge 0$ und $1/\eta(t) \le c_{38} \log t$, $t \ge e$, wie folgt fortgesetzt werden:

$$\le \frac{2n!}{(y+x)^n} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_j \ge 0,\, j=1,2,3}} \frac{1}{n_1!}\left(\frac{1}{\sqrt{20}\,\lambda}\right)^{n_1} c_{44} 2^{3n_1/2}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{20}}\right)^{n_1} c_{46}^{n_3+1}$$
$$\times \frac{\log \lambda^2}{(\eta(\lambda^2))^{n_3+1}} \int_0^{\lambda^2} \frac{dt}{|1+it|} + \frac{2n!}{(y+x)^n} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_j \ge 0,\, j=1,2,3}} \frac{1}{n_1!}\left(\frac{1}{\sqrt{20}\,\lambda}\right)^{n_1} c_{44} 2^{3n_1/2}$$
$$\times \int_{\lambda^2}^{\infty} \left(\frac{t}{\sqrt{20}\,\lambda}\right)^{n_1} e^{-t^2/(20\lambda^2)} \frac{c_{46}^{n_3+1}}{|1+it|} c_{38}^{n_3+1} (\log t)^{n_3+2}\,dt \le \frac{c_{47}^{n+1} n!}{y^n} \frac{(\log \lambda)^2}{(\eta(\lambda^2))^{n+1}}$$
$$+ \frac{c_{48}^{n+1} n!}{y^n} \int_{\lambda^2}^{\infty} \left(\frac{t}{\lambda^2}\right)^n e^{-t^2/(20\lambda^2)} \frac{(\log t)^{n+2}}{t}\,dt \le c_{49}^{n+1} \frac{n!}{y^n} \frac{(\log \lambda)^2}{(\eta(\lambda^2))^{n+1}}.$$

In der vorletzten Ungleichung wurde benutzt, dass

$$(y+x) \geq y-1 \geq \frac{y}{2}, \quad \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_j \geq 0,\, j=1,2,3}} 1 \leq (n+1)^2, \quad \int_0^{\lambda^2} \frac{dt}{|1+it|} \leq 3 \log \lambda$$

und in der letzten, dass

$$\int_{\lambda^2}^{\infty} \left(\frac{t}{\lambda^2}\right)^n e^{-t^2/(20\lambda^2)} \frac{(\log t)^{n+2}}{t}\, dt \leq \sup_{t \geq \lambda^2} \left(\left(\frac{t \log t}{\lambda^2}\right)^{n+2} e^{-t^2/(20\lambda^2)}\right) \int_{\lambda^2}^{\infty} \frac{\lambda^4}{t^3}\, dt$$

$$\leq \sup_{\tau \geq 1} (\tau \log (\lambda^2 \tau))^{\lambda/\sqrt{20}} e^{-(\lambda^2\tau^2/20)} \leq \sup_{u \geq 1} (u \log (u^2))^{u/\sqrt{20}} e^{-(u^2/20)} < \infty.$$

Setzt man nun die gewonnene Abschätzung für (31) in (30) ein, so entsteht die für $T \geq 1$, $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$), $\lambda \geq \max(T, e, \sqrt{20}(n+2))$, $y \geq 4$ gültige Ungleichung:

$$|\psi(e^y) - e^y| \leq M_5 e^y \left(\frac{T}{\lambda} + 8e^{-5T^2}\right) + M_5 e^y c_{49}^{n+1} \frac{n!}{y^n} \frac{(\log \lambda)^2}{(\eta(\lambda^2))^{n+1}}, \qquad c_{49} \geq 1. \tag{36}$$

