Sur les fonctions propres positives des variétés de Cartan-Hadamard.

Autor(en): **Acona, Alano**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **64 (1989)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-48935

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 64 (1989) 62–83 0010–2571/89/010062–22$01.50 + 0.20/0
© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur les fonctions propres positives des variétés de Cartan–Hadamard

ALANO ANCONA

Soit M une variété de Cartan–Hadamard à courbure sectionnelle pincée entre deux constantes strictement négatives et soit $\lambda_1(M) = \inf\{(\int_M |\nabla\varphi|^2\, dv)/(\int_M |\varphi|^2\, dv);\ \varphi \in C_0^\infty(M),\ \varphi \not\equiv 0\}$ la première valeur propre de l'opérateur de Laplace–Beltrami Δ sur M (v désignant la mesure de volume de M). On sait que $\lambda_1(M)$ est strictement positif et que pour chaque réel $t < \lambda_1(M)$, il existe "beaucoup" de fonctions $\Delta + tI$-harmoniques positives ([3] pour le cas $t = 0$, et [1]); on a même une représentation intégrale de ces fonctions à l'aide d'un noyau de "Poisson" $P_t(x, \zeta)$, $x \in M$, ζ parcourant la sphère à l'infini de M, habituellement notée $S_\infty(M)$. Ce sont ces fonctions que nous appellerons fonctions propres sur M au niveau t, ou encore t-fonctions propres.

Dans le cas où M est à courbure sectionnelle constante $-a^2$, il est bien connu que ces assertions s'étendent aux fonctions propres au niveau λ_1 (et que $\lambda_1 = (n-1)^2 a^2/4$); de plus, on sait construire pour chaque t, $0 < t \leq \lambda_1$, "beaucoup" de fonctions t-propres tendant vers zéro à l'infini, et de classe $L^p(M)$, pour tout $p > 2/(1 - \sqrt{(1 - t/\lambda_1)})$ (voir [5]).

Nous nous proposons dans ce travail de revenir au cas de la courbure non constante, en complétant l'étude amorcée dans [1]; nous montrerons que pour tout niveau t, $0 < t < \lambda_1$, il existe des fonctions t-harmoniques sur M tendant vers zéro à l'infini; cette propriété s'étend d'ailleurs à des opérateurs elliptiques d'ordre deux sur M assez généraux. Néanmoins il existe une différence importante avec le cas de la courbure constante: la vitesse de convergence vers zéro à l'infini ne peut être uniformément controlée lorsqu'on s'approche du niveau critique λ_1. On verra sur des exemples qu'il peut ne pas exister de fonctions propres >0 au niveau λ_1 tendant vers zéro à l'infini, aussi bien lorsque l'opérateur $\Delta + \lambda_1 I$ admet une fonction de Green, que dans le cas contraire, où toutes les fonctions propres au niveau λ_1 sont proportionnelles. On verra aussi que chacun de ces deux cas peut effectivement se présenter. Pour les preuves et les constructions d'exemples, nous nous appuierons essentiellement sur les résultats de [1] (qui étaient en partie motivés par ces questions). Dans le paragraphe 2, on s'est efforcé de préciser les estimées de [1] concernant les quotients des fonctions de Green pour différents niveaux, ce qui nous a amené à des énoncés intermédiaires peut-être intéressants par eux-mêmes.

Dans la dernière partie de cet article, nous indiquons une extension (très partielle) au cadre des variétés à courbure négative de la théorie de S. J. Patterson sur les ensembles limites des groupes Fuchsiens [11]; on montrera que quelques unes des propriétés remarquables mises en évidence par Patterson sont des conséquences assez simples du principe de Harnack à l'infini établi dans [1].

L'auteur tient enfin à remercier N. Lohoué à qui il doit le problème de l'existence de fonctions t-propres positives sur M, nulles à l'infini pour chaque $t \in]0, \lambda_1(M)[$; ce travail a bénéficié de son intérêt et de ses questions renouvelées.

1. Construction de fonctions propres, nulles à l'infini

Dans toute la suite, on se placera dans le cadre suivant: on désigne par M une variété de Cartan–Hadamard de dimension $n \geqslant 2$, à courbure sectionnelle pincée entre les constantes $-a^2$ et $-b^2$, $(0 < a \leqslant b < +\infty)$ et on note v la mesure de volume sur M. Dans cette partie, on se donne sur M un opérateur elliptique $\mathscr{L}$ du type suivant:

$$\mathscr{L}u = \operatorname{div}\{\mathscr{A}(\nabla u)\} + B\nabla u + \operatorname{div}\{uC\} + \gamma u \tag{1}$$

où $\mathscr{L} = \{\mathscr{A}(x)\}_{x \in M}$ est une section borélienne du fibré $\operatorname{End}(T(M))$, ($T(M)$ désigne le fibré tangent sur M), et les $\mathscr{A}(x)$ sont bornés, uniformément accrétifs; B et C sont deux champs de vecteurs boréliens et bornés sur M, et γ est une fonction borélienne bornée sur M; on a donc pour une certaine constante $\nu > 0$

$$\langle \mathscr{A}(x)\xi, \xi \rangle \geqslant \nu \|\xi\|^2 \quad \text{pour} \quad x \in M, \qquad \xi \in M_x \tag{2}$$

$$\|\mathscr{A}(x)\xi\| \leqslant \nu^{-1}\|\xi\| \quad \text{pour} \quad x \in M, \qquad \xi \in M_x \tag{3}$$

$$\|B\|_\infty + \|C\|_\infty + \|\gamma\|_\infty \leqslant \nu^{-1} \tag{4}$$

Un tel opérateur $\mathscr{L}$ est un opérateur adapté sur M au sens de [1].

Une classe d'opérateurs de ce type peut être obtenue de la façon suivante: supposons que sur chaque boule $B(x, 1)$ de rayon 1 dans M, les coefficients $[g_{ij}]$ relatifs à un système de coordonnées normales en x, soient K-lipschitziens pour un K indépendant de x; soit $\{X_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un repère mobile (orthonormé) sur M, tel que les $\nabla_{X_i}(X_j)$ soient bornés sur M; si $\{a_{ij}\}$ est une matrice carrée d'ordre n de fonctions boréliennes bornées sur M, telle que l'on ait: $\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \varepsilon \sum \xi_i^2$ pour $x \in M$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, et une constante $\varepsilon > 0$, alors l'opérateur $\mathscr{L} = \sum X_i(a_{ij}X_j)$ est du type décrit ci-dessus.

Outre (1) à (4), on suppose que $\mathscr{L}(1) = 0$, et que $\mathscr{L}$ coercif, ce qui signifie

que:

$$a_{\mathscr{L}}(\varphi, \varphi) = \int_M \{\langle \mathscr{A}_x(\nabla\varphi), \nabla\varphi\rangle + \varphi\langle \nabla\varphi, C - B\rangle - \gamma\varphi^2\}\, dv(x) \geqslant \varepsilon \int_M |\nabla\varphi|^2\, dv \quad (5)$$

pour toute $\varphi \in C_0^\infty(M)$, et une constante ε strictement positive. Bien entendu, l'opérateur $\mathscr{L}$ que nous avons le plus en vue est l'opérateur de Laplace–Beltrami sur M.

Notons λ_1 la première valeur propre de $\mathscr{L}$ (appelée aussi "fond du spectre"):

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda > 0;\ \mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda I \text{ est coercif}\}$$

(Notre terminologie n'est bien justifiée que si $\mathscr{L}$ est auto-adjoint) On sait (voir [1]) que pour chaque $\lambda < \lambda_1$ il existe un noyau de Green G_λ sur M relativement à $\mathscr{L}_\lambda$, $G_\lambda : M \times M \to]0, +\infty]$. (Notre convention sera que $G_\lambda(x, y)$ est $\mathscr{L}_\lambda$-harmonique en x sur $M\backslash\{y\}$). Posant $G = G_0$, on a les estimées suivantes [1]:

$$G(x, y) \leqslant c \exp(-\beta\, d(x, y)) G_\lambda(x, y) \quad \text{pour} \quad x, y \in M, \qquad 0 < \lambda < \lambda_1 \quad (6)$$

$$G_\lambda(x, y) \leqslant c \exp(-\beta'\, d(x, y)) \quad \text{pour} \quad x, y \in M,\ d(x, y) \geqslant 1 \quad (7)$$

$$G_\lambda(x, y) \geqslant G(x, y) > C^{-1} \qquad x, y \in M,\ d(x, y) \leqslant 1, \qquad \lambda > 0 \quad (8)$$

où c, β et β' sont des constantes strictement positives qui dépendent de n, b, v et $\lambda_1 - \lambda$. Notons que (6) est contenue dans l'estimée plus générale ([1]):

$$G_{\lambda'}(x, y) \leqslant c \exp(-\beta\, d(x, y)) G_\lambda(x, y) \quad \text{pour} \quad x, y \in M \quad (6')$$

pour $\lambda' < \lambda < \lambda_1$, c et β dépendant de n, b, v, λ', λ. (7) et (8) sont des conséquences de (6) (tant qu'on ne s'intéresse pas aux valeurs optimales de β' ou c).

