Equations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes.

Autor(en): **Loeser, Francois / Sabbah, Claude**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **66 (1991)**

PDF erstellt am: **28.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-50411

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 66 (1991) 458–503 0010–2571/91/030458–46$1.50 + 0.20/0
© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel

Equations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes

FRANÇOIS LOESER ET CLAUDE SABBAH

Résumé. Nous donnons une formule calculant le déterminant d'une matrice dont les éléments sont des intégrales de formes différentielles algébriques multipliées par un produit de polynômes élevés à des puissances complexes. Cette formule fait intervenir le polynôme caractéristique de monodromies associées à la famille de polynômes considérée.

Abstract. We give a formula which computes the determinant of a matrix whose entries are integrals of algebraic differential forms multiplied by a product of complex powers of polynomials. In this formula enters the characteristic polynomial of some monodromies associated with this family of polynomials.

Sommaire

Introduction

1. Systèmes d'équations aux différences finies et transformation de Mellin algébrique **460**
1.1. Systèmes linéaires d'EDF et groupe hypergéométrique 460
1.2. Transformation de Mellin algébrique 465
1.3. Le complexe d'Aomoto 469

2. Déterminant du complexe d'Aomoto associé à un polynôme **474**
2.1 Caractéristique d'Euler des cycles évanescents 474
2.2 Fonction zêta "logarithmique" des monodromies en 0 et ∞ 475
2.3 Le théorème 477
2.4 Première démonstration 478
2.5 Deuxième démonstration 480

3. Déterminant du complexe d'Aomoto dans le cas général **484**
3.1. Fonction zêta associée à plusieurs polynômes 484
3.2. Restriction du complexe d'Aomoto et de son déterminant 488
3.3. Le théorème 489

4. Déterminant d'intégrales de fonctions multiformes **494**
4.1. Solutions des systèmes d'EDF de rang 1 494
4.2. Déterminant d'intégrales 496

Références **502**

Introduction

Dans un article déjà ancien [2], Aomoto s'est intéressé aux intégrales du type suivant:

$$I(s_1, \ldots, s_p) = \int_\gamma f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \omega$$

où $f_1, \ldots, f_p$ sont des polynômes sur $\mathbf{C}^n$, ω est une n-forme algébrique sur $\mathbf{C}^n$ et γ est un n-cycle à coefficients dans un système local dont la monodromie est telle que la fonction I soit uniforme. La remarque essentielle était que ces intégrales sont solution d'un système linéaire holonome d'équations aux différences finies (EDF) par rapport aux variables s. Ce système s'obtient algébriquement (par une généralisation d'un résultat de Bernstein lorsque $p = 1$) comme la cohomologie du complexe (appelé dans la suite *complexe d'Aomoto*)

$$\cdots \to \mathbf{C}(s_1, \ldots, s_p) \otimes_{\mathbf{C}} \Omega^i \xrightarrow{d_s} \mathbf{C}(s_1, \ldots, s_p) \otimes_{\mathbf{C}} \Omega^{i+1} \to \cdots$$

où d_s est $\mathbf{C}(s)$-linéaire et

$$d_s(1 \otimes \omega) = 1 \otimes d\omega + \sum_{i=1}^{p} s_i \otimes \frac{df_i}{f_i} \wedge \omega$$

et l'action des opérateurs de translation τ_i $(i = 1, \ldots, p)$ sur la cohomologie provient de celle sur $\mathbf{C}(s_1, \ldots, s_p)$. De plus, Aomoto a donné des exemples pour lesquels ce complexe n'a qu'un seul groupe de cohomologie, exemples qui seront rappelés au §1.3.

Plus récemment, Varchenko [19] a calculé le déterminant d'une matrice dont les éléments sont de telles intégrales, lorsque $f_1, \ldots, f_p$ sont des formes linéaires affines correspondant à un arrangement d'hyperplans réels ou complexes. Nous nous proposons ici de donner une formule générale pour un tel déterminant, sans condition sur les polynômes f_i. Poursuivant l'idée d'Aomoto, nous remarquons que le déterminant à calculer est solution d'un système d'EDF de rang 1, à savoir le

déterminant de la cohomologie du complexe d'Aomoto. Par ailleurs, les solutions d'un système d'EDF de rang 1 qui satisfont une certaine propriété de croissance à l'infini (vérifiée par le déterminant d'intégrales) peuvent s'écrire sous la forme

$$h(s_1, \ldots, s_p) \cdot \varphi(\exp 2i\pi s_1, \ldots, \exp 2i\pi s_p) \cdot c_1^{s_1} \cdots c_p^{s_p} \cdot \prod_L \prod_\alpha \Gamma(L(s) - \alpha)^{\gamma_{L,\alpha}}$$

avec $c_1, \ldots, c_p \in \mathbf{C}^*$, h et φ sont des fractions rationnelles de leurs arguments, L parcourt un ensemble fini de formes linéaires à coefficients dans $\mathbf{Z}$ premiers entre eux, α un ensemble fini de nombres complexes et $\gamma_{L,\alpha} \in \mathbf{Z}$.

Nous nous proposons ici de calculer les constantes c_i et les exposants $\gamma_{L,\alpha}$ en fonction de la topologie de l'application $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^p$. Il est remarquable que ce déterminant ne dépende que de différentes monodromies locales autour des hypersurfaces $f_i = 0$ et $f_i = \infty$ et pas de monodromies globales. Dans la situation étudiée par Varchenko, cela signifie que les $\gamma_{L,\alpha}$ ont une expression combinatoire en terme de l'arrangement. Signalons enfin que les articles [1] et [18] considèrent des questions analogues en utilisant seulement [8] et pas comme ici la théorie de Bernstein.

1. Systèmes d'équations aux différences finies et transformation de Mellin algébrique

1.1. *Systèmes linéaires d'EDF et groupe hypergéométrique*

1.1.1. Soit $\mathbf{C}[s] = \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]$ l'anneau des polynômes à p variables et $\mathbf{C}(s)$ le corps des fractions rationnelles correspondant. Un *système rationnel holonome d'EDF* est un $\mathbf{C}(s)$-espace vectoriel de dimension finie muni d'automorphismes $\mathbf{C}$-linéaires $\tau_1, \ldots, \tau_p$ qui commutent entre eux et qui satisfont les relations

$$\tau_i \cdot s_j = s_j \cdot \tau_i \qquad \text{si } i \neq j$$

$$\tau_i \cdot s_i = (s_i + 1) \cdot \tau_i \quad \forall i = 1, \ldots, p$$

Soit $\mathfrak{M}(s)$ un tel système (de dimension r) et choisissons une $\mathbf{C}(s)$-base $\mathbf{m}$ de $\mathfrak{M}(s)$. Notons $A_i(s)$ la matrice $r \times r$ de τ_i dans cette base. C'est une matrice à éléments dans $\mathbf{C}(s)$. Les relations $[\tau_i, \tau_j] = 0$ impliquent que les matrices A_i satisfont aux relations

$$A_i(s + \mathbf{1}_j) \cdot A_j(s) = A_j(s + \mathbf{1}_i) \cdot A_i(s)$$

pour tous $i, j = 1, \ldots, p$, où $\mathbf{1}_i$ désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base naturelle de $\mathbf{C}^p$. Le

fait que τ_i soit inversible signifie que A_i est inversible et la matrice de τ_i^{-1} dans la base $\mathbf{m}$ est égale à

$$A_i(s - \mathbf{1}_i)^{-1}.$$

Par ailleurs, après un changement de base de matrice $B(s) \in \mathrm{GL}\,(r, \mathbf{C}(s))$ la matrice de τ_i est $A_i'(s)$ avec

$$A_i'(s) = B(s + \mathbf{1}_i) \cdot A_i(s) \cdot B(s)^{-1}.$$

1.1.2. Si $\mathfrak{M}(s)$ et $\mathfrak{M}'(s)$ sont deux systèmes holonomes d'EDF, il en est de même de $\mathfrak{M}(s) \otimes_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}'(s)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(s)}(\mathfrak{M}(s), \mathfrak{M}'(s))$, ainsi que de

$$\det \mathfrak{M}(s) \overset{\text{déf}}{=} \bigwedge^{r} \mathfrak{M}(s)$$

où $r = \dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(s)$. L'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes de dimension 1 forme un groupe, que nous appellerons *groupe hypergéométrique.*