Sei $\Omega(y) = \inf_{t \geq 1} (\eta(t)y + \log t)$. Das Infimum $\Omega(y)$ existiert für jedes $y > 0$, da $t \to \eta(t)y + \log t$ stetig ist für $t \geq 1$ un gegen ∞ strebt für $t \to \infty$. $\Omega(y)$ ist als Funktion von y monoton wachsend und $\lim_{y \to \infty} \Omega(y) = \infty$. Man setzt nun

$$\lambda = e^{(1/4)\Omega(y)}, \qquad n = 1 + \left[\frac{\Omega(y)}{5c_{49}}\right], \qquad T = e^{(1/8)\Omega(y)}$$

und stellt fest, dass die an T, λ und n gestellten Bedingungen erfüllt sind für $y \geq y_0 \geq 4$. Zudem gilt:

$$0 < \frac{\Omega(y)}{y\eta(\lambda^2)} \leq 2 \quad \text{wegen} \quad \frac{\Omega(y)}{y\eta(\lambda^2)} \leq \frac{\eta(\lambda^2)y + \log(\lambda^2)}{y\eta(\lambda^2)} = 1 + \frac{\frac{1}{2}\Omega(y)}{y\eta(\lambda^2)}. \tag{37}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\frac{c_{49}^n n!}{y^n(\eta(\lambda^2))^n} &\leq \left(\frac{c_{49} n}{y\eta(\lambda^2)}\right)^n = \exp((1 + [\Omega(y)/(5c_{49})])(\log c_{49} + \log(1 + [\Omega(y)/(5c_{49})]) \\
&\quad - \log y - \log \eta(\lambda^2))) \\
&\leq \exp((1 + [\Omega(y)/(5c_{49})])(\log(2\Omega(y)/(5y\eta(\lambda^2))))) \\
&\leq \exp((1 + [\Omega(y)/(5c_{49})]) \log(4/5)) \leq \exp(-c_{50}\Omega(y)), \qquad c_{50} > 0,
\end{aligned} \tag{38}$$

für $y \geq y_1$ wegen (37).

$$\frac{(\log \lambda)^2}{\eta(\lambda^2)} \leq c_{38} \log(\lambda^2)(\log \lambda)^2 = 2c_{38}(\tfrac{1}{4}\Omega(y))^3 = c_{51}\Omega^3(y). \tag{39}$$

Setzt man (38) und (39) in (36) ein, so wird

$$|\psi(e^y) - e^y| \leq c_{52} e^y e^{-c_{53}\Omega(y)}, \qquad y \geq \max(y_0, y_1), \qquad c_{53} > 0.$$

Berücksichtigt man noch $\Omega(\log x) = \omega(x)$, so folgt der Primzahlsatz.

4.3. $c(n)$, $p(n)$

Die Bestimmung der Haupt- und Restglieder für $c(n)$ und $p(n)$ kann unter folgendem allgemeineren Gesichtspunkt betrachtet werden:

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ monoton wachsender, nicht negativer, reeller Zahlen derart, dass für ein reelles $\alpha \geq 0$ und alle $\epsilon > 0$ gilt: $|a_n| \leq c_{54}(\varepsilon) e^{n(\alpha+\varepsilon)}$ Man definiere für reelles $x \geq 0$: $a(x) = a_n$, falls $n = [x]$. Dann gilt:

$$\int_0^\infty a(x) e^{-xs}\, dx = \frac{1 - e^{-s}}{s} \sum_{n \geq 0} a_n e^{-ns}, \ \operatorname{Re} s > \alpha.$$

Nun ist Satz 1 anwendbar. Es zeigt sich, dass in Analogie zur Kreismethode von Hardy–Littlewood das analytische Verhalten der Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ in der Nähe des Konvergenzkreises $|z| = e^{-\alpha}$ entscheidend für den Hauptterm in der asymptotischen Entwicklung von a_n ist.

4.3.1. $c(n)$

Ist $\tau \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} \tau > 0$ und sind $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$ die Invarianten definiert durch

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0,0)\}} (m + n\tau)^{-4},$$

$$g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0,0)\}} (m + n\tau)^{-6},$$

so ist die absolute Invariante $J(\tau)$ definiert durch

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}, \quad \text{wo} \quad \Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27 g_3^2(\tau) \neq 0.$$

$J(\tau)$ ist holomorph in $\operatorname{Im}\tau > 0$. Ferner ist $J((a\tau+b)/(c\tau+d)) = J(\tau)$ für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$. $J(\tau)$ besitzt folgende Fourierentwicklung:

$$J(\tau) = \frac{1}{2^6 3^3} e^{-2\pi i\tau}\Big(1 + \sum_{n\geq 1} c(n) e^{2\pi i n\tau}\Big), \qquad \operatorname{Im}\tau > 0.$$

Die Koeffizienten $c(n)$ sind nicht negativ und ganzzahlig [7]. Man wird mit Satz 1 schliessen, dass

$$c(n) = \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}\, n^{3/4}}\left(1 + O\left(\frac{\log n}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right), \qquad n \to \infty. \tag{40}$$

Diese Aussage wurde von Petersson [15] mit dem Restglied $O(e^{4\pi\sqrt{n}}/n^{3/4+1/2})$ bewiesen. Für den Beweis von (40) sind einige Lemmata notwendig:

LEMMA 5. *Es gilt* $c(n) > c(m)$, $n > m \geq 1$.