D'autre part, il existe pour chaque $\lambda < \lambda_1$ un noyau continu $K_\lambda : M \times S_\infty \to \mathbb{R}$, tel que les fonctions u $\mathscr{L}_\lambda$-harmoniques $\geqslant 0$ sur M soient en bijection avec les mesures $\mu \geqslant 0$ sur S_∞ par l'intermédiaire de la formule:

$$u(x) = \int_M K_\lambda(x, \zeta)\, d\mu(\zeta), \qquad x \in M \quad (9)$$

K_λ peut être déterminé par le choix d'un point de référence $0 \in M$, et la condition

de normalisation $K_\lambda(0, \zeta) = 1$ pour $\zeta \in S_\infty$. Nous fixerons désormais un tel point 0 et désignerons par $\delta(x)$ la distance $d(0, x)$ pour $x \in M$.

Si σ est la mesure de probabilité sur S_∞ correspondant au niveau $\lambda = 0$ et la fonction constante 1, on sait ([1]) que pour $f \in C(S_\infty, \mathbb{R})$, la formule

$$u(x) = \int_M K_0(x, \zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta), \qquad x \in M \tag{10}$$

donne la solution du problème de Dirichlet sur M, l'opérateur $\mathscr{L}$ et la donnée frontière f; σ est donc la $\mathscr{L}$-mesure harmonique du point 0. Il faut remarquer que même dans le cas $\mathscr{L} = \Delta$, il n'y a pas de relation d'absolue continuité entre σ et la mesure géométrique d'angle solide relative à 0 (voir [4], et d'autres propriétés de σ dans [3]).

On a alors le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soient* $f \in L^\infty(\sigma)$, $\lambda \in]0, \lambda_1[$; *la formule* $u_{f,\lambda}(x) = \int_M K_\lambda(x, \xi) f(\xi)\, d\sigma(\xi)$ *définit une fonction* $\mathscr{L} + \lambda I$*-harmonique, vérifiant l'estimation*:

$$u_{f,\lambda}(x) \leq C\, \|f\|_\infty e^{-\alpha\delta(x)} \tag{11}$$

où C *et* α *sont des constantes* >0 *qui dépendent de* n, a, b, ν, λ *et* λ_1.

Il suffit évidemment de traiter le cas $f = 1$; on notera $u = u_{1,\lambda}$. Afin d'alléger, on ne mentionnera plus la dépendance en n des diverses constantes utilisées.

Soient γ une géodésique issue de 0 et aboutissant au point ζ_0 sur la sphère à l'infini S_∞, x_j le point $\gamma(kj)$ sur la géodésique pour $j \in \mathbb{N}$ (k désignant un réel ≥ 1 fixé qui sera choisi plus bas). D'après les inégalités de Harnack, il suffira d'établir (11) pour les points x_j, pourvu que C et α soient indépendants de la géodésique γ.

Désignons par Γ_j le "cône" géodésique de sommet $x_j' = \gamma(k(j-1) - 1)$ et d'ouverture $\pi/2$, lieu des points $z \in M$, $z \neq x_j'$, tels que $\measuredangle(\overline{x_j'\zeta_0}, \overline{x_j'Z}) < \pi/2$; soient Σ_j l'ensemble des points de la sphère à l'infini S_∞ adhérents à ce cône, et Σ_j' l'ensemble complémentaire dans S_∞. Décomposons $u(x_j)$ en deux parties I_1 et I_2:

$$I_1 = \int_{\Sigma_j} K_\lambda(x_j, \zeta)\, d\sigma(\zeta), \qquad I_2 = \int_{\Sigma_j'} K_\lambda(x_j, \zeta)\, d\sigma(\zeta) \tag{12}$$

et majorons chacune de ces parties.

Cas de I_1. On observe qu'il existe θ, $0<\theta<\pi/2$, ne dépendant que de b *et de* k et tel que le cône géodésique C_{j+1} de sommet x_{j+1}, de direction $-\gamma'(k(j+1))$, et d'angle au sommet θ, admette dans le compactifie $M^* = M \cup S_\infty$ une fermeture disjointe de Σ_j. Il suffit, d'après le théorème de comparaison de Rauch [6] de choisir pour θ l'angle qui convient pour la variété modèle $H_n(-b^2)$ (et l'entier k), soit par exemple: $\theta < \operatorname{Arctg}\{(sh(b(k+1))^{-1}\}$.

D'après les inégalités de Harnack à l'infini de [1] (chap. 3) (voir aussi le lemme 2 plus bas) appliqué à ce cône, et aux deux fonctions $\mathscr{L}_\lambda$-harmoniques $\geqslant 0$ sur C_{j+1}, $K_\lambda(\cdot, \zeta)$ et $G_\lambda(\cdot, x_{j+1})$, on *a*:

$$1/(CG_\lambda(0, x_{j+1})) \leqslant K_\lambda(x, \zeta)/G_\lambda(x, x_{j+1}) \leqslant C/G_\lambda(0, x_{j+1}) \tag{13}$$

pour tout x sur le segment géodésique $\overline{Ox_j}$ et tout $\zeta \in \Sigma_j$; la constante C dépend de a, b, k, ν, λ et λ_1.

En particulier, en faisant $x = x_j$: $K_\lambda(x_j, \zeta) \sim G_\lambda(x_j, x_{j+1})/G_\lambda(0, x_{j+1})$, $\forall \zeta \in \Sigma_j$, le symbole $\sim$ signifiant que les quantités qu'il sépare ont un rapport compris entre deux constantes strictement positives (dépendant de ν, k, a, b, λ_1, λ); d'où d'après (8):

$$K_\lambda(x_j, \zeta) \sim 1/G_\lambda(0, x_{j+1}) \quad \text{pour} \quad \zeta \in \Sigma_j \tag{13'}$$

Le même raisonnement appliqué au niveau $\lambda = 0$ donne: $K(x_j, \zeta) \sim 1/G(0, x_{j+1})$, pour $\zeta \in \Sigma_j$. D'où, en intégrant:

$$I_1 \leqslant C \int_{\Sigma_j} (1/G_\lambda(0, x_{j+1}))\, d\sigma(\zeta) \leqslant C'(G(0, x_{j+1})/G_\lambda(0, x_{j+1}))\left\{\int_{\Sigma_j} K(x_j, \zeta)\, d\sigma(\zeta)\right\}$$

Comme $\zeta \to K(x_j, \zeta)$ est d'intégrale 1 par rapport à σ, on obtient:

$$I_1 \leqslant CG(0, x_{j+1})/G_\lambda(0, x_{j+1}) \qquad C = C(k, a, b, \nu, \lambda, \lambda_1)$$

et d'après (6):

$$I_1 \leqslant C \exp(-\beta jk), \qquad C = C(k, a, b, \nu, \lambda, \lambda_1) \tag{14}$$

Majoration de I_2: On utilise à nouveau le principe de Harnack à l'infini, mais maintenant pour le cône Γ_j; pour tout $\zeta \in \Sigma_j'$ on a:

$$K_\lambda(x_j, \zeta)/K_\lambda(x_{j-1}, \zeta) \leqslant CG_\lambda(x_j, x_j')/G_\lambda(x_{j-1}, x_j') \tag{15}$$

où $C = C(a, b, \nu, \lambda, \lambda_1)$ est une constante indépendante de k. D'après (7), (8) le dénominateur dans cette dernière expression est de l'ordre d'une constante (indépendante de k); d'où, avec les inégalités de Harnack:

$$K_\lambda(x_j, \zeta)/K_\lambda(x_{j-1}, \zeta) \leqslant C_0 G_\lambda(x_j, x_{j-1}), \qquad \forall \zeta \in \Sigma_j' \tag{16}$$

En intégrant, on obtient:

$$I_2 \leqslant C_0 G_\lambda(x_j, x_{j-1}) u(x_{j-1}) \tag{17}$$

où $C_0 = C_0(a, b, \nu, \lambda, \lambda_1)$ ne dépend pas de k. D'où, d'après (7):

$$I_2 \leqslant C_k u(x_{j-1}) = C_0 e^{-\beta' k} u(x_{j-1}) \tag{18}$$

Fin de la preuve du théorème 1. En regroupant les deux majorations (14) et (18), on a:

$$u(x_j) \leqslant C_k u(x_{j-1}) + c e^{-\beta j k} = C_k u(x_{j-1}) + c d_k{}^j$$

Par itération, compte tenu de $u(x_0) = 1$, et supposant $c \geqslant 1$, on obtient:

$$\begin{aligned} u(x_j) &\leqslant c(d_k)^j + cC_k(d_k)^{j-1} + cC_k{}^2(d_k)^{j-2} + \cdots + cC_k{}^p(d_k)^{j-p} + \cdots + cC_k{}^j \\ &= c\Big(\sum_{0 \leqslant s \leqslant j} C_k{}^s d_k{}^{j-s}\Big) \end{aligned}$$

et, posant $A = \sup\{C_k, d_k\}$: $u(x_j) \leqslant c(1+j)A^j$.