Exemple. Si $p = 1$, posons $s = s_1, \tau = \tau_1$. Une classe d'isomorphisme de systèmes rationnels holonomes d'EDF est la donnéee de $\varphi \in \mathbf{C}(s)^*$ modulo l'action des changements de base, qui sont de la forme

$$\psi(s) = \frac{h(s+1)}{h(s)} \cdot \varphi(s)$$

avec $h \in \mathbf{C}(s)^*$. Le groupe hypergéométrique est donc égal à $\mathbf{C}(s)^*/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par les changements de base ci-dessus. Un élément du groupe hypergéométrique s'écrit ainsi de manière unique sous la forme

$$c \cdot \prod_{\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}} (s - \alpha)^{\gamma_\alpha}$$

avec $\gamma_\alpha \in \mathbf{Z}$, $\gamma_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini de $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ et de plus $c \in \mathbf{C}^*$. Une autre manière d'exprimer ceci est que les éléments du groupe hypergéométrique sont en correspondance bijective avec les équations satisfaites par les fonctions

$$c^s \cdot \prod_{\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}} \Gamma(s - \alpha)^{\gamma_\alpha}.$$

1.1.3. La structure du groupe hypergéométrique pour $p > 1$ est donnée par la proposition 1.1.4. Le groupe hypergéométrique est obtenu comme suit: soit

$HG(p) \subset (\mathbf{C}(s)^*)^n$ l'ensemble des $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ qui vérifient la condition d'intégrabilité

$$\frac{\varphi_i(s+\mathbf{1}_j)}{\varphi_i(s)} = \frac{\varphi_j(s+\mathbf{1}_i)}{\varphi_j(s)}$$

pour tous $i, j = 1, \ldots, p$, avec la structure de groupe induite par la multiplication terme à terme; soit $\sim$ la relation d'équivalence

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \sim (\psi_1, \ldots, \psi_p)$$

si et seulement si il existe $h \in \mathbf{C}(s)^*$ tel que, pour tout $i = 1, \ldots, p$ on ait

$$\psi_i(s) = \frac{h(s+\mathbf{1}_i)}{h(s)} \cdot \varphi_i(s).$$

Alors le groupe hypergéométrique $\mathscr{H}G(p)$ est le quotient $HG(p)/\sim$.

Soit $\mathscr{L}$ un sous-ensemble de formes linéaires non identiquement nulles sur $\mathbf{Q}^p$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ premiers entre eux tel que pour toute telle forme L, on ait soit $L \in \mathscr{L}$ soit $-L \in \mathscr{L}$. On peut par exemple choisir $\mathscr{L}$ comme suit: $L(s) = \Sigma\, \lambda_i s_i$ est dans $\mathscr{L}$ si et seulement si $\lambda_1 > 0$ si $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 > 0$ si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, etc. Soit $\mathbf{Z}^{[\mathscr{L} \times \mathbf{C}/\mathbf{Z}]}$ l'ensemble des applications $\mathscr{L} \times \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ à support fini, muni de sa structure naturelle de groupe.

PROPOSITION 1.1.4. *Soit $\sigma : \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ une section de la projection $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$. Alors l'application*

$$(\mathbf{C}^*)^p \times \mathbf{Z}^{[\mathscr{L} \times \mathbf{C}/\mathbf{Z}]} \to \mathscr{H}G(p)$$

qui associe à $[(c_1, \ldots, c_p); \gamma]$ la classe d'isomorphisme du système satisfait par

$$c_1^{s_1} \cdots c_p^{s_p} \prod_{L \in \mathscr{L}} \prod_{\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}} \Gamma(L(s) - \sigma(\alpha))^{\gamma_{L,\alpha}}$$

ne dépend pas de la section σ choisie et est un isomorphisme de groupes.

Remarques.

(1) Nous écrirons par la suite $\Gamma(L(s) - \alpha)$ si aucune confusion n'est à craindre, sous-entendant le choix d'une section. De plus, nous noterons

$$\mathrm{EDF}\left(c_1^{s_1} \cdots c_p^{s_p} \prod_{L \in \mathscr{L}} \prod_{\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}} \Gamma(L(s) - \alpha)^{\gamma_{L,\alpha}}\right)$$

la classe d'isomorphisme du système d'EDF satisfait par la fonction considérée.

(2) Ce résultat semble être connu de K. Aomoto qui l'attribue à M. Sato (*cf.* [2] où le groupe hypergéométrique apparait comme $H^1(\mathbf{Z}^p, \mathbf{C}(s_1, \ldots, s_p)))$. Faute de référence nous en donnons ci-dessous la démonstration, élémentaire au demeurant.

Démonstration de la proposition 1.1.4. L'indépendance vis à vis de σ est immédiate (il s'agit essentiellement de montrer que les systèmes satisfaits par $\Gamma(L(s) - \beta)$ et $\Gamma(L(s) - \beta + 1)$ pour $\beta \in \mathbf{C}$ sont équivalents).

LEMME 1.1.5. *Soit* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in HG(p)$. *Il existe* $(\psi_1, \ldots, \psi_p) \in HG(p)$ *équivalent à* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ *tel que pour tout* $i = 1, \ldots, p$, ψ_i *est un produit de la forme*

$$c_i \cdot \prod_{L \in \mathscr{L}} \prod_{\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}} \prod_{\lambda \in \mathbf{Z}} (L(s) - \alpha + \lambda)^{n_i(L, \alpha, \lambda)}$$

où $c_i \in \mathbf{C}^*$ *et* $n_i(L, \alpha, \lambda) \in \mathbf{Z}$ *est nul sauf sur un ensemble fini.*

Démonstration. Dans la suite, nous supposons que p est ≥ 2. Soit $P(s)$ un polynôme irréductible et pour tout $i = 1, \ldots, p$ notons

$$\prod_{\sigma \in \mathbf{Z}^p} P(s + \sigma)^{n_i(P, \sigma)}$$

les composantes translatées entières de P qui interviennent dans φ_i, avec $n_i(P, \sigma) \in \mathbf{Z}$. Cette écriture est unique si P n'est invariant (à une constante multiplicative près) par aucune translation entière de $\mathbf{C}^p$. Commençons par traiter ce cas pour simplifier. La relation d'intégrabilité se traduit par

$$n_i(P, \sigma - \mathbf{1}_j) - n_i(P, \sigma) = n_j(P, \sigma - \mathbf{1}_i) - n_j(P, \sigma) \overset{\text{déf}}{=} n_{ij}(\sigma)$$

pour tous $i, j = 1, \ldots, p$ et on cherche à écrire le produit sous la forme $h(s + \mathbf{1}_i)/h(s)$, autrement dit on cherche une fonction $m(\sigma)$ (exposant de $P(s + \sigma)$ dans h) à support fini sur $\mathbf{Z}^p$, à valeurs dans $\mathbf{Z}$ telle que pour $i = 1, \ldots, p$ on ait

$$m(\sigma - \mathbf{1}_i) - m(\sigma) = n_i(P, \sigma).$$

Une telle fonction, si elle existe, est unique et est donnée par la formule

$$m(\sigma) = -\sum_{k \geq 0} n_i(P, \sigma - k\mathbf{1}_i).$$

Nous devons vérifier que

1. $m(\sigma)$ ne dépend pas de i
2. $m(\sigma)$ est à support fini.