Beweis. Man verwendet folgende Darstellung für $J(\tau)$, [7]:

$$J(\tau) = \frac{1}{2^9 3^3 q^2}\left(\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n-1})^{16} + \prod_{n\geq 1}(1-q^{2n-1})^{16} + q^2 2^8 \prod_{n\geq 1}(1+q^{2n})^{16}\right)^3, \tag{41}$$

wo $q = e^{\pi i\tau}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$.

Sei nun $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Sei α_n die Anzahl der Lösungen von

$$n = \sum_{\mu\geq 1}\sum_{\nu=1}^{16} \mu x_{\mu,\nu}, \qquad x_{\mu,\nu} \in \{0, 1\}, \qquad \mu \geq 1, \qquad 1 \leq \nu \leq 16,$$

sowie β_n die Anzahl der Lösungen von

$$n = \sum_{\mu\geq 1}\sum_{\nu=1}^{16} (2\mu - 1) y_{\mu,\nu}, \qquad y_{\mu,\nu} \in \{0, 1\}, \qquad \mu \geq 1, \qquad 1 \leq \nu \leq 16.$$

Dann gilt:

(i) $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, $n \geq 0$,
(ii) $\beta_{2n+2} \geq \beta_{2n}$, $n \geq 0$,
(iii) $\beta_{2n+3} \geq \beta_{2n+1}$, $n \geq 0$,
(iv) $\prod_{n\geq 1}(1+q^n)^{16} = \sum_{n\geq 0}\alpha_n q^n$, $|q| < 1$,
(v) $\prod_{n\geq 1}(1+q^{2n-1})^{16} = \sum_{n\geq 0}\beta_n q^n$, $|q| < 1$,
(iv) $\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n-1})^{16} = \sum_{n\geq 0}\beta_n(-1)^n q^n$, $|q| < 1$.

Mit diesen Bezeichnungen kann (41) geschrieben werden in der Form

$$J(\tau)=\frac{1}{2^9 3^3 q^2}\Big(\sum_{n\geq 0}\gamma_n q^{2n}\Big)^3, \quad \text{wo} \quad \gamma_n=\begin{cases}2\beta_0, & n=0\\ 2\beta_{2n}+2^8\alpha_{n-1}, & n\geq 1.\end{cases}$$

Aus (i) und (ii) folgt sofort, dass $\gamma_{n+1}>\gamma_n$, $n\geq 0$. Deshalb ist auch $\delta_{n+1}>\delta_n$, $n\geq 0$, wenn δ_n definiert ist durch $(\sum_{n\geq 0}\gamma_n q^{2n})^3=\sum_{n\geq 0}\delta_n q^{2n}$, $|q|<1$. Es folgt Lemma 1.

LEMMA 6. *Sei* $\operatorname{Re} s>0$. *Es gilt*:

$$\int_0^\infty \frac{e^{4\pi\sqrt{y}}}{\sqrt{2}\,y^{3/4}}e^{-sy}\,dy=e^{4\pi^2/s}+\rho(s);$$

$\rho(s)$ *ist analytisch in* $\operatorname{Re} s>0$ *und stetig in* $\operatorname{Re} s\geq 0$, $s\neq 0$, *und es gilt*:

$$|\rho(s)|\leq\begin{cases}c_{55}, & |s|\geq 1,\ \operatorname{Re} s\geq 0\\ c_{56}(1+|s|\,e^{4\pi^2\sigma/|s|^2}), & |s|\leq 1,\ \operatorname{Re} s\geq 0.\end{cases}$$