Or, $d_k = \exp(-\beta k)$ et $C_k = C_0 \exp(-\beta' k) = \exp\{\mathrm{Ln}\,(C_0) - \beta' k\}$; d'où, si $\beta'' = \inf\{\beta, \beta'\}$

$$u(x_j) \leqslant c \exp\{\mathrm{Ln}\,(1+j) - j(\beta'' k - \mathrm{Ln}\, C_0)\} \tag{19}$$

et

$$u(x) \leqslant c' \delta(x) \exp\{-(\beta'' - (\mathrm{Ln}\,(C_0)/k))\delta(x)\}, \qquad x \in M$$

Prenant $k > (\mathrm{Ln}\, C_0)/\beta''$, on obtient l'estimation voulue (11) pour tout choix de α tel que: $\alpha < \beta'' - \{\mathrm{Ln}\,(C_0)/k\}$. Ce qui achève la preuve du théorème 1.

Remarques. On verra plus loin que le meilleur exposant β' dans (7) peut effectivement tendre vers 0 lorsque λ tend vers λ_1; (voir plus bas, avant le lemme 4), il en ira a fortiori de même pour le meilleur exposant α dans (11).

La propriété suivante complète le théorème 1.

THÉORÈME 2. *Si u est une fonction $\mathscr{L}_\lambda$-harmonique $\geqslant 0$ sur M, alors u converge radialement vers zéro σ-presque partout sur S_∞.*

Preuve. On peut supposer $u > 0$. Montrons d'abord que u est un $\mathscr{L}$-potentiel, c'est à dire, puisque u est clairement $\mathscr{L}$-surharmonique ($\mathscr{L}(u) = -\lambda u < 0$), que dans la décomposition de Riesz de u en somme d'un $\mathscr{L}$-potentiel $G(\mu)$ et d'une fonction $\mathscr{L}$-harmonique $h \geqslant 0$, on a $h = 0$. Comme $\mu = \lambda u\, dv$, et que $G(\mu) \neq +\infty$, $G(h)$ est non identique à $+\infty$ (et est donc un $\mathscr{L}$-potentiel).

Or $G(x, y)$ et $h(y)/h(x)$ sont pour $d(x, y) \leqslant 1$ minorés par une constante >0, d'après (8) et les inégalités de Harnack. D'où, puisque M est à géométrie bornée: $G(h)(x) = \int G(x, y)h(y)\, dv(y) \geqslant Ch(x)$, pour $x \in M$ et une constante $C > 0$. Comme un potentiel n'admet pas d'autre minorante harmonique $\geqslant 0$ que 0 $h = 0$ et u est un $\mathscr{L}$-potentiel.

D'après la théorie générale de la frontière de Martin ([9], [12]), le $\mathscr{L}$-potentiel u tend finement vers 0, σ-presque partout sur la sphère S_∞ (dont on sait qu'elle s'identifie à la frontière de Martin, [1]). Comme u en tant que $\mathscr{L} + \lambda I$ solution vérifie localement des inégalités de Harnack le raisonnement classique de [1], § 4, permet de passer des limites fines à des limites non tangentielles (et en particulier radiales). Ce qui achève de prouver le théorème.

Remarques. 1. Les inégalités (7) et (13′) montrent que les fonctions λ-propres positives $K_\lambda(\cdot, \zeta)$, ($\zeta \in S_\infty$, $0 < \lambda < \lambda_1$) sont non bornées.

2. L'énoncé précédent est indépendant du théorème 1. Si on utilise le théorème 1, on obtient une propriété plus précise:

THÉORÈME 2′. *Si $0 < \lambda < \lambda_1$, si $\varphi_\lambda(x) = \int K_\lambda(x, \zeta)\, d\sigma(\zeta)$, et si u est >0 $\mathscr{L}_\lambda$-harmonique, alors u/φ_λ est borné sur la demi-géodésique $\overline{0\zeta}$, pour σ-presque tout $\zeta \in S_\infty$. En particulier, pour tout $\alpha < \inf(\beta, \beta')$, on a $u(x) \leqslant C_\zeta \exp(-\alpha\delta(x))$, sur $\overline{0\zeta}$ pour σ-presque tout $\zeta \in S_\infty$, (avec $0 < C_\zeta < \infty$). Si v est $\mathscr{L}_\mu$-harmonique >0 sur M, pour $\mu > \lambda$, alors v/φ_λ tend radialement vers 0, σ-presque partout sur S_∞.*

On sait en effet que u/φ_λ admet une limite fine *finie* en σ-presque tout $\zeta \in S_\infty$ ([9], [12]). Les inégalités de Harnack montrent ensuite comme dans [1] que l'existence d'une limite fine (pour la $\mathscr{L}_\lambda$-théorie) entraîne celle d'une limite radiale et même d'une limite "non-tangentielle". Pour la deuxième assertion, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 2 pour voir que v est nécessairement un $\mathscr{L}_\lambda$-potentiel, et conclure de la même manière.

En particulier $u_\lambda = o(u_{\lambda'})$, sur σ-presque toute géodésique $\overline{0\zeta}$, si $\lambda < \lambda'$.

2. Précision de l'allure à l'infini pour $\mathscr{L} = \Delta$

On établit dans ce paragraphe une estimation des quotients des fonctions de Green sur M, relatives à un même pôle et à deux niveaux λ, λ', pour le cas $\mathscr{L} = \Delta$; ce qui précisera un peu l'allure à l'infini des fonctions propres construites au paragraphe précédent. On remarquera que les théorèmes de comparaison standard avec les fonctions de Green analogues de $H_n(-a^2)$ et $H_n(-b^2)$ ne disent rien d'intéressant sur ces quotients en général.

On notera $\lambda_0 = \{(n-1)b/2\}^2$ la première valeur propre de $H_n(-b^2)$. Le théorème suivant est pour l'essentiel dû à Yau [13]; la borne $\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}$ pour le cas particulier considéré ici résulte d'un examen attentif de la méthode de Yau. (Le cas $\lambda = 0$ est d'ailleurs explicitement mentionné dans [13]).

THÉORÈME 3. *Soit u une fonction propre positive au niveau $\lambda \leqslant \lambda_1$ sur la variété M. On a, sur M:* $(|\nabla u|/u) \leqslant \sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda)}$.

Rappelons pour la commodité du lecteur la méthode de Yau: on introduit la fonction $f(x) = (u/|\nabla u|)$ qui est continue à valeurs dans $]0, +\infty]$. D'après le principe du minimum de Yau [13] (dont on voit facilement qu'il est applicable à f), il existe une suite x_k de points de M, tels que: (i) $f(x_k)$ tend vers $\alpha = \inf\{f(x); x \in M\}$, (ii) $\nabla f(x_k)$ tend vers 0 et (iii) $\liminf \Delta f(x_k) \geqslant 0$.

En utilisant (ii), on obtient les équivalents suivants (le long de $\{x_k\}$):

$$|\nabla(|\mathrm{grad}\,(u)|^2)| \sim 2\,|\nabla u|^3/u \quad \text{et} \quad u < \nabla u,\ \nabla(|\nabla u|^2) > \sim 2\,|\nabla u|^4$$

D'autre part, d'après la formule de Bochner–Lichnerowicz et la relation

$$\Delta u + \lambda u = 0: \qquad (\Delta f)\,|\nabla u|^5 \leqslant (\tfrac{3}{4})u\,|\nabla(|\nabla(u)|^2)|^2$$
$$- |\nabla u|^2\{u\,\|D^2(u)\|^2 + \langle \nabla u,\ \nabla(|(u)|^2)\rangle\} + b^2(n-1)\,|\nabla u|^4.$$

(en tenant compte de la minoration de la courbure de Ricci). Cette relation combinée aux équivalents précédents donne au point x_k:

$$\Delta f \leqslant (1 + \varepsilon_k)(|\nabla u|/u) + b^2(n-1)(u/|\nabla u|) - u\,\|D^2 u\|^2\,|\nabla u|^{-3}$$

où $\lim \varepsilon_k = 0$. On détermine enfin une minoration de $\|D^2 u\|$: utilisant un repère $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adapté en $m = x_k$, avec X_1 parallèle à ∇u en m, et notant indiciellement les dérivations correspondantes, on a, en modifiant légèrement

[13]:

$$\sum_{i\geq 2} u_{ii}^2 \geq (1/(n-1))\Big(\sum_{i\geq 2} u_{ii}\Big)^2 = (1/(n-1))(\Delta u - u_{11})^2 = (1/(n-1))(\lambda u + u_{11})^2$$