Pour $i \neq j$ on peut écrire

$$m(\sigma) = \sum_{l \geq 0} \sum_{k \geq 0} n_{i,j}(\sigma - k\mathbf{1}_i - l\mathbf{1}_j)$$

et la somme est finie puisque $n_{i,j}$ est à support fini. Par suite $m(\sigma)$ ne dépend pas de i.

Pour voir que $m(\sigma)$ est à support fini, il suffit de vérifier que $m(\sigma) = 0$ dès que σ_i est assez grand ou assez petit. Le deuxième cas ne pose pas de problème puisque n_i est à support fini. Pour le premier cas, il s'agit de vérifier que

$$-\sum_{k \in \mathbf{Z}} n_i(P, \sigma - k\mathbf{1}_i) = 0$$

pour la même raison. Mais du fait de la relation d'intégrabilité on a pour $i \neq j$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} n_i(P, \sigma - k\mathbf{1}_i) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} n_i(P, \sigma - \mathbf{1}_j - k\mathbf{1}_i)$$

et pour $\sigma_j \ll 0$ on a $n_i(P, \sigma) = 0$. Par suite, en itérant suffisamment la procédé, tous les termes dans la somme sont nuls.

Plus généralement, soit $C \in \mathbf{C}^p$ une hypersurface irréductible d'équation $P = 0$ et soit $\mathsf{R} \in \mathbf{Z}^p$ le plus grand sous-réseau stabilisant C. Alors C est aussi stable par $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathsf{R}$ et plus précisément C est l'image inverse par la projection $\pi : \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^p / \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathsf{R} = \mathbf{C}^q$ d'une hypersurface C'. Si $q = 1$ nous sommes dans la situation du lemme. Considérons donc le cas où $q \geq 2$. Soit s' un système de coordonnées sur $\mathbf{C}^q$ et soit $Q(s')$ une équation réduite de C'. On doit avoir, si

$$\prod_{\sigma' \in \pi(\mathbf{Z}^p)} Q(s' + \sigma')^{n_i(Q, \sigma')}$$

est la contribution des translatés entiers de C à φ_i, la relation

$$n_i(Q, \sigma' - \pi(\mathbf{1}_j)) - n_i(Q, \sigma') = n_j(Q, \sigma' - \pi(\mathbf{1}_i)) - n_j(Q, \sigma') \overset{\text{déf}}{=} n_{i,j}(\sigma')$$

pour tous i, j. On cherche une fonction $m(\sigma')$ comme plus haut, qu'on obtient d'une manière analogue, lorsque $q \geq 2$. □

Revenons à la preuve de la proposition 1.1.4. Soit donc $L \in \mathscr{L}$, $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ et considérons la contribution des translatés entiers de l'hyperplan $L(s) - \alpha$ à φ_i sous la forme

$$\prod_{\lambda \in \mathbf{Z}} (L(s) - \alpha + \lambda)^{n_i(\lambda)}$$

où $n_i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ est à support fini et vérifie pour tout $\lambda \in \mathbf{Z}$

$$n_i(\lambda - \lambda_j) - n_i(\lambda) = n_j(\lambda - \lambda_i) - n_j(\lambda) \overset{\text{déf}}{=} n_{i,j}(\lambda)$$

pour tous i, j, en posant $L(s) = \Sigma_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot s_i$. En particulier, si $\lambda_i = 0$ on a $n_i \equiv 0$. Posons

$$m_{L,\alpha,i}(\lambda) = \begin{cases} -\Sigma_{k \geq 0} n_i(\lambda - k\lambda_i) & \text{si } \lambda_i > 0 \\ \Sigma_{k \geq 1} n_i(\lambda + k\lambda_i) & \text{si } \lambda_i < 0 \\ 0 & \text{si } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

En exprimant comme plus haut $m_{L,\alpha,i}(\lambda)$ en fonction de $n_{i,j}$ on vérifie que $m_{L,\alpha,i}$ ne dépend pas de i et que $m_{L,\alpha}(\lambda) = 0$ pour $\lambda \ll 0$. De plus, on peut, à équivalence près, supprimer les termes faisant intervenir L et α dans $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ si et seulement si $m_{L,\alpha}(\lambda) = 0$ pour $\lambda \gg 0$ (*i.e.* si $m_{L,\alpha}$ est à support fini).

En conclusion, écrivons $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ sous la forme

$$\varphi_i = c_i \cdot \prod_{L \in \mathscr{L}} \prod_{\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}} \prod_{\lambda \in \mathbf{Z}} (L(s) - \alpha + \lambda)^{n_i(L,\alpha,\lambda)}.$$

Alors $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est équivalent à l'image par l'application de la proposition de

$$[(c_1, \ldots, c_p); (m_{L,\alpha}(+\infty))_{L \in \mathscr{L}, \alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}}]$$

où $m_{L,\alpha}(+\infty)$ désigne la valeur asymptotique de $m_{L,\alpha}(\lambda)$. De plus l'argument ci-dessus montre aussi que cette application est injective. □

1.2. *Transformation de Mellin algébrique*

Soit $T^p \simeq (\mathbf{C}^*)^p$ le tore complexe de dimension p et soit $\mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\,\partial_t \rangle$ l'algèbre des opérateurs différentiels algébriques sur T^p, où $t = (t_1, \ldots, t_p)$ et $t\,\partial_t = (t_1\,\partial_{t_1}, \ldots, t_p\,\partial_{t_p})$. La correspondance $\tau_i = t_i$ et $s_i = -t_i\,\partial_{t_i}$ identifie cette algèbre à l'algèbre $\mathbf{C}[s]\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$ des opérateurs aux différences finies, c'est à dire

l'algèbre quotient de l'algèbre libre engendrée par $\mathbf{C}[s]$ et $\mathbf{C}[\tau, \tau^{-1}]$ par les relations introduites au §1.1.1.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{T^p}$-module holonome (à gauche), $\mathcal{M}(T^p)$ le $\mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\,\partial_t\rangle$-module des sections globales de $\mathcal{M}$ (ici, $\mathcal{D}_{T^p}$ désigne le faisceau des opérateurs différentiels algébriques sur T^p). Nous appellerons *transformé de Mellin algébrique de* $\mathcal{M}$, noté $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$, le module $\mathcal{M}(T^p)$ vu comme $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ module. Nous dirons que $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$ est un système algébrique *holonome* d'équations aux différences finies si $\mathcal{M}$ est $\mathcal{D}_{T^p}$-holonome. Le lien avec la notion introduite au §1.1.1 est précisé par le théorème suivant.