Beweis. Für $s>0$ gilt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{4\pi\sqrt{y}}}{\sqrt{2}\,y^{3/4}}e^{-sy}\,dy=\left(\frac{2}{s}\right)^{1/4}\sqrt{\pi}\,D_{-1/2}\left(\frac{-4\pi}{\sqrt{(2s)}}\right)e^{2\pi^2/s}, \text{ wenn} \tag{42}$$

$$D_\nu(z)=\frac{e^{-(z^2/4)}}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty e^{-zt-(1/2)t^2}t^{-\nu-1}\,dt,\ \operatorname{Re}\nu<0,$$

die parabolische Zylinderfunktion bezeichnet. Da $z\to D_\nu(z)$, $\operatorname{Re}\nu<0$, eine ganze Funktion ist, stellt (42) die analytische Fortsetzung des Integrals nach $\mathbb{C}-\mathbb{R}_{\leq 0}$ dar. Für $D_\nu(z)$, $\operatorname{Re}\nu<0$, gelten folgende asymptotische Entwicklungen [14]:

$$D_\nu(z)=z^\nu e^{-(z^2/4)}(1+O(|z|^{-2}))-\frac{\sqrt{(2\pi)}}{\Gamma(-\nu)}e^{i\pi\nu}e^{z^2/4}z^{-\nu-1}(1+O(|z|^{-2})),$$

$$|z|\to\infty,\qquad \frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\delta\leq\arg z\leq\frac{5\pi}{4}-\delta<\frac{5\pi}{4} \tag{43}$$

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-(z^2/4)}(1 + O(|z|^{-2})) - \frac{\sqrt{(2\pi)}}{\Gamma(-\nu)} e^{-i\pi\nu} e^{z^2/4} z^{-\nu-1}(1 + O(|z|^{-2})),$$

$$|z| \to \infty, \qquad \frac{-5\pi}{4} < \frac{-5\pi}{4} + \delta \le \arg z \le \frac{-\pi}{4} - \delta < \frac{-\pi}{4}. \quad (44)$$

Falls $\operatorname{Re} s \ge 0$, $\operatorname{Im} s \ge 0$, so ist $-4\pi/\sqrt{(2s)} \in \{re^{i\phi} \mid r \ge 0, 3\pi/4 \le \phi \le \pi\}$, sodass nach (43)

$$|\rho(s)| \le c_{56}(1 + |s|\, e^{4\pi^2\sigma/|s|^2}), \qquad |s| \le 1, \operatorname{Re} s \ge 0, \operatorname{Im} s \ge 0.$$

Falls $\operatorname{Re} s \ge 0$, $\operatorname{Im} s \le 0$, so ist $-4\pi/\sqrt{(2s)} \in \{re^{i\phi} \mid r \ge 0, -\pi \le \phi \le -3\pi/4\}$, sodass nach (44):

$$|\rho(s)| \le c_{56}(1 + |s|\, e^{4\pi^2\sigma/|s|^2}), \qquad |s| \le 1, \operatorname{Re} s \ge 0, \operatorname{Im} s \le 0.$$

Aus der Tatsache, dass $z \to D_\nu(z)$, $\operatorname{Re} \nu < 0$, ganz ist, folgt sofort

$$|\rho(s)| \le c_{55}, \ |s| \ge 1, \operatorname{Re} s \ge 0.$$

Dies beweist Lemma 6.

LEMMA 7. *Seien die Zahlen* $c(n)$, $n \ge 1$, *wie in der Einleitung definiert. Dann gilt*:

(i) $\left(1 + \sum_{n\ge1} c(n)e^{-ns}\right) = e^{-s+(4\pi^2/s)}\left(1 + \sum_{n\ge1} c(n)e^{-n(4\pi^2/s)}\right)$, $\operatorname{Re} s > 0$.