On peut encore estimer u_{11} en $m = x_k$, à l'aide de (ii), en tenant compte de $u_1 = |\nabla u|$ et $u_i = 0$ si $i \neq 1$; on obtient $u_{11} \sim \{(|\nabla u|^2)/u\}$. D'où,

$$\sum_{i\geq 1} u_{ii}^2 \geq \{(1 + 1/(n-1))u^{-2}\,|\nabla u|^4 + 2(\lambda/(n-1))\,|\nabla u|^2 + (\lambda^2/(n-1))u^2\}(1+\varepsilon_k)\}$$

avec une nouvelle suite ε_k tendant vers 0. Revenant alors à la majoration de Δf, on obtient, d'après (iii), en faisant tendre k vers $+\infty$, $\alpha > 0$ et:

$$0 \leq -(1/\alpha(n-1)) + \{b^2(n-1) - 2\lambda/(n-1)\}\alpha - (\lambda^2/(n-1))\alpha^3$$

soit, si $\beta = 1/\alpha$: $\beta^4 - (b^2(n-1)^2 - 2\lambda)\beta^2 + \lambda^2 \leq 0$. Par conséquent:

$$\beta^2 \leq (\tfrac{1}{2})\{b^2(n-1)^2 - 2\lambda + \sqrt{(b^4(n-1)^4 - 4\lambda b^2(n-1)^2)}\}$$

ou

$$\beta^2 \leq [(b(n-1)/2) + \sqrt{\{b^2(n-1)^2/4) - \lambda\}}]^2$$

et le théorème est établi.

L'énoncé suivant s'étend aux opérateurs elliptiques considérés dans [1]; remarquons aussi que cet énoncé tombe en défaut si on autorise la valeur $a = 0$.

PROPOSITION 1. *On peut associer à chaque $\varepsilon > 0$ un nombre $r = R(\varepsilon, a, b, \lambda, \lambda_1)$, $r > 2$, tel que pour toute solution positive u de $\Delta u + \lambda u = 0$ $(\lambda < \lambda_1)$ sur la boule $B(m, r)$ de M, il existe une fonction v λ-propre et positive sur M tout entier vérifiant $|u - v| \leq \varepsilon$ sur $B(m, 1)$.*

Preuve. Désignons par r' un réel >2 fixé, qui sera déterminé ultérieurement en fonction de $\varepsilon > 0$. Soit, en supposant $r > 2r'$, $u' = \inf\{s; s\Delta + \lambda I$-surharmonique ≥ 0 sur $B(m, r)$, $s \geq u$ sur $B(m, r')\}$). u'est un $\Delta + \lambda I$ potentiel sur $B(m, r)$ porté par $\partial B(m, r')$ et égal à u sur $B(m, r')$. En particulier, $u' = G_0\mu$ pour une mesure μ portée par $\partial B(m, r')$, G_0 désignant la fonction de Green de la boule $B(m, r)$ au niveau λ. Notons G la fonction de Green de même niveau pour M tout entier. D'après le lemme 1 plus bas, on a $(1-\varepsilon)G \leq G_0 \leq G$ sur $\partial B(P, r') \times B(P, 2)$ si r est assez grand (r' étant fixé). Par conséquent, $w = G\mu$

est un $\Delta + \lambda I$ potentiel sur M, porté par $\partial B(P, r')$ et tel que: $(1-\varepsilon)w \leqslant u \leqslant w$ sur $B(0, 2)$.

Reste à approcher w par une fonction $\Delta + \lambda I$-harmonique >0 sur M: il suffit en fait d'approcher chaque poteniel ponctuel G_x, $x \in \partial B(P, r')$: notons $q = G_x/G(x, P)$ et K_ξ la $\Delta + \lambda I$-minimale normalisée en P, associée au point ξ extrêmité de la demi-géodésique issue de P et traversant x. Prenant un cône de sommet x, d'ouverture $\pi/4$ et d'axe $\overline{xP}$, on a, en utilisant le lemme 2, et pour r' assez grand ($r' \geqslant R(\varepsilon, a, b, \lambda, \lambda_1)$):

$$(1-\varepsilon)K_\xi \leqslant q \leqslant (1+\varepsilon)K_\xi \text{ sur } B(P, 1)$$

En intégrant par rapport à $v = G(P, \cdot)\mu$, et en notant $v = \int K_\xi \, dv(\xi)$, on a

$$(1-\varepsilon)v \leqslant w \leqslant (1+\varepsilon)v \text{ sur } B(P, 1)$$

et la proposition est établie.

LEMME 1. *Avec les notations précédentes, on a, pour r' fixé et r assez grand ($r \geqslant R(a, b, \varepsilon, r', \lambda, \lambda_1)$):*

$$\forall x, y \in B(m, r') \qquad 0 < G(x, y) - G_0(x, y) \leqslant \varepsilon G(x, y)$$

Observons que $w: y \to (G(x, y) - G_0(x, y))$ est λ-harmonique >0 sur $B(m, r)$, majorée par $G(x, y)$ pour $y \in \partial B(m, r)$. Introduisons λ', $\lambda < \lambda' < \lambda_1$, la fonction de Green g de niveau λ' et pôle x sur M, et utilisons l'estimée (6'); on obtient

$$w(y) \leqslant c \exp(-\beta r/2) g(y)$$

pour $y \in \partial B(m, r)$ et a fortiori, d'après le principe du maximum pour tous les y de $B(m, r)$; d'autre part (r' étant fixé) il existe une constante $c > 0$ telle que g soit majorée sur $B(m, 2r')$ par $c'G(x, \cdot)$; de sorte que $w(y) \leqslant cc' \exp(-\beta r/2) G(x, y)$ sur cette boule, et le lemme s'ensuit.

Pour le lemme suivant, on peut se placer dans les hypothèses du §1.

LEMME 2. *Soient γ une demi-geodesique issue de $0 = \gamma(0)$, Γ le cône geodesique de sommet 0, direction $\gamma'(0)$ et angle au sommet θ, $0 < \theta < \pi$ et pour m entier $\geqslant 1$, Γ_m le cône analogue de sommet $A_m = \gamma(m)$ et direction $\gamma'(m)$. Alors, pour tout $\lambda < \lambda_1$, et tout couple u, v de fonctions $\mathscr{L}_\lambda$-harmoniques >0 sur Γ, nulles*

à l'infini au sens de $\mathscr{L}_\lambda$ ([1]), *on a sur* Γ_m:

$$u(x) \leqslant (1 + C\beta^m)(u(A_m)/v(A_m))v(x)$$

(*où* $C = C(a, b, \nu, \lambda, \lambda_1, \theta) > 0$, *et* $0 < \beta < 1$, $\beta = \beta(a, b, \nu, \lambda, \lambda_1, \theta) > 0$).

Cet énoncé est une conséquence standard du principe de Harnack à la frontière (voir par exemple la preuve du theorème 6.2 de [3]). On sait ([1]) qu'il existe une constante $c = c(a, b, \nu, \lambda, \lambda_1) > 0$ telle que:

$$(1 + c)^{-1}\{f(A_k)/g(A_k)\}g(x) \leqslant f(x) \leqslant (1 + c)\{f(A_k)/g(A_k)\}g(x) \qquad (*)$$

sur Γ_k, pour f et g $\mathscr{L}_\lambda$-harmoniques $\geqslant 0$ sur Γ_{k-1}, nulles a l'infini au sens de $\mathscr{L}_\lambda$. Utilisant (*), on voit aussi que pour $x, y \in \Gamma_k$:

$$f(x) \leqslant (1 + c)^2\{f(y)/g(y)\}g(x). \qquad (*)'$$

Soient alors u et v comme dans l'énoncé; pour s entier $\geqslant 1$, notons γ_s la meilleure constante $\geqslant 0$ telle que pour tout $x, y \in \Gamma_s$

$$(1 + \gamma_s)^{-1}\{u(x)/u(y)\} \leqslant v(x)/v(y) \leqslant (1 + \gamma_s)\{u(x)/u(y)\}$$

Or, puisque pour $y \in \Gamma_{s+1}$, $x \to (1 + \gamma_s)\{u(x)/u(y)\} - \{v(x)/v(y)\}$ est $\mathscr{L}_\lambda$-harmonique >0 sur Γ_s, on a d'après (*)' (avec le même y et $k = s + 1$):

$$(1 + \gamma_s)\{u(x)/u(y)\} - \{v(x)/v(y)\} \geqslant \gamma_s c'\{u(x)/u(y)\} \qquad c' = (1 + c)^{-2}$$

pour $x, y \in \Gamma_{s+1}$. D'où $\{v(x)/v(y)\} \leqslant (1 + \gamma_s(1 - c'))\{u(x)/u(y)\}$.

Ce qui montre que $\gamma_{s+1} \leqslant \gamma_s(1 - c')$, et finalement $\gamma_s \leqslant \gamma_1(1 - c')^{s-1}$.