THÉORÈME 1.2.1.

1. *Soit* $\mathfrak{M}$ *un système algébrique holonome d'EDF. Alors*

$$\mathfrak{M}(s) \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{M}$$

est un système rationnel holonome d'EDF.

2. *Inversement, si* $\mathfrak{M}(s)$ *est un système rationnel holonome d'EDF, pour tout sous-*$\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$*-module* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}(s)$ *tel que* $\mathfrak{M}(s) = \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{M}$ *il existe un système algébrique holonome* $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ *tel que* $\mathfrak{M}(s) = \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{M}'$.

Démonstration de la première partie du théorème 1.2.1. Soit $\mathfrak{M}$ un système algébrique holonome d'EDF. On peut écrire $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{M})$ avec $\mathcal{M}$ $\mathcal{D}_{T^p}$-holonome. Oublions un instant la correspondance introduite ci-dessus et considérons le module $\mathcal{M}(s)t^s$, où $s = (s_1, \ldots, s_p)$ sont des nouvelles variables, $t^s = t_1^{s_1} \cdots t_p^{s_p}$; soit $T^p_{\mathbf{C}(s)} = \operatorname{Spec} \mathbf{C}(s)[t, t^{-1}]$ et soit $\mathbf{C}(s)[t, t^{-1}]\langle t\,\partial_t\rangle$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur ce tore. Alors $\mathcal{M}(s)t^s$ est un $\mathcal{D}_{T^p}$-module dont les sections globales sur $T^p_{\mathbf{C}(s)}$ sont égales à $\mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{M}(T^p)$ et l'action de $t\,\partial_t$ est donnée par

$$t_i\,\partial_{t_i} \cdot (\varphi(s) \otimes m) = s_i\varphi(s) \otimes m + \varphi(s) \otimes (t_i\,\partial_{t_i} \cdot m).$$

De manière analogue à [4], on vérifie que $\mathcal{M}(s)t^s$ est $\mathcal{D}_{T^p_{\mathbf{C}(s)}}$-holonome. Soit $\pi : T^p_{\mathbf{C}(s)} \to \operatorname{Spec} \mathbf{C}(s)$ l'application constante. Il résulte de [4] (*voir* aussi [6]) que les groupes de cohomologie de l'image directe $\pi_+\mathcal{M}(s)t^s$ sont de dimension finie sur $\mathbf{C}(s)$ (nous prenons ici les notations de [6] pour les foncteurs sur les $\mathcal{D}$-modules algébriques). Par ailleurs, le module $\mathcal{M}(s)t^s$ est aussi muni d'une action d'opérateurs de translation τ_i $(i = 1, \ldots, p)$:

$$\tau_i \cdot (\varphi(s) \otimes m) = \varphi(s + \mathbf{1}_i) \otimes t_i m.$$

De plus, cette action commute à celle de $\mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\,\partial_t\rangle$. Ainsi, les groupes de

cohomologie du complexe $\pi_+ \mathscr{M}(s)t^s$ sont munis d'une structure de $\mathbf{C}(s)\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-module à gauche, et par suite sont des systèmes rationnels holonomes d'EDF. La première partie de 1.2.1 résulte alors du lemme ci-dessous.

LEMME 1.2.2. *Pour tout $i \neq 0$ on a $H^i\pi_+ \mathscr{M}(s)t^s = 0$ et*

$$H^0\pi_+ \mathscr{M}(s)t^s = \mathfrak{M}(\mathscr{M})(s).$$

On décompose π en projections le long des axes de coordonnées. On est ainsi ramené par récurrence à montrer le résultat pour la projection ϖ sur les $p-1$ premières coordonnées:

$$\varpi : T^p_{\mathbf{C}(s)} \to T^{p-1}_{\mathbf{C}(s)}.$$

Le complexe des sections globales sur $T^{p-1}_{\mathbf{C}(s)}$ de $\varpi_+ \mathscr{M}(s)t^s$ est représenté par le complexe de de Rham algébrique du module holonome $\mathscr{M}(s)t^s$ relativement à ϖ, autrement dit c'est le complexe

$$0 \to \mathscr{M}(T^p)(s)t^s \xrightarrow{\partial_{t_p}} \mathscr{M}(T^p)(s)t^s \to 0$$

où le terme de droite (correspondant à Ω^1) est placé en degré 0. Ce complexe est quasi-isomorphe au complexe

$$0 \to \mathscr{M}(T^p)(s)t^s \xrightarrow{t_p\partial_{t_p}} \mathscr{M}(T^p)(s)t^s \to 0$$

puisque t_p agit de manière inversible, et ce dernier complexe peut se réécrire sous la forme

$$0 \to \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{M}(T^p) \xrightarrow{t_p\partial_{t_p} + s_p} \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{M}(T^p) \to 0.$$

Notons $s' = (s_1, \ldots, s_{p-1})$. L'application $\mathbf{C}(s')$-linéaire

$$t_p\partial_{t_p} + s_p : \mathbf{C}(s')[s_p] \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{M}(T^p) \to \mathbf{C}(s')[s_p] \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{M}(T^p)$$

est injective (immédiat) donc elle le reste après tensorisation par $\mathbf{C}(s_p)$. Par suite, $\mathscr{H}^{-1}\varpi_+ \mathscr{M}(s)t^s = 0$. De plus, l'application

$$\mathbf{C}(s')[s_p] \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{M}(T^p) \to \mathscr{M}(T^p)(s')t'^{s'}$$

$$\Sigma_{i \geq 0} s_p^i \otimes m_i \mapsto \Sigma_{i \geq 0}(-t_p\partial_{t_p})^i \cdot m_i$$

induit un isomorphisme de Coker $(t_p \partial_{t_p} + s_p)$ avec $\mathcal{M}(T^{p-1})(s')t'^{s'}$, par lequel la multiplication par s_p sur Coker $(t_p \partial_{t_p} + s_p)$ correspond à l'action de $-t_p\partial_{t_p}$ sur $\mathcal{M}(T^{p-1})(s')t'^{s'}$ et l'action de τ_p à la multiplication par t_p. On en déduit le lemme par platitude de $\mathbf{C}(s_p)$ sur $\mathbf{C}[s_p]$. □

NOTE. Ce calcul est analogue à celui du transformé de Fourier d'un $\mathcal{D}$-module holonome.