(ii) $\int_0^\pi e^{4\pi^2\sigma/(\sigma^2+t^2)}\, |\sigma + it|\, dt \le c_{57}\sigma^{5/2}e^{4\pi^2/\sigma}, \qquad 0 < \sigma \le 1.$

(iii) $\int_0^\pi e^{4\pi^2\sigma/(\sigma^2+t^2)} \sum_{n\ge1} c(n)e^{-4\pi^2\sigma n/(\sigma^2+t^2)}\, dt \le c_{58}e^{\pi^2/\sigma}, \qquad 0 < \sigma \le 1.$

(iv) $\int_0^\pi |\sigma + it| \left|1 + \sum_{n\ge1} c(n)e^{-n(\sigma+it)}\right| dt \le c_{59}\sigma^{5/2}e^{4\pi^2/\sigma}, \qquad 0 < \sigma \le 1.$

Beweis. (i) Dies folgt sofort aus der Definition der Koeffizienten $c(n)$ und

$$J\left(\frac{is}{2\pi}\right) = J\left(\frac{-1}{\frac{is}{2\pi}}\right).$$

(ii) $$\int_0^\pi e^{4\pi^2\sigma/(\sigma^2+t^2)}\,|\sigma+it|\,dt \le \int_0^\sigma e^{4\pi^2\sigma/(\sigma^2+t^2)}\sqrt{2}\,\sigma\,dt + \int_\sigma^\pi e^{4\pi^2\sigma/(2\sigma^2)}\,|1+i\pi|\,dt$$

$$\le \sqrt{2}\,\sigma^2 \int_0^1 e^{4\pi^2/(\sigma(1+t^2))}\,dt + \pi\,|1+i\pi|\,e^{2\pi^2/\sigma} \le \sqrt{2}\,\sigma^2 e^{4\pi^2/\sigma}\int_0^1 e^{-4\pi^2t^2/(2\sigma)}\,dt$$

$$+\,\pi\,|1+i\pi|\,e^{2\pi^2/\sigma} \le c_{57}\sigma^{5/2}e^{4\pi^2/\sigma}.$$

(iii) Für $0 \le t \le \sqrt{\sigma}$ gilt:

$$\sum_{n\ge1} c(n)e^{4\pi^2\sigma(1-n)/(\sigma^2+t^2)} \le \sum_{n\ge1} c(n)e^{4\pi^2(1-n)/(1+\sigma)} \le c_{60} < \infty. \tag{45}$$

Für $\sqrt{\sigma} \le t \le \pi$ gilt:

$$\sum_{n\ge1} c(n)e^{4\pi^2\sigma(1-n)/(\sigma^2+t^2)} \le \sum_{n\ge1} c(n)e^{4\pi^2\sigma(1-n)/(\sigma^2+\pi^2)}$$

$$\le e^{4\pi^2\sigma/(\sigma^2+\pi^2)}\left(1+\sum_{n\ge1} c(n)e^{-4\pi^2\sigma n/(\sigma^2+\pi^2)}\right)$$

$$= e^{(\sigma^2+\pi^2)/\sigma}\left(1+\sum_{n\ge1} c(n)e^{-(\sigma^2+\pi^2)n/\sigma}\right)$$

$$\le c_{61}e^{\pi^2/\sigma}, \text{ indem man Identität (i) verwendet.} \tag{46}$$

Daher ist

$$\int_0^\pi e^{4\pi^2\sigma/(\sigma^2+t^2)} \sum_{n\ge1} c(n)e^{-4\pi^2n\sigma/(\sigma^2+t^2)}\,dt$$

$$\le \left(\int_0^{\sqrt{\sigma}} + \int_{\sqrt{\sigma}}^\pi\right)\cdots dt \le \sqrt{\sigma}\,c_{60} + \pi c_{61}e^{\pi^2/\sigma} \le c_{58}e^{\pi^2/\sigma}.$$

(iv) Aufgrund der Identität (i) ist

$$\left|1+\sum_{n\ge1} c(n)e^{-n(\sigma+it)}\right| \le e^{-\sigma+(4\pi^2\sigma/|s|^2)}\left(1+\sum_{n\ge1} c(n)e^{-(4\pi^2\sigma n/|s|^2)}\right).$$