Le théorème 3 et la proposition 1 conduisent tout naturellement à une estimation de la constante de l'inégalité de Harnack infinitésimale "locale" de Cheng-Yau ([13], [8]) pour les grandes boules de M.

PROPOSITION 2. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $\lambda < \lambda_1$, *il existe* $R = R_0(\varepsilon, a, b, \lambda, \lambda_1) > 0$ *tel que pour toute fonction* u, $\Delta + \lambda I$*-harmonique positive sur une boule* $B(P, R)$ *de* M, *on ait*

$$|\nabla u(P)| \leqslant (\varepsilon + \sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda)})u(P)$$

Preuve. On peut supposer $u(P) = 1$. Soit $\delta \in]0, 1[$; d'après la proposition 1, si $R \geqslant R(\delta, a, b, \lambda, \lambda_1)$ il existe v, λ-propre et >0 sur M, telle que $|u - v| < \delta\, u$

sur $B(P, 1)$. Appliquant l'inégalité de Cheng-Yau ([8]) pour u et $v-(1-\delta)u$ (qui sont positives sur $B(P, 1)$), on a:

$$\begin{aligned}|\nabla v(P)-\nabla u(P)| &\leq |\nabla v(P)-(1-\delta)\nabla u(P)|+\delta\,|\nabla u(P)| \\ &\leq C\{(v(P)-(1-\delta)u(P))+\delta u(P)\}\end{aligned}$$

et $|\nabla v(P)-\nabla u(P)| \leq 3C\delta u(P)$, avec $C=C(n, b, \lambda)$. On conclut alors grâce au théorème 3.

En particulier, on a une estimation optimale pour la fonction de Green:

COROLLAIRE 1. *Soient $\lambda<\lambda_1$, V la fonction de Green de M au niveau λ et de pôle P et soit $\varepsilon>0$. Pour $R \geq R_0(\varepsilon, a, b, \lambda, \lambda_1)$ on a:*

$$|\nabla V|/V \leq \varepsilon+\sqrt{\lambda_0}+\sqrt{(\lambda_0-\lambda)} \quad \textit{sur } M\backslash B(P, R)$$

Il est possible qu'on puisse améliorer l'estimation suivante en y remplaçant γ par $\gamma'=\sqrt{(\lambda_0-\lambda)}-\sqrt{(\lambda_0-\lambda')}$; mais nous ne sommes pas parvenu à établir (ou à mettre en défaut) cette propriété.

THÉORÈME 4. *Soient λ, λ' tels que $\lambda<\lambda'<\lambda_1$. Posons $4e=(n-1)^2(b-a)^2+4(n-1)(b-a)\sqrt{(\lambda_0-\lambda')}$, $\mu=\lambda-e$, $\mu'=\lambda'-e$, et $\gamma=\sqrt{(\lambda_0-\mu)}-\sqrt{(\lambda_0-\mu')}$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C=C(\varepsilon, a, b, \lambda, \lambda', \lambda_1)$ tel que pour tout $x, y \in M$:*

$$G_\lambda(x, y) \leq C \exp(-(\gamma-\varepsilon)\, d(x, y)) \quad G_{\lambda'}(x, y)$$

En particulier $\gamma \geq (\lambda'-\lambda)/[2\sqrt{(\lambda_0-\mu)}]$ et, si $\lambda'>0$, $e \leq 3(n-1)^2(b-a)b/4$.

Preuve. Fixons le point $x=P$, et notons p, π les fonctions de Green de pôles P de niveaux respectifs λ et λ'. La fonction $u=p/\pi$ vérifie l'équation

$$\Delta u+2\pi^{-1}\nabla\pi\nabla u+(\lambda-\lambda')u=0 \quad \text{sur } M\backslash\{P\} \tag{*}$$

Soient s et σ les fonctions de Green analogues pour les niveaux $\mu-\varepsilon$ et $\mu'-\varepsilon$ sur l'espace hyperbolique $N=H_n(-b^2)$, et le pôle 0. En utilisant les applications exponentielles en 0 et P, et une isométrie quelconque de N_0 sur M_p, on peut considérer $v=s/\sigma$ comme une fonction sur M; v est alors fonction décroissante de $r=d(P, x)$ et vérifie (puisque $\lambda-\lambda'=\mu-\mu'$):

$$v''(r)+\{(n-1)b \coth(br)+2\sigma'(r)/\sigma(r)\}v'(r)+(\lambda-\lambda')v(r)=0$$

Or, pour r assez grand, on a

$$\Delta v + 2\pi^{-1}\nabla\pi\nabla v + (\lambda' - \lambda)v$$
$$= v''(r) + (\Delta r + 2\pi^{-1}\langle\nabla\pi, \nabla r\rangle)v'(r) + (\lambda - \lambda')v(r) \leqslant 0$$

En effet, à l'infini $|\sigma'(r)|/\sigma(r) \sim \sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \mu' + \varepsilon)}$, $\Delta r \geqslant (n-1)$ $\operatorname{acoth}(ar) \sim (n-1)a$, et d'après le corollaire 3: $\pi^{-1}|\langle\nabla\pi, \nabla r\rangle| \leqslant \sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda' + \varepsilon')}$ pour r assez grand (dépendant de ε'). Il reste à constater que le choix de e assure que:

$$(n-1)a - 2(\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \lambda' + \varepsilon')}) + \varepsilon' \geqslant (n-1)b - 2(\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{(\lambda_0 - \mu' + \varepsilon)})$$

pour r assez grand et $\varepsilon' < \varepsilon$.

v est donc surharmonique >0 sur M relativement à (*) pour $r > R$ et, ce qui revient au même, πv est λ-surharmonique sur $\{x; d(x, P) > R)\}$. Comme $p \leqslant C\pi v$ sur $\partial B(P, 2R)$ (pour une constante $C > 0$), cette inégalité se prolonge à $M \backslash B(P, 2R)$, d'après le principe du maximum de R. M. Hervé ([10], p. 429). D'où l'assertion.

Remarque. Comme chaque $G_{\lambda'}$ est borné à l'infini, l'estimation précedente donne une majoration de chaque G_λ. Mais si on connait λ_1 (et surtout pour λ voisin de λ_1) la méthode de Cheeger–Gromov–Taylor [7] conduit à un bien meilleur resultat, à savoir:

$$G_\lambda(x, y) \leqslant C \exp(-\{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda - \varepsilon)}\}\, d(x, y))$$

Il semble malheureusement difficile d'adapter la méthode de ces auteurs au problème de l'estimation des quotients de fonctions de Green.

Application à l'estimation de α dans le théorème 1 (pour $\mathscr{L} = \Delta$): d'après [7], on peut poser $\beta' = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda - \varepsilon)}$ et (d'après le théorème 4):

$$\beta = b((n-1)/2)\{\sqrt{[1 + 3(1 - a/b)]} - \sqrt{[1 + 3(1 - a/b) - (4\lambda/b^2(n-1)^2)]}\}$$

en particulier

$$\beta \geqslant \beta_1 = \lambda b^{-1}(n-1)^{-1}(1 + 3(1 - a/b))^{1/2}$$

D'après la preuve du théorème 1, tout $\alpha < \min\{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda)}, \beta)$ convient.

3. Un exemple de variété sans fonction de Green au niveau λ_1

Il s'agit de la fonction de Green relative à $\Delta + \lambda_1 I$, $\lambda_1 =$ première valeur propre du Laplacien Δ sur M. On prendra pour M le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'une métrique de la forme $ds^2 = dr^2 + g^2(r)\, d\theta^2$ en coordonnées polaires r, θ usuelles, avec une fonction g: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ à préciser.

Fixons a, b, b' réels tels que $0 < a < b' < b$; choisissons ensuite $r_0 > 0$ assez grand pour que toute boule ouverte $B = B(x, r_0)$ de l'espace hyperbolique $H_2(-a^2)$ admette une première valeur propre $\lambda_1(B)$ strictement inférieure à $b'^2/4 = \lambda_1(H_2(-b'^2))$; c'est possible puisque $\lambda_1(B)$ ne dépend que de r_0 et tend vers $a^2/4$ lorsque r_0 tend vers $+\infty$.