Démonstration de la deuxième partie du théorème 1.2.1. Soit $\mathfrak{M}(s)$ un système rationnel holonome d'EDF. Par définition, c'est un $\mathbf{C}(s)\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-module à gauche de type fini qui est aussi de dimension finie sur $\mathbf{C}(s)$. Soit $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}(s)$ un $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-module de type fini tel que l'on ait

$$\mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(s)$$

et soit $\mathcal{M}$ le $\mathcal{D}_{T^p}$-module cohérent correspondant. On sait qu'il existe un plus grand sous-$\mathcal{D}_{T^p}$-module holonome $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ (*voir* [12], [5]). Soit $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ le système d'EDF correspondant. Nous allons montrer que l'on a $\mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}(s)$, c'est à dire que $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}'$ est de $\mathbf{C}[s]$-torsion. Quitte à travailler avec le quotient de $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}'$ par sa $\mathbf{C}[s]$-torsion (qui est un sous-$\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-module de type fini), nous pouvons supposer que $\mathfrak{M}' = \{0\}$. Alors toutes les composantes de la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ dans l'espace cotangent au tore T^p sont de dimension $\geq p+1$ et donc aucune n'est lagrangienne. La démonstration procède comme suit: puisque le fibré cotangent T^*T^p est trivial, nous pouvons considérer la projection $T^*T^p \to T^*_{\mathbf{1}}T^p$, où $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$. Nous montrons qu'il existe un ouvert de Zariski dense U de $T^*_{\mathbf{1}}T^p$ au-dessus duquel la variété Car $\mathcal{M}$ est de dimension pure p ou vide, donc vide dans l'hypothèse où nous sommes. Nous en déduisons qu'après une localisation convenable de $\mathbf{C}[s]$ on a $\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}} = \{0\}$, d'où $\mathfrak{M} = \{0\}$ puisque $\mathfrak{M}$ n'a pas de $\mathbf{C}[s]$-torsion, ce qui donne le résultat voulu.

Soit $\mathbf{m}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{M}$ qui engendre $\mathfrak{M}$ sur $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ et $\mathfrak{M}(s)$ sur $\mathbf{C}(s)$. Soit $\mathfrak{N}$ le $\mathbf{C}[s]$-module engendré par $\mathbf{m}$. D'une part un localisé convenable de $\mathfrak{N}$ est libre sur l'anneau des polynômes localisé de la même manière. D'autre part, le localisé de $\mathfrak{N}$ en tous les translatés entiers des dénominateurs des matrices de τ_i $(i = 1, \ldots, p)$ dans la famille $\mathbf{m}$ est égal à celui de $\mathfrak{M}$. Donc si $\mathbf{C}[s]_{\mathrm{loc}}$ désigne l'anneau localisé correspondant, $\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}$ est libre de type fini sur $\mathbf{C}[s]_{\mathrm{loc}}$. Nous allons procéder de même avec une bonne filtration F.

Soit $F\mathbf{C}[s[$ (*resp.* $F\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$) la filtration croissante par le degré total en s et

$$\mathcal{R}_F\mathbf{C}[s] \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} F_k\mathbf{C}[s] \cdot u^k \quad \textit{resp.} \quad \mathcal{R}_F\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} F_k\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle \cdot u^k$$

l'anneau de Rees associé, qui est un sous-anneau de $\mathbf{C}[s, u, u^{-1}]$ (*resp.* $\mathbf{C}[s, u, u^{-1}]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$), où u est une nouvelle variable. Si l'on pose $s'_i = us_i$ pour tout $i = 1, \ldots, p$, on a $\mathscr{R}_F\mathbf{C}[s] \simeq \mathbf{C}[s', u]$ et $\mathrm{gr}^F\,\mathbf{C}[s] \simeq \mathbf{C}[s']$. De même, l'anneau $\mathscr{R}_F\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ est isomorphe à l'anneau $\mathbf{C}[s', u]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ où l'on a la relation $\tau_i s_i = (s_i + u)\tau_i$.

Soit $F\mathfrak{M}$ (*resp.* $F\mathfrak{N}$) la bonne filtration engendrée par $\mathbf{m}$, c'est à dire

$$F_k\mathfrak{M} = F_k\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle \cdot \mathbf{m}$$

(et de même pour $\mathfrak{N}$). Alors

$$\mathscr{R}_F\mathfrak{N} \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} F_k\mathfrak{N} \cdot u^k$$

est de type fini sur $\mathscr{R}_F\mathbf{C}[s]$ et sans $\mathbf{C}[u]$-torsion (puisque contenu dans $\mathbf{C}[u, u^{-1}] \otimes_{\mathbf{C}} \mathfrak{N}$), donc $\mathbf{C}[u]$-plat. Il existe donc $Q \in \mathbf{C}[s', u]$ tel que $Q(s', 0) \not\equiv 0$ et tel que après inversion de Q le module $\mathscr{R}_F\mathfrak{N}[Q^{-1}]$ soit libre sur $\mathbf{C}[s', u][Q^{-1}]$.

Soit par ailleurs $P(s) \in \mathbf{C}[s]$ un dénominateur commun aux éléments des matrices de τ_i $(i = 1, \ldots, p)$ dans la famille $\mathbf{m}$. Si l'on inverse de plus tous les polynômes $P(s' + u\sigma)$ avec $\sigma \in \mathbf{Z}^p$, on voit comme plus haut que sur l'anneau localisé correspondant $\mathbf{C}[s', u]_{\mathrm{loc}}$ on a

$$(\mathscr{R}_F\mathfrak{M})_{\mathrm{loc}} = (\mathscr{R}_F\mathfrak{N})_{\mathrm{loc}}$$

donc $(\mathscr{R}_F\mathfrak{M})_{\mathrm{loc}}$ est libre de type fini sur $\mathbf{C}[s', u]_{\mathrm{loc}}$.

Puisque $\mathrm{gr}^F\mathfrak{M} = \mathscr{R}_F\mathfrak{M}/u\mathscr{R}_F\mathfrak{M}$, on en déduit que si $\mathbf{C}[s]_{\mathrm{loc}}$ désigne le localisé hors de $Q(s', 0) = 0$ et $P(s') = 0$, le module $(\mathrm{gr}^F\mathfrak{M})_{\mathrm{loc}}$ est libre de type fini sur $\mathbf{C}[s]_{\mathrm{loc}}$, donc $\mathrm{Car}\,\mathscr{M}$ est de dimension pure p sur l'ouvert de Zariski correspondant. L'hypothèse faite sur $\mathfrak{M}$ implique que $(\mathrm{gr}^F\mathfrak{M})_{\mathrm{loc}} = \{0\}$. Puisque $(\mathscr{R}_F\mathfrak{M})_{\mathrm{loc}}$ est libre de type fini sur $\mathbf{C}[s', u]_{\mathrm{loc}}$, on a aussi $(\mathscr{R}_F\mathfrak{M})_{\mathrm{loc}} = \{0\}$ et par restriction à $u = 1$ on a $\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}} = \{0\}$ (car $\mathfrak{M} = \mathscr{R}_F\mathfrak{M}/(u-1)\mathscr{R}_F\mathfrak{M}$). □