Verwendet man dies sowie die Abschätzungen (45) und (46), so wird

$$\int_0^{\pi} |\sigma+it| \left|1+\sum_{n\geq 1} c(n)e^{-n(\sigma+it)}\right| dt \leq \left(\int_0^{\sqrt{\sigma}} + \int_{\sqrt{\sigma}}^{\pi}\right) |\sigma+it|\, e^{-\sigma}$$

$$\times \left(e^{4\pi^2\sigma/|s|^2} + \sum_{n\geq 1} c(n)e^{4\pi^2\sigma(1-n)/|s|^2}\right) dt$$

$$\leq \int_0^{\pi} |\sigma+it|\, e^{4\pi^2\sigma/|s|^2}\, dt + \int_0^{\sqrt{\sigma}} c_{60}\, |\sigma+it|\, dt$$

$$+ \int_{\sqrt{\sigma}}^{\pi} c_{61} e^{\pi^2/\sigma}\, |\sigma+it|\, dt \leq c_{59}\sigma^{5/2} e^{4\pi^2/\sigma} \text{ nach (ii).}$$

Dies beweist Lemma 7.

Beweis der Aussage (40). Setzt man $c(x) = c(n)$, falls $n = [x]$ (wo $c(0) = 1$), so gilt:

$$\int_0^{\infty} c(y)e^{-ys}\, dy = \frac{1-e^{-s}}{s} \sum_{n\geq 0} c(n)e^{-ns}, \ \operatorname{Re} s > 0.$$

Sei $c_0(y) = e^{4\pi\sqrt{y}}/(\sqrt{2}\, y^{3/4})$, $y > 0$. Sei für $\operatorname{Re} s > 0$:

$$g(s) = \int_0^{\infty} (c(y) - c_0(y))e^{-ys}\, dy = \frac{1-e^{-s}}{s} \sum_{n\geq 0} c(n)e^{-ns} - e^{4\pi^2/s} - \rho(s)$$

(wo $\rho(s)$ wie in Lemma 6 definiert ist und den dortigen Abschätzungen genügt). Es gelten folgende Abschätzungen:

$$|g(\sigma+it)| \leq c_{62}\left(1 + |s|\, e^{4\pi^2\sigma/|s|^2} + \sum_{n\geq 1} c(n)e^{4\pi^2\sigma(1-n)/|s|^2}\right),$$

$$0 < \sigma \leq 1, \qquad |t| \leq \pi, \tag{47}$$

$$|g(\sigma+it)| \leq c_{63} + \left|\sum_{n\geq 0} c(n)e^{-ns}\right| \left|\frac{1-e^{-s}}{s}\right|, \qquad 0 < \sigma \leq 1, \qquad |t| \geq \pi; \tag{48}$$

(48) folgt sofort aus Lemma 6. (47) folgt aus Lemma 6 und der Darstellung

$$|g(\sigma+it)| = \left|\frac{1-e^{-s}}{s} e^{-s} e^{4\pi^2/s}\left(1 + \sum_{n\geq 1} c(n)e^{-(4\pi^2 n/s)}\right) - e^{4\pi^2/s} - \rho(s)\right|,$$

die sich unmittelbar aus Lemma 7(i) ergibt. Man wendet nun Satz 1 an mit $\alpha = 0$, $\omega = 1$, $c = \frac{1}{8}$, $A_0(y) = B_0(y) = c_0(y) = e^{4\pi\sqrt{y}}/(\sqrt{2}\, y^{3/4})$, $y > 0$. (Man prüft ohne weiteres, dass die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind). Damit gilt für $y \geq 4$, $0 < \sigma \leq 1$, $\lambda \geq T \geq 1$:

$$|c(y) - c_0(y)| \leq c_{64} c_0(y)\left(\frac{T}{\lambda} + e^{-2T^2}\right) + c_{64} e^{\sigma y} \int_0^\infty e^{-t^2/(8\lambda^2)}\, |g(\sigma + it)|\, dt. \tag{49}$$

Verwendet man nun (47) und (48), so folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-t^2/(8\lambda^2)}\, |g(\sigma + it)|\, dt &\leq \int_0^\pi |g(\sigma + it)|\, dt + \sum_{k \geq 1} \int_{2\pi k - \pi}^{2\pi k + \pi} e^{-t^2/(8\lambda^2)}\, |g(\sigma + it)|\, dt \\
&\leq \int_0^\pi c_{62}\left(1 + |\sigma + it|\, e^{4\pi^2\sigma/(\sigma^2+t^2)} + \sum_{n \geq 1} c(n) e^{4\pi^2\sigma(1-n)/(\sigma^2+t^2)}\right) dt + c_{63} \int_0^\infty e^{-t^2/(8\lambda^2)}\, dt \\
&\quad + \sum_{k \geq 1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(t+2\pi k)^2/(8\lambda^2)} \left| \sum_{n \geq 0} c(n) e^{-n(\sigma+it)} \right| \frac{|1 - e^{-\sigma - it}|}{|\sigma + i(t + 2\pi k)|}\, dt.
\end{aligned} \tag{50}$$