Posons $g_0(r) = sh(b'r)/b'$, pour $r \geqslant 0$ (g_0 correspond à $M = H_2(-b'^2)$). Introduisons aussi une fonction g_1 de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de la forme suivante:

$$g_1(r) = sh(ar)/a \quad \text{si} \quad r \leqslant r_1, \qquad g_1(r) = g_0(r) \quad \text{pour} \quad r > r_2,$$

et

$$\{sh(ar)/a\} \leqslant g_1(r) \leqslant g_0(r) \quad \text{pour} \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2$$

où r_1 et r_2 sont des réels tels que $r_0 < r_1 < r_2$. On impose aussi la condition:

$$a^2 \leqslant (\partial^2 g_1)/g_1 \leqslant b^2$$

L'existence d'une telle fonction g_1, (pour r_2 assez grand, r_1 étant fixé) est élémentaire. On prendra g dans la famille:

$$g_t(r) = (1-t)g_0(r) + tg_1(r) \quad \text{pour} \quad r \geqslant 0,$$

t étant un paramètre réel compris entre 0 et 1. Remarquons que quel que soit le choix de t, M sera à courbure partout comprise entre $-a^2$ et $-b^2$, et telle que le complémentaire de la boule $B(0, r_2)$ soit isométrique au complémentaire dans $H_2(-b'^2)$ de toute boule de même rayon; M contient donc des boules de $H_2(-b'^2)$ de rayon arbitrairement grand (mais non centrées en 0). Par conséquent $\lambda_1(M) \leqslant b'^2/4$. Pour $t = 1$, M est telle que la boule $B(0, r_1)$ est isométrique à toute boule de même rayon dans $H_2(-a^2)$, et $\lambda_1(M) < b'^2/4$.

Soit $\lambda_1(g_s)$ la première valeur propre de $\mathbb{R}^2$ pour la métrique $ds^2 = dr^2 + g_s^2(r)\, d\theta^2$, et soit $t = \sup\{s \in [0, 1]; \lambda_1(g_s) = b'^2/4\} = \sup\{s \in [0, 1];\ \lambda_1(g_s) \geqslant b'^2/4\}$.

On a $\lambda_1(g_t) = b'^2/4$, la première valeur propre étant une fonction s.c.s de la

métrique en général; en particulier $t<1$. Supposons qu'il existe une fonction de Green pour $\Delta_t+(b'^2/4)I$, ($\Delta_t=$ Laplace Beltrami correspondant à g_t); fixons une fonction test φ positive sur M, égale à 1 sur $B(0, r_2)$; on peut alors trouver $u>0$ sur M, telle que $\Delta_t u+(b'^2/4)u=-\varphi$ (u est d'ailleurs de classe C^∞); or, si ε est >0 assez petit on aura encore:

$$\Delta_{t+\varepsilon}u+(b'^2/4)u\leqslant 0$$

puisque Δ_s ne dépend pas de s hors de $B(0, r_2)$. Comme l'égalité (partout sur M) est exclue, on voit qu'il existe sur M une fonction >0 et $\{\Delta_{t+\varepsilon}+(b'^2/4)I\}$-surharmonique, non harmonique. D'où $\lambda_1(g_{t+\varepsilon})\geqslant b'^2/4$, en contradiction avec la définition de t. Il n'y a donc pas de fonction de Green sur M au niveau $\lambda_1(M)$.

4. Exemples où les λ_1-fonctions propres ne s'annulent pas à l'infini

On va d'abord construire un exemple sans fonction de Green au niveau λ_1. Fixons a, b, b', r_0, r_1, r_2 comme dans la section précédente. Considérons l'espace hyperbolique $M_0=H_2(-b'^2)$, muni de sa métrique h_0, prenons dans M_0 une géodésique γ, de vitesse unitaire, issue d'un point de référence $0=\gamma(0)$, et sur γ des points $x_k=\gamma(4kr_2)$, $k\in\mathbb{Z}$. Modifions la métrique h_0 exactement comme dans la section précédente, à l'aide des fonctions g_s, $0\leqslant s\leqslant 1$, mais en opérant maintenant dans chacune des boules $B_k=B(x_k, r_2)$, à partir de son centre pris comme point de référence, de manière à obtenir des métriques h_s égales à h_0 sur les rayons issus de x_k dans chaque boule B_k, et sur $M\backslash\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}B_k$, et de courbure constante $-a^2$ sur les boules $B(x_k, r_1)$. On peut de plus supposer les h_s invariantes par l'isométrie directe T de M_0 qui laisse γ invariante et amène x_0 sur x_1 (et donc x_k sur x_{k+1} et B_k sur B_{k+1} pour $k\in\mathbb{Z}$). Comme h_s est sur chaque B_k invariante par les symétries de M_0 laissant fixe x_k, h_s est globalement invariante par la symétrie σ de M_0 qui permutte x_0 et x_1. Toutes ces métriques sont à courbures pincées entre $-a^2$ et $-b^2$ et de premières valeurs propres $\lambda_1(h_s)$ majorées par $b'^2/4$ (avec égalité si $s=0$). De plus, on vérifie facilement que $s\to\lambda_1(h_s)$ est continue sur $[0,1]$ en observant que pour tout $\varepsilon>0$, on a $h_s\leqslant(1+\varepsilon)h_{s'}$, si $|s'-s|$ est suffisamment petit; il suffit ensuite d'utiliser la définition de $\lambda_1(h_s)$.

Soit b'' un réel, $b''<b'$, tel que $(b''^2/4)$ soit strictement supérieur à la première valeur propre d'une boule de $H_2(-a^2)$ de rayon r_0. On a donc $\lambda_1(h_1)<b''^2/4$. Soient $t=\sup\{s\in[0, 1];\ \lambda_1(h_s)\geqslant b''^2/4\}$, $h=h_t$ et $M=\mathbb{R}^2$ muni de h.

Il est clair que $\lambda_1(M)=\lambda_1(h_t)=b''^2/4$. On va voir que M n'admet pas de

fonction de Green au niveau λ_1 à l'aide du lemme suivant:

LEMME 3. *Soit G la fonction de Green de $\Delta + \lambda I$ sur M (pour un $\lambda \leqslant b''^2/4$); G admet une décroissance exponentielle sur γ au sens qu'il existe deux réels strictement positifs C et α tels que*:

$$\forall k, k' \in \mathbb{Z}, \qquad k \neq k' \qquad G(x_k, x_{k'}) \leqslant Ce^{-\alpha|k-k'|}$$

Soient Γ la géodésique médiatrice du segment géodésique $\overline{x_0x_1}$ et Γ_1 une demi-géodésique issue de x_1 et perpendiculaire à $\overline{x_0x_2}$. Soit C_0 un cône (dans M) de sommet x_1, de direction Γ_1 et d'angle au sommet suffisamment petit pour que C_0 ne rencontre pas Γ. C_0 est aussi un cône dans M_0. On a, par raison de symétrie $G_{x_0} = G_{x_1}$ sur Γ; avec le principe du maximum ([10], p. 429), on en déduit que $G_{x_0} < G_{x_1}$ sur ω la composante de $M \backslash \Gamma$ contenant x_1; Appliquant le principe de Harnack à l'infini aux fonctions λ-harmoniques positives G_{x_0} et $(G_{x_1} - G_{x_0})$, sur le cône tronqué $C' = C_0 \backslash B_1$ de M_0 (noter que le niveau λ est strictement plus petit que $\lambda_1(h_0)$), on obtient

$$G_{x_1} - G_{x_0} \geqslant cG_{x_1} \quad \text{sur } \Gamma_1 \backslash B(x_1, 2r_1)$$

pour une certaine constante $c > 0$. Quitte à diminuer c, cette estimation a lieu sur Γ_1 tout entière, et, de même sur Γ_1' la demi-géodésique opposée. On a donc à l'aide du principe du maximum:

$$G_{x_0} \leqslant (1-\delta)G_{x_1}, \qquad \delta > 0$$

sur ω_1 la région délimitée par $\Gamma_1'' = \Gamma_1 \cup \Gamma_1'$ et contenant x_2; en particulier

$$G(x_0, x_k) \leqslant (1-\delta)G(x_1, x_k) \quad \text{pour tout } t \geqslant 1$$

Utilisant l'invariance de G par l'action de T, on en déduit par itération:

$$\forall p \geqslant 1, k \in \mathbb{Z}, G(x_k, x_{k+p}) \leqslant (1-\delta)^p G(x_k, x_{k+1}) \Rightarrow G(x_k, x_{k+p}) \leqslant c(1-\delta)^p$$

ce qui achève d'établir le lemme.

COROLLAIRE 2. *M n'admet pas de fonction de Green au niveau $\lambda_1(M) = b''^2/4$.*

Supposons l'existence de la fonction de Green G de M au niveau $\lambda_1(M)$; soit φ une fonction test $\geqslant 0$ sur M à support dans $B(x_0, 2r_2)$, égale à 1 sur B_0 et soit

$\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi \circ T^k$; le lemme précédent montre que le potentiel de Green $\pi = G\psi$ n'est pas identique à l'infini (la série $\sum_{k\neq 0} \max_{B_k}\{G_{x_0}\}$ étant convergente). C'est donc une fonction C^∞, invariante par T, qui vérifie:

$$\Delta_t \pi + (b''^2/4)\pi = -\psi \quad (\Delta_t = \text{Laplace–Beltrami de } h_t)$$

Si $\varepsilon > 0$ est assez petit on aura encore $\Delta_{t+\varepsilon}\pi + (b''^2/4)\pi \leq 0$ (et $\not\equiv 0$), puisqu'il suffit de vérifier cette inégalité sur la boule B_0. L'existence d'une sursolution >0 (qui n'est pas solution) pour le niveau $b''^2/4$ entraîne que $\lambda_1(g_{t+\varepsilon}) \leq b''^2/4$ ce qui contredit la définition de t.