1.3. *Le complexe d'Aomoto*

1.3.1. Soit X une variété algébrique lisse et propre sur $\mathbf{C}$, $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert affine et

$$f = (f_1, \ldots, f_p) : X \to (\mathbf{P}^1)^p$$

une application algébrique sur X. Nous supposerons que $U \subset f^{-1}(T^p)$, où $T^p = (\mathbf{C}^*)^p \subset (\mathbf{P}^1)^p$ est le tore $(\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\})^p$. Soit $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs

différentiels algébriques sur X, $\mathscr{D}_U$ sa restriction à U et soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_U$-module holonome. Posons $\mathscr{D}_U(s) = \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{D}_U$, où $s = (s_1, \ldots, s_p)$ sont de nouvelles variables et soit $\mathscr{M}(s)f^s$ le $\mathscr{D}_U(s)$-module obtenu par torsion par f^s (*voir* §1.2). C'est un $\mathscr{D}_U(s)$-module holonome et le théorème de Bernstein affirme que l'image directe $j_+(\mathscr{M}(s)f^s)$ est $\mathscr{D}_X(s)$-holonome. Soit p l'application constante de $U \times \operatorname{Spec} \mathbf{C}(s)$ sur le point $\operatorname{Spec} \mathbf{C}(s)$. On déduit du théorème de Bernstein (*voir loc. cit.*) que $p_+ \mathscr{M}(s)f^s$ est un complexe à cohomologie de dimension finie sur $\mathbf{C}(s)$. Puisque U est affine, ce complexe est quasi-isomorphe au complexe des sections sur U du complexe de de Rham algébrique (décalé de dim X):

$$\Gamma(U, \Omega^{\bullet}_U \otimes_{\mathscr{O}(U)} \mathscr{M}(s)f^s[\dim X]) \tag{1.3.2}$$

Si par exemple $\mathscr{M} = \mathscr{O}_U$, le complexe $\Omega^{\bullet}_U \otimes_{\mathscr{O}(U)} \mathscr{M}(s)f^s$ n'est autre que le complexe $\mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}} \Omega^{\bullet}_U$ dont la différentielle d_s est donnée par la formule

$$d_s(\varphi(s) \otimes \omega) = \varphi(s) \otimes d\omega + \sum_{i=1}^{p} s_i \varphi(s) \otimes \frac{df_i}{f_i} \wedge \omega.$$

Le $\mathscr{D}_U(s)$-module $\mathscr{M}(s)f^s$ est muni d'opérateurs de translation inversibles τ_i définis comme suit:

$$\tau_i \cdot [\varphi(s)mf^s] = \varphi(s + \mathbf{1}_i)(f_i m)f^s.$$

Ces opérateurs s'étendent de manière naturelle à chaque terme du complexe (1.3.2) et commutent à la différentielle d_s. On en déduit qu'ils agissent aussi sur la cohomologie.

Le *complexe d'Aomoto* $p_+ \mathscr{M}(s)f^s$ sera noté dans la suite $\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})(s)$. Si $X = (\mathbf{P}^1)^p$, $U = T^p$ et f est l'identité, on a $\mathscr{A}_{t_1,\ldots,t_p}(\mathscr{M})(s) = \mathfrak{M}(\mathscr{M})(s)$. En général, soit $f_+ \mathscr{M}$ le complexe de Gauss-Manin du $\mathscr{D}_U$-module $\mathscr{M}$. La propriété de composition des images directes (*voir* par exemple [6]) montre que l'on a un quasi-isomorphisme dans la catégorie dérivée des complexes de $\mathbf{C}(s)\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$-modules à gauche:

$$\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})(s) \simeq \mathscr{A}_{t_1,\ldots,t_p}(f_+ \mathscr{M})(s). \tag{1.3.3}$$

Il suffit en effet de vérifier que l'on a

$$(f_+ \mathscr{M})(s)t^s = f_+(\mathscr{M}(s)f^s)$$

ce qui est immédiat. □

Nous appellerons aussi complexe d'Aomoto le complexe $\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M}) = p_+\mathscr{M}[s]f^s$ qui est à cohomologie de type fini sur $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ et pour lequel on peut appliquer les mêmes raisonnements que ci-dessus.

1.3.4. *Déterminant.* Nous avons défini au §1.1.2 le déterminant d'un système rationnel holonome d'EDF ainsi que la classe de celui-ci dans le groupe hypergéométrique $\mathscr{H}G(p)$. On associe de même au complexe d'Aomoto un déterminant par la formule

$$\det \mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})(s) = \prod_i [\det H^i(\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})(s))]^{(-1)^i}$$

qui est tout autant un élément du groupe hypergéométrique.

1.3.5. *Singularités isolées.* Dans les exemples ci-dessous (repris pour l'essentiel de [2], où cependant certaines hypothèses ne sont pas très claires), nous montrons que le complexe d'Aomoto n'a qu'un seul groupe de cohomologie non nul. Les calculs sont en fait topologiques et reposent sur le théorème de comparaison pour les $\mathscr{D}$-modules holonomes réguliers ([8, 15]). Commençons donc par remarquer les faits suivants:

1. Supposons que pour tout α assez général dans $\mathbf{C}^p$, si $i_\alpha : \{\alpha\} \hookrightarrow \mathbf{C}^p$ désigne l'inclusion, la restriction du complexe d'Aomoto $\mathbf{L}i_\alpha^*\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})$ n'ait de cohomologie qu'en degré d. Alors il en est de même de la restriction au point générique $\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})(s)$.

   En effet, comme on a déjà vu lors de la preuve de 1.2.1, il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[s]$ tel que, après localisation en tous les translatés entiers de P, le complexe $\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})_{\mathrm{loc}}$ soit à cohomologie libre sur $\mathbf{C}[s]_{\mathrm{loc}}$. Par suite, si α n'annule pas un translaté entier de P, un groupe de cohomologie de $\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})_{\mathrm{loc}}$ est nul si et seulement si sa restriction à α l'est.
2. Supposons que $j_+\mathscr{M}$ soit régulier sur X. Alors le complexe d'Aomoto $\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})(s)$ n'a de cohomologie qu'en un seul degré d si et seulement si

   $$H^i(U, DR(\mathscr{M}) \otimes f^{-1}\mathfrak{L}_\mu) = 0 \quad \text{pour } i \neq d$$

   où $\mathfrak{L}_\mu$ est le système local de rang 1 sur le tore $(\mathbf{C}^*)^p$ de monodromie μ_i^{-1} autour de $t_i = 0$ et μ est tel que $\mu_i = \exp 2i\pi\alpha_i$ avec α comme dans le point précédent. En effet, le théorème de comparaison identifie la cohomologie de $\mathbf{L}i_\alpha^*\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})$ à la cohomologie de $DR(\mathscr{M}) \otimes f^{-1}\mathfrak{L}_\mu$.

Exemple 1. $f_1, \ldots, f_p$ sont des formes linéaires affines sur $\mathbf{C}^n$. On note $A_1, \ldots, A_p$ les hyperplans qu'elles définissent dans $\mathbf{P}^n$ et A_∞ l'hyperplan à l'infini. Si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in (\mathbf{C}^*)^p$, on pose $\mu_\infty = -1/\mu_1 \cdots \mu_p$. Soit $\mathfrak{L}_\mu$ le système local sur

$\mathbf{C}^n - \cup_{i=1}^p A_i$ de monodromie égale à μ_i^{-1} autour de A_i (et donc de monodromie μ_∞^{-1} autour de A_∞) et soit $j : \mathbf{C}^n - \cup_{i=1}^p A_i \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ l'inclusion. On pose $I = \{1, \ldots, p, \infty\}$ et pour $x \in \mathbf{P}^n$ on pose $I(x) = \{i \in I | x \in A_i\}$. On a (*voir* aussi [13, 11])

(SI$_1$) *Si pour toute partie $J \subset I$ telle que $\cap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$ on a $\Pi_{i \in J} \mu_i \neq 1$*

$$\textit{alors } H^i(\mathbf{C}^n - \cup_{i=1}^p A_i, \mathfrak{L}_\mu) = 0 \textit{ sauf pour } i = n.$$

En effet, soit $x \in \cup_{i \in I} A_i$ et supposons que pour toute partie $J \subset I$ on ait $\Pi_{i \in J} \mu_i \neq 1$. Alors

$$(j_! \mathfrak{L}_\mu)_x = (\mathbf{R} j_* \mathfrak{L}_\mu)_x.$$

En effet, si les hyperplans A_i sont en position générale en x, on se ramène par section transverse au cas où card $I(x) = n$. On a alors

$$(\mathbf{R} j_* \mathfrak{L}_\mu)_x = (j_! \mathfrak{L}_\mu)_x (=0)$$

si et seulement si il existe $i \in I(x)$ tel que $\mu_i \neq 1$. Le cas général se ramène au précédent par éclatements. Les monodromies qui apparaissent autour des diviseurs exceptionnels sont de la forme $\Pi_{i \in J} \mu_i$.