$\sum_{k \geq 1} e^{-(t+2\pi k)^2/(8\lambda^2)}/|\sigma + i(t + 2\pi k)|$ konvergiert gleichmässig für $t \in [-\pi, \pi]$ und es gilt für $t \in [-\pi, \pi]$:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{e^{-(t+2\pi k)^2/(8\lambda^2)}}{|\sigma + i(t + 2\pi k)|} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-(2\pi k - \pi)^2/(8\lambda^2)}}{2\pi k - \pi} \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k > 1} \frac{1}{k} e^{-\pi^2 k^2/(8\lambda^2)} \leq (1 + \log \lambda).$$

Verwendet man dies sowie Lemma 7 in (50), so entsteht:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-t^2/(8\lambda^2)}\, |g(\sigma + it)|\, dt &\leq c_{65}(1 + \sigma^{5/2} e^{4\pi^2/\sigma} + e^{\pi^2/\sigma} + \lambda + (1 + \log \lambda)\sigma^{5/2} e^{4\pi^2/\sigma}). \\
&\leq c_{66}(\lambda + (1 + \log \lambda)\sigma^{5/2} e^{4\pi^2/\sigma}).
\end{aligned}$$

Setzt man dies in (49) ein, so entsteht die für $y \geq 4$, $0 < \sigma \leq 1$, $\lambda \geq T \geq 1$ gültige Beziehung:

$$|c(y) - c_0(y)| \leq c_{64} c_0(y)\left(\frac{T}{\lambda} + e^{-2T^2}\right) + c_{67}(\lambda + (1 + \log \lambda)\sigma^{5/2} e^{4\pi^2/\sigma}) e^{\sigma y}.$$

Wählt man $\lambda = y^2$, $T = y$, $\sigma = 2\pi/\sqrt{y}$, so folgt (40).

4.3.2. $p(n)$

Bezeichnet $p(n)$ die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n, so gilt:

$$\sum_{n\geq 0} p(n)t^n = \prod_{k\geq 1} (1-t^k)^{-1}, \qquad |t|<1, \qquad p(0)=1.$$

Die Funktion $n \to p(n)$ ist monoton wachsend. Mit Satz 1 kann bewiesen werden, dass

$$p(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{(2n/3)}}}{4\sqrt{3}\,n}\left(1+O\left(\frac{\log n}{n^{1/2}}\right)\right), \qquad n\to\infty. \tag{51}$$

Diese Aussage wurde von G. H. Hardy und S. Ramanujan bewiesen [9] mit dem Restglied $O(e^{\pi\sqrt{(2n/3)}}n^{-3/2})$. Der Beweis von (51) ist jenem für (40) ähnlich. Es seien daher die zu Lemma 6 und Lemma 7 analogen Lemmata zitiert:

LEMMA 6′. *Sei* $p_0(x) = e^{\pi\sqrt{(2(\lambda+1)/3)}}/(4\sqrt{3}\,(x+1))$, $x\geq 0$. *Es gilt in* $\operatorname{Re} s>0$:

$$\int_0^\infty p_0(x)e^{-xs}\,dx = \frac{e^{s+(\pi^2/(6s))}}{\sqrt{(2\pi)}}\sqrt{s} + \rho(s);$$

$\rho(s)$ *ist analytisch in* $\operatorname{Re} s>0$ *und stetig in* $\operatorname{Re} s\geq 0$, $s\neq 0$, *und es gilt*:

$$|\rho(s)| \leq \begin{cases} c_{68}e^{\sigma}|s|^3, & |s|\geq 1,\ \operatorname{Re} s\geq 0,\\ c_{69}(1+|s|^{3/2}e^{\pi^2\sigma/(6|s|^2)}), & |s|\leq 1,\ \operatorname{Re} s\geq 0,\ s\neq 0.\end{cases}$$

LEMMA 7′.