CONSÉQUENCE 1. Une fonction u, propre au niveau λ_1 et positive sur M ne peut tendre vers zéro à l'infini que si elle est nulle.

Comme il n'y a pas de fonction de Green G_{λ_1}, les fonctions λ_1-propres >0 sont deux à deux proportionnelles; donc si u est >0, on doit avoir $u \circ T = cu$, et $u \circ \sigma = u$. La suite $\{u(x_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est donc constante >0; d'où l'assertion.

CONSÉQUENCE 2. Complétons la remarque après le théorème 1, en montrant que pour tout $\delta > 0$, on a si $\lambda < \lambda_0$ est assez voisin de λ_0: $G_\lambda(x_0, x_k) > Ce^{-\delta k}$, pour tout $k > 0$, et une constante $C = C_\lambda > 0$.

Pour cela, observons d'abord que pour $\lambda \to \lambda_1$, $y \notin \{x_1, x_0\}$, $G_\lambda(x, y)/G_\lambda(x_1, y)$ tend vers $u(x)$ l'unique fonction λ_1-harmonique sur M, normalisée en x_1. Comme $u(x_1) = u(x_0)$, on voit que $\lim_{\lambda\to\lambda_1}(G_\lambda(x_0, y)/G_\lambda(x_1, y)) = 1$ uniformément sur tout compact de M ne contenant pas x_0 ou x_1.

Soit alors Γ' la géodésique médiatrice du segment géodésique x_1x_2; fixons un cône C d'axe Γ', de sommet sur γ, et d'angle assez petit pour que C ne rencontre aucune boule B_k et fixons $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 2 et les remarques précédentes, on aura pour λ suffisamment proche de λ_1:

$$(1-\varepsilon)G_\lambda(x_1, x) \leq G_\lambda(x_0, x) \leq (1+\varepsilon)G_\lambda(x_1, x) \tag{20}$$

pour x sur $\Gamma' \cap C$ et assez loin (en fonction de ε) du sommet de C. Utilisant encore les remarques précédentes et la symétrie autour de γ, on voit que (20) est vérifiée sur Γ' tout entier dès que $\lambda_1 - \lambda$ est >0 assez petit. Mais alors, d'après le principe du maximum:

$$G_\lambda(x_0, x_k) \geq (1-\varepsilon)G_\lambda(x_1, x_k) \quad \text{pour } k = 2, 3, \ldots$$

et en itérant (compte tenu de l'invariance par T):

$$G_\lambda(x_0, x_k) \geqslant (1-\varepsilon)^{k-1} G_\lambda(x_{k-1}, x_k) = G_\lambda(x_0, x_1)(1-\varepsilon)^{k-1} = c_\lambda(1-\varepsilon)^{k-1}$$

C'est ce qu'on cherchait à établir.

CONSÉQUENCE 3. Voyons enfin comment en modifiant la métrique h de M sur une boule on peut obtenir une variété M', admettant une fonction de Green G_λ au niveau $\lambda = \lambda_1(h)$, mais telle que $G_\lambda(x, \cdot)$ ne tende pas vers 0 à l'infini ($\forall x \in M'$)—et *a fortiori* telle que toute fonction λ-propre >0 ne tende pas vers zéro à l'infini.

Fixons une boule fermée $B \subset M \backslash (\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k)$ et une fonction φ de classe C^∞ sur M, égale à 1 hors de B et telle que $0 < \varphi \leqslant 1$, $\varphi \not\equiv 1$ sur M; soit h' la métrique (conforme à h), $h' = \varphi^2 h$. On peut choisir φ assez voisine (au sens C^2) de 1 sur B pour que la courbure de h' soit encore pincée entre $-a^2$ et $-b^2$.

Soit M' la variété Riemannienne obtenue en munissant $\mathbb{R}^2$ de la métrique h'; son opérateur de Laplace–Beltrami est $\Delta' = \varphi^{-2}\Delta$, Δ désignant celui de M. Si u est l'une des fonctions propres >0 de M au niveau $\lambda = \lambda_1(M)(= -b''^2/4)$ on a: $\Delta u + \lambda u = 0$, donc $\Delta' u \leqslant \Delta u < 0$ et $\Delta' u + \lambda u \leqslant 0$, $\Delta' u + \lambda u$ non identiquement nul. Ce qui entraîne que $\lambda_1(M') \geqslant \lambda$ et plus précisément que M' admet une fonction de Green G' au niveau λ. Le lemme suivant montre que G'_x ne tend pas vers 0 à l'infini (ce qui entraîne en particulier que $\lambda = \lambda_1(M')$ et achèvera de prouver notre assertion).

LEMME 4. *Soient G'' la fonction de Green de $M \backslash B = M' \backslash B$ au niveau $\lambda = \lambda_1(M)$, u une fonction λ-propre >0 sur M, et $x \in M \backslash B$. Il existe une constante $c = c_x > 0$, telle que $G''_x \geqslant cu$ au voisinage de l'infini.*

Comme il existe sur M une $\Delta + \lambda I$ solution continue et strictement positive, on sait qu'on peut résoudre le problème de Dirichlet (correspondant à cet opérateur) dans tout ouvert borné de M à frontière régulière. Soit B' la boule ouverte de M concentrique à B et de rayon double, et soit w la solution du problème:

$$\Delta w + \lambda w = 0 \quad \text{sur } B' \backslash B$$

$$w = 0 \quad \text{sur } \partial B, \qquad w = u \quad \text{sur } \partial B'$$

Notons enfin v la fonction continue sur $M \backslash B$ égale à w sur $B' \backslash B$ et à u sur $M \backslash B'$. Il est clair que v est une fonction $\Delta + \lambda I$-surharmonique sur $M \backslash B$; en fait v est

même un $\mathscr{L}'$-potentiel ($\mathscr{L}' = \Delta' + \lambda I$) sur $M \backslash B$, c'est à dire que 0 est la seule minorante $\mathscr{L}'$-harmonique $\geqslant 0$ de v sur $M \backslash B$; en effet, une telle minorante prolongée par 0 sur B, devient une fonction $\mathscr{L}'$-sous-harmonique u' sur M, et $u - u'$ serait $\mathscr{L}'$-surharmonique (et non $\mathscr{L}'$-harmonique) sur M ce qui est impossible puisque par construction M n'admet pas de fonction de Green au niveau λ.

Soit alors $c > 0$ suffisamment petit pour que $G''_x \geqslant c\ v$ sur $\partial B'$. D'après le principe du maximum de R. M. Hervé [10], v étant un $\mathscr{L}'$-potentiel, on a $G''_x \geqslant c\ v$ sur $M \backslash B$ et par conséquent $G''_x \geqslant c\ u$ hors de B'. CQFD.

5. Remarques sur la théorie de S. J. Patterson

On se propose dans cette partie d'indiquer une généralisation très partielle des résultats de Patterson ([11]) concernant les liens entre fonctions propres et ensembles limites des groupes Fuchsiens sur l'espace hyperbolique. Soit Γ un groupe d'isométries de M non réduit à $\{I\}$, opérant librement et proprement sur M et soit N la variété riemannienne M/Γ. Notons $L \subset S_\infty$ l'ensemble limite de Γ, ν_1 la première valeur propre de N, et λ_1 celle de M. On a, a priori, $\nu_1 \leqslant \lambda_1$ mais pour pouvoir utiliser les inégalités de Harnack à l'infini au niveau ν_1, *on supposera désormais que* $\nu_1 < \lambda_1$. On notera $g(x, y)$ le noyau de Green de M au niveau ν_1 et $K_\zeta(x)$ le noyau de Poisson de M au niveau ν_1, normalisé en $0 \in M$.

On a alors les propriétés suivantes:

THÉORÈME 5. a) *Il existe une mesure de probabilité μ sur L telle que la fonction*

$$u(x) = \int K_\zeta(x)\, d\mu(\zeta), \qquad x \in M,$$

soit Γ-automorphe sur M et $\Delta + \nu_1 I$-harmonique > 0 sur M.

b) *Si Γ admet un domaine fondamental $U \subset M$ tel que $\bar{U} \cap L = \varnothing$, u est l'unique fonction sur M ayant ces deux propriétés et telle que $u(0) = 1$. De plus, la série $\sum_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma(0), y)$ diverge pour tout $y \in M$, et, si $L \neq S_\infty$, ν_1 est > 0.*

(Dans le cas Fuchsien, $\nu_1 > 0$ est dû à Beardon, voir [11]). L'extension des méthodes de Patterson se fait grâce à la proposition suivante:

PROPOSITION 3. *Soient $\mu \in]0, \lambda_1[$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha(\varepsilon, \mu, M) > 0$ tel que*

pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda' \leqslant \mu$, *et* $|\lambda - \lambda'| \leqslant \alpha$ *on ait*:

$$G_\lambda(x, y) \geqslant \exp(-\varepsilon d(x, y)) G_{\lambda'}(x, y), \qquad (x, y \in M \text{ et } d(x, y) \geqslant 1)$$

Remarquons d'abord le lemme suivant:

LEMME 5. *Si* $R > 0$, $\varepsilon > 0$ *sont fixés, il existe* $\delta = \delta(\varepsilon, R, \mu, M) > 0$, *tel que pour* $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda' \leqslant \mu$, *et* $|\lambda - \lambda'| \leqslant \delta$, *on ait*; $\forall\, x, y \in M$, $1 \leqslant d(x, y) \leqslant R$, $G_\lambda(x, y) \geqslant (1 - \varepsilon) G_{\lambda'}(x, y)$.