Sous l'hypothèse donnée, on a donc l'égalité (en prenant l'hypercohomologie)

$$H^i\left(\mathbf{C}^n - \bigcup_{i=1}^p A_i, \mathfrak{L}_\mu\right) = H_c^i\left(\mathbf{C}^n - \bigcup_{i=1}^p A_i, \mathfrak{L}_\mu\right).$$

Puisque $\mathbf{C}^n - \cup_{i=1}^p A_i$ est de Stein, on a $H^i = 0$ pour $i > n$ et $H_c^i = 0$ pour $i < n$, d'où l'assertion. □

Exemple 2. Soit $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ un polynôme. Soit $G \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{C}$ l'adhérence du graphe de f et $F : G \to \mathbf{C}$ l'application induite par la deuxième projection. Le lieu critique de F est par définition la réunion du lieu singulier de G et de l'adhérence dans G du lieu critique de la restriction de F à la partie lisse de G. Nous dirons que le polynôme f est à singularités isolées (y compris à l'infini) si la restriction de F à son lieu critique est finie sur son image.

(SI$_2$) *Si $\mu \in \mathbf{C}^*$ est assez général, on a, lorsque f est à singularités isolées,*

$$H^i(\mathbf{C}^n - f^{-1}(0), f^{-1}\mathfrak{L}_\mu) = 0 \textit{ pour } i \neq n.$$

Il suffit, pour cet énoncé, de supposer que f est à singularités isolées hors de $f^{-1}(0)$. Pour le montrer, il suffit de vérifier que les faisceaux $\mathbf{R}^j f_* \mathbf{C}$ sont des systèmes locaux sur $\mathbf{C} - \{0\}$ pour $0 \leq j \leq n-1$. En effet, on a une suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^q(\mathbf{C}^*, \mathbf{R}^p f_* \mathbf{C} \otimes \mathfrak{L}_\mu) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbf{C}^n - f^{-1}(0), f^{-1}\mathfrak{L}_\mu)$$

et pour $0 \leq p \leq n-2$ on a $H^q(\mathbf{C}^*, \mathbf{R}^p f_* \mathbf{C} \otimes \mathfrak{L}_\mu) = 0$ pour tout q lorsque μ^{-1} n'est pas valeur propre du système local $\mathbf{R}^p f_* \mathbf{C}$. Cette suite spectrale dégénère donc et on en déduit le résultat (en utilisant comme dans l'exemple précédent le fait que $\mathbf{C}^n - f^{-1}(0)$ est de Stein).

Soit $j : U = \mathbf{C}^n \hookrightarrow G$ l'inclusion. Il suffit alors de vérifier que pour tout $c \in \mathbf{C}^*$, le complexe des cycles évanescents sur la fibre $F^{-1}(c)$ du faisceau $\mathbf{R}j_* \mathbf{C}_U$, noté $\Phi_{F,c}(\mathbf{R}j_* \mathbf{C}_U)$, est à support pontuel et concentré en le seul degré $n-1$. En effet, du triangle distingué

$$i_c^{-1}(\mathbf{R}F_*(\mathbf{R}j_* \mathbf{C}_U)) \to \mathbf{R}F_* \Psi_{F,c}(\mathbf{R}j_* \mathbf{C}_U) \to \mathbf{R}F_* \Phi_{F,c}(\mathbf{R}j_* \mathbf{C}_U) \xrightarrow{+1}$$

on déduit alors un isomorphisme des groupes de cohomologie des deux premiers complexes en degrés $j \leq n-2$.

Par dualité (*voir* par exemple [7, 16]), il revient au même de montrer que $\Phi_{F,c}(j_! \mathbf{C}_U)$ est à support ponctuel et n'a de cohomologie qu'en degré $n-1$. Soit $i : G - \mathbf{C}^n \hookrightarrow G$ l'inclusion fermée. La restriction $F \circ i$ est la projection d'un produit (le vérifier en coordonnées locales). On a un triangle distingué

$$\Phi_{F,c}(j_! \mathbf{C}_U) \to \Phi_{F,c}(\mathbf{C}_G) \to \Phi_{F,c}(\mathbf{R}i_* i^{-1} \mathbf{C}_G) \xrightarrow{+1}$$

et du fait de la structure en produit de $F \circ i$, le troisième terme est nul. Il suffit donc de vérifier que $\Phi_{F,c}(\mathbf{C}_G)$ est à support ponctuel et n'a de cohomologie qu'en degré $n-1$. C'est clair sur $\mathbf{C}^n$ par hypothèse de singularité isolée. On vérifie de plus que les points critiques de F à l'infini (c'est à dire dans $G - \mathbf{C}^n$) sont les points singuliers de G. En un tel point x, la fibre de Milnor de F en x est spécialisée de la fibre de Milnor d'une intersection complète à singularité isolée, à savoir (F, g), si g est une équation locale de G dans $\mathbf{P}^n \times \mathbf{C}$. Cette fibre n'a donc de cohomologie qu'en degrés 0 et $n-1$. □

Exemple 3. $f_1, \ldots, f_p : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ sont des polynômes. Soit $G \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{C}^p$ l'adhérence du graphe de $f = (f_1, \ldots, f_p)$ et $F : G \to \mathbf{C}^p$ la projection. En définissant comme dans l'exemple précédent le lieu critique de F, nous dirons que f est à singularités isolées si la restriction de F a son lieu critique est finie.

(SI$_3$) *Si $\mu \in (\mathbf{C}^*)^p$ est assez général, on a, lorsque f est à singularités isolées,*

$$H^i(\mathbf{C}^n - \cup_i f_i^{-1}(0), f^{-1}\mathfrak{L}_\mu) = 0 \text{ pour } i \neq n.$$

Comme dans l'exemple précédent, il suffit de vérifier que $\mathbf{R}^j f_* \mathbf{C}$ est un système local sur le tore $(\mathbf{C}^*)^p$ pour $0 \leq j < n-p-1$ (et il suffit que l'hypothèse de singularité isolée soit satisfaite au-dessus de ce tore). Il existe une hypersurface algébrique réduite $H \subset (\mathbf{C}^*)^p$ hors de laquelle $\mathbf{R}^j f_* \mathbf{C}$ est un système local. Il suffit de montrer que $\mathbf{R}^j f_* \mathbf{C}$ est un système local au voisinage d'un point assez général de toute composante irréductible de H. Soit t_0 un tel point et D un germe de courbe lisse transverse à H. Alors $f^{-1}(D) \subset \mathbf{C}^n$ est lisse et l'adhérence du graphe de $f_{|f^{-1}(D)}$ dans $\mathbf{P}^n \times D$ est égale à $F^{-1}(D)$. Par suite, la restriction de f à $f^{-1}(D)$ est à singularités isolées et on peut appliquer des arguments analogues à ceux de l'exemple précédent. □

2. Déterminant du complexe d'Aomoto associé à un polynôme

Dans cette section, nous reprenons la situation du §1.3 dans le cas où $p = 1$.