(i) $$\sum_{n\geq 0} p(n)e^{-ns} = e^{-(s/24)+(\pi^2/(6s))}\sqrt{\frac{s}{2\pi}}\sum_{n\geq 0} p(n)e^{-(4\pi^2 n/s)}, \quad \operatorname{Re} s>0,$$

(ii) $$\int_0^\pi (\sigma^2+t^2)^{3/4}e^{\pi^2\sigma/(6(\sigma^2+t^2))}\,dt \leq c_{70}\sigma^3 e^{\pi^2/(6\sigma)},$$

(iii) $$\int_0^\pi e^{\pi^2\sigma/(6(\sigma^2+t^2))}\sum_{n\geq 1} p(n)e^{-4\pi^2\sigma n/(\sigma^2+t^2)}\,dt \leq c_{71}e^{\pi^2/(12\sigma)}, \qquad 0<\sigma\leq 1,$$

(iv) $$\int_0^\pi |\sigma+it|\left|\sum_{n\geq 0} p(n)e^{-n(\sigma+it)}\right| \leq c_{72}\sigma^3 e^{\pi^2/(6\sigma)}, \qquad 0<\sigma\leq 1.$$

(51) folgt nun in gleicher Weise aus Satz 1, Lemma 6′ und Lemma 7′ wie (40) aus Satz 1, Lemma 6 und Lemma 7 folgte.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] CHANDRASEKHARAN, K. und NARASIMHAN, R., *Hecke's functional equation and arithmetical identities.* Ann. of Math. *74* (1961), 1–23.

[2] CHANDRASEKHARAN, K. und NARASIMHAN, R., *Hecke's functional equation and the average order of arithmetical functions.* Acta Arithm. *6* (1961), 487–503.

[3] CHANDRASEKHARAN, K. und NARASIMHAN, R., *Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions.* Ann. of Math. *76* (1962), 93–136.

[4] CHANDRASEKHARAN, K. und NARASIMHAN, R., *The approximate functional equation for a class of zeta-functions.* Math. Ann. *152* (1963), 30–64.

[5] CHANDRASEKHARAN, K., *Introduction to analytic number theory.* Grundlehren, Bd. 148, Springer Verlag.

[6] CHANDRASEKHARAN, K., *Arithmetical functions.* Grundlehren, Bd. 167, Springer Verlag.

[7] CHANDRASEKHARAN, K., *Elliptic functions.* Grundlehren, Bd. 281, Springer Verlag.

[8] DELANGE, H., *Généralisation du théorème de Ikehara.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) *71* (1954), 213–242.

[9] HARDY, G. H., *Ramanujan.* Chelsea Publishing Company, New York.

[10] IKEHARA, S., *An extension of Landau's theorem in the analytical theory of numbers.* J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. *10* (1931), 1–12.

[11] INGHAM, A. E., *A Tauberian theorem for partitions.* Ann. of Math. *42* (1941).

[12] LANDAU, E., *Ein Satz von Tschebyschef.* Math. Ann. *61* (1905), 527–550.

[13] LANDAU, E., *Ueber die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen.* Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1915. Heft 2.

[14] MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., SONI, R. P., *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics.* 3rd ed., Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1966.

[15] PETERSSON, H., *Ueber die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen.* Acta Mathematica *58* (1932), 169–215.

[16] RANKIN, R. A., *Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions II.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society *35* (1939), 357–372.

[17] RIEGER, G. J., *On Wiener's method in prime number theory.* (unveröffentlicht).

[18] THURNHEER, P., *Une généralisation du théorème de Wiener–Ikehara.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 290 (17 mars 1980), Série A.

[19] TITCHMARSH, E. C., *The theory of the Riemann zeta-function.* Oxford Univ. Press 1951.

[20] VORONOI, G., *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, *126* (1903), 241–282.

[21] WIENER, N., *Tauberian theorems.* Ann. of Math. *33* (1932), 1–100, 787.

ETH Zürich, HG G66.2
Rämistrasse 101
CH-8092 Zürich (Schweiz)

Erhalten 9. März 1987