Le lemme découle de l'équation résolvante $G_{\lambda'} = G_\lambda + (\lambda' - \lambda) G_\lambda G_{\lambda'}$, et des estimations suivantes, où λ'' est un réel fixé avec $\mu < \lambda'' < \lambda_1$:

$$G_\lambda G_{\lambda'}(x, y) \leqslant G_\lambda G_{\lambda''}(x, y) \leqslant C G_{\lambda''}(x, y), \qquad (C = (\lambda'' - \mu)^{-1})$$

et

$$c_1 \leqslant G_t(x, y) \leqslant c_2 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant d(x, y) \leqslant R, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \lambda''.$$

Preuve de la proposition 3. Soient $\{y_n\}$ une suite de points sur une demi-géodésique issue de x telle que $d(x, y_n) = n$.

D'après le lemme 2, on voit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ (dépendant de ε) tel que pour $n > k$, $0 \leqslant t \leqslant \mu$:

$$\begin{aligned}(1 + \varepsilon) G_t(y_{n-k}, y_n)/G_t(y_{n-k}, y_{n+1}) &\leqslant G_t(x, y_n)/G_t(x, y_{n+1}) \\ &\leqslant (1 + \varepsilon) G_t(y_{n-k}, y_n)/G_t(y_{n-k}, y_{n+1})\end{aligned}$$

Utilisant les niveaux $t = \lambda$ et $t = \lambda'$, on obtient:

$$G_{\lambda'}(x, y_{n+1})/G_{\lambda'}(x, y_n) \leqslant C(1 + \varepsilon)^2 G_\lambda(x, y_{n+1})/G_\lambda(x, y_n)$$

avec

$$C = \{G_{\lambda'}(y_{n-k}, y_{n+1})/G_{\lambda'}(y_{n-k}, y_n)\}/\{G_\lambda(y_{n-k}, y_{n+1})/G_\lambda(y_{n-k}, y_n)\} \leqslant 1 + \varepsilon$$

si $\lambda' - \lambda$ est suffisamment petit (d'après le lemme 5).

On en déduit, pour $n > k$:

$$G_{\lambda'}(x, y_n) \leqslant c(1 + \varepsilon)^{3(n-k)} G_\lambda(x, y_n)$$

et la proposition 3 s'ensuit sans difficulté. On peut alors établir le lemme (qui imite le lemme 3.1 de [11]):

LEMME 6. *Il existe une fonction croissante* $h:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *tendant vers* $+\infty$ *à l'infini, telle que*:

(1) $\sum_{\gamma\in\Gamma} \exp\{h(d(0, \gamma(0))\} \quad g(\gamma(0), y) = +\infty,\ y \in M$

(2) $\lim_{x\to\infty} h(x+1) - h(x) = 0$

D'après la proposition 3, la série $\sum_{\gamma\in\Gamma}\{\exp[\varepsilon d(0, \gamma(0))]\ g(\gamma(0), y)\}$ est divergente pour tout $\varepsilon > 0$, $y \in M$ (puisque par définition de ν_1, $\sum_{\gamma\in\Gamma} G_\lambda(\gamma(0), y)$ diverge ou converge selon que $\lambda > \nu_1$ ou $\lambda < \nu_1$, $y \notin \Gamma(0)$). Fixant alors une suite ε_i de nombres >0 décroissant vers 0, on choisira sucessivement des rayons R_i croissant vers $+\infty$, $R_{i+1} > R_i$, et on posera $h(t) = \varepsilon_i(t - R_i) + h(R_i)$ pour $R_i < t \leqslant R_{i+1}$. Il suffit de choisir les R_i (successivement) assez grands pour que, x_1 étant fixé dans $M\backslash\Gamma(0)$,

$$\sum_{\{R_i < d(\gamma(0),0) \leqslant R_{i+1}\}} \exp\{h(d(0, \gamma(0))\} g(\gamma(0), x_1) \geqslant 1. \qquad \text{CQFD}$$

Preuve du théorème 5. a) On pose $a_\gamma = \exp(h(d(0, \gamma(0))$ et pour $\lambda < \nu_1$, $x_1 \in M\backslash\Gamma(0)$:

$$u_\lambda = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma G_\lambda(\gamma(0), x), \quad \text{et} \quad v_\lambda = u_\lambda(x)/u_\lambda(x_1) \quad (x \in M)$$

Reprenant les méthodes de [11], on voit sand difficulté que lorsqu'on fait tendre λ vers ν_1, $\lambda < \nu_1$, toute valeur d'adhérence des u_λ est $\Delta + \nu_1 I$-harmonique >0 sur M, Γ-automorphe, et de mesure associée μ portée par Γ. Le caractère automorphe découle de l'équivalence $a_\gamma \simeq a_{\alpha\gamma}$ pour $d(0, \gamma(0)) \to +\infty$ et $\alpha \in \Gamma$ fixé.

b) Si $U \cap L = \varnothing$, comme μ est portée par L, on a d'après les inégalités de Harnack à l'infini de [1], $u(x) \leqslant cg(0, x)$ sur U et a fortiori

$$u(x) \leqslant c \sum_{\gamma\in\Gamma} g(\gamma(0), x) \quad \text{sur } M \text{ tout entier.}$$

La série de $\Delta + \nu_1 I$ potentiels $\sum_{\gamma\in\Gamma} g(\gamma(0), x)$ est minorée par une fonction $\Delta + \nu_1 I$-harmonique >0: elle doit donc être identiquement infinie. (Sinon, elle définirait un potentiel qui, par définition, n'admet pas de minorante harmonique >0). Ce résultat signifie que la variété $N = M/\Gamma$ n'admet pas de fonction de Green au niveau ν_1. On sait que cette propriété entraîne que les fonctions harmoniques >0, au niveau ν_1 sur M sont deux à deux proportionnelles, et on

obtient la propriété d'unicité de u. Enfin, si v_1 était nul, on aurait, d'après l'unicité de u, $u = 1$, ce qui contredit $L \neq S_\infty$.

REFÉRENCES

[1] A. ANCONA, *Negatively curved manifolds, elliptic operators and the Martin boundary,* Ann. of Maths, *125*, (1987), 495–536.

[2] A. ANCONA, *Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique sur un domaine Lipschitzien,* Ann. Inst. Fourier, XVI, *2* (1978), p. 465–467.

[3] M. ANDERSON and R. SCHOEN, *Positive Harmonic functions on complete manifolds of negative curvature,* Ann. of Math., *121* (1985), p. 429–461.

[4] K. BURNS and A. KATOK, *Manifolds of non-positive curvature,* Ergodic Theory of Dynamic System, *5* (1985), 207–317.

[5] I. CHAVEL, *Eigenvalues in Riemannian geometry,* Academic press Inc., (1984).

[6] J. CHEEGER and D. EBIN, *Comparison theorems in differential geometry,* North Holland Publ. Co., Amsterdam, (1975).

[7] J. CHEEGER, M. GROMOV and M. TAYLOR, *Finite propagation speed, Kernel estimates for functions of the Laplace operator and the geometry of complete Riemannian manifolds,* J. Differential Geometry, *17* (1982), p. 15–53.

[8] S. Y. CHENG, and S. T. YAU, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications,* Comm. in Pure and applied math., *28* (1975), 333–354.

[9] K. GOWRISANKARAN, *Fatou–Doob limit theorems in the axiomatic setting of Brelot,* Ann. Inst. Fourier, XVI, *2* (1966), p. 465–467.

[10] R. M. HERVÉ, *Recherches sur la théorie axiomatique des fonctions surharmoniques et du Potentiel,* Ann. Inst. Fourier XII, (1962), p. 415–471.

[11] S. J. PATTERSON, *The limit set of a Fuchsian group.* Acta Math., *136* (1976), p. 241–273.

[12] D. SIBONY, *Theorème de limites fines et problème de Dirichlet,* Ann. Inst. Fourier XVIII, *2* (1968), p. 121–134.

[13] S. T. YAU, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds,* Comm. on Pure and applied Math., *28* (1975) 201–228.

Université Paris Sud, Campus d'Orsay, Bat. 425
91405, ORSAY, Cedex, France

Reçu le 31 mars 1987