2.1. *Caractéristique d'Euler des cycles évanescents*

Soit $\mathscr{F}$ un complexe borné à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible sur X (en fait sur la variété analytique sous-jacente). Pour tout $t \in \mathbf{C}^*$, soit $\Phi_{f,t}\mathscr{F}$ le complexe des cycles évanescents de $\mathscr{F}$ sur la fibre $f = t$ relativement à la fonction f (*voir* [9]). C'est un complexe à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible. Nous utiliserons dans la suite le foncteur $\phi_{f,t} \overset{\text{déf}}{=} \Phi_{f,t}[-1]$. Nous noterons

$$\chi(f, \mathscr{F}, t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^i(f^{-1}(t), \phi_{f,t}\mathscr{F}) \in \mathbf{Z}.$$

Il existe seulement un nombre fini de $t \in \mathbf{C}^*$ pour lesquels $\phi_{f,t}\mathscr{F}$ n'est pas trivial et par suite pour lesquels $\chi(f, \mathscr{F}, t)$ n'est pas nul. Nous poserons

$$c(f, \mathscr{F}) = \prod_{t \in \mathbf{C}^*} t^{\chi(f, \mathscr{F}, t)} \in \mathbf{C}^*.$$

L'entier $\chi(f, \mathscr{F}, t)$ (et donc $c(f, \mathscr{F})$) peut être calculé de plusieurs manières:

1. En utilisant le comportement du complexe des cycles évanescents par image directe par f, c'est à dire

$$\mathbf{R}\Gamma(f^{-1}(t), \Phi_{f,t}) = \Phi_{Id_{\mathbf{P}^1},t} \mathbf{R}f_* \mathscr{F}$$

(puisque f est propre) on voit que l'on a

$$\chi(f, \mathscr{F}, t) = \chi(Id_{\mathbf{P}^1}, \mathbf{R}f_*\mathscr{F}, t)$$

et cet entier ne dépend donc que du complexe image directe $\mathbf{R}f_*\mathscr{F}$. On a alors

$$\chi(f, \mathscr{F}, t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i [\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^i(f^{-1}(t), \mathscr{F}) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^i(f^{-1}(t'), \mathscr{F})]$$

où $t' \neq t$ est assez voisin de t.

2. En utilisant une modification propre $\pi : \tilde{X} \to X$ telle que $(f \circ \pi)^{-1}(t)$ soit un diviseur à croisements normaux et que $\pi^{-1}\mathscr{F}$ soit à cohomologie localement constante sur les strates de la stratification naturelle de ce diviseur. Si π est un isomorphisme hors de $f^{-1}(t)$ et $(f \circ \pi)^{-1}(t)$ on a pour le complexe des cycles proches (*voir* [9])

$$\Psi_{f,t}\mathscr{F} = \mathbf{R}\pi_* \Psi_{f \circ \pi, t}(\pi^{-1}\mathscr{F})$$

égalité qui peut permettre de calculer $\phi_{f,t}\mathscr{F}$ en utilisant le triangle

$$i^{-1}_{f^{-1}(t)}\mathscr{F}[-1] \to \Psi_{f,t}\mathscr{F}[-1] \to \phi_{f,t}\mathscr{F} \xrightarrow{+1}.$$

2.2. *Fonction zêta "logarithmique" des monodromies en* 0 *et* ∞

Pour $\mathscr{F}$ comme ci-dessus, soit $\Psi_{f,0}\mathscr{F}$ le complexe des cycles proches de f sur la fibre $f^{-1}(0)$ et posons $\psi_{f,0}\mathscr{F} \overset{\text{déf}}{=} \Psi_{f,0}\mathscr{F}[-1]$. Ce complexe est $\mathbf{C}$-constructible et muni d'un automorphisme de monodromie T, et plus précisément c'est un complexe à cohomologie constructible sur l'anneau $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$. D'une manière générale, si H est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un automorphisme T nous notons

$$\Delta_H(T) = \prod_{\lambda \in \mathbf{C}^*} (T - \lambda)^{\gamma_\lambda}$$

le polynôme caractéristique de T sur H et

$$\Delta_H^{\log}(s) = \prod_{\lambda \in \mathbf{C}^*} \left(s - \frac{1}{2i\pi} \log \lambda\right)^{\gamma_\lambda}$$

où $1/2i\pi \log \lambda$ est considéré comme élément de $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ et $\Delta_H^{\log}(s)$ comme élément de $\mathbf{C}(s)^*/\sim$. Nous poserons alors

$$Z^{\log}(f, \mathscr{F}, 0)(s) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} [\Delta^{\log}_{H^i(f^{-1}(0), \psi_{f,0}\mathscr{F})}(s)]^{(-1)^i}$$

et nous définissons de manière analogue $Z^{\log}(f, \mathscr{F}, \infty)$. On dispose aussi de plusieurs moyens pour calculer $Z^{\log}(f, \mathscr{F}, 0)(s)$:

1. Puisque

$$\mathbf{R}\Gamma(f^{-1}(0); \Psi_{f,0}\mathscr{F}) = \Psi_{Id_{\mathbf{P}^1},0}(\mathbf{R}f_*\mathscr{F})$$

dans la catégorie $D_c^b(\mathbf{C}[T, T^{-1}])$ (complexes bornés de $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$-modules à cohomologie de type fini sur $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$), on a

$$Z^{\log}(f, \mathscr{F}, 0) = Z^{\log}(Id_{\mathbf{P}^1}, \mathbf{R}f_*\mathscr{F}, 0).$$

2. Pour tout $x \in f^{-1}(0)$, soit $\mathscr{H}^i(\psi_{f,0}\mathscr{F})_x$ le $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie du complexe des cycles proches au point x, qui est un $\mathbf{C}$-epace vectoriel de dimension finie avec un automorphisme T, soit $\Delta^{\log}_{\mathscr{H}^i(\psi_{f,0}\mathscr{F})_x}(s)$ le polynôme associé et $\zeta_x^{\log}(f, \mathscr{F}, 0)$ le produit alterné de ces polynômes. Il existe une stratification de Whitney analytique complexe $(Y_k)_{k \in K}$ de $f^{-1}(0)$ sur les strates de laquelle la fonction $x \mapsto \zeta_x^{\log}(f, \mathscr{F}, 0)$ (à valeurs dans $\mathbf{C}(s)^*/\sim$) est une constante notée $\zeta_{Y_k}^{\log}(f, \mathscr{F}, 0)(s)$. On a alors

$$Z^{\log}(f, \mathscr{F}, 0)(s) = \prod_{k \in K} \zeta_{Y_k}^{\log}(f, \mathscr{F}, 0)(s)^{\chi(Y_k)}$$

où $\chi(Y_k)$ désigne la caractéristique d'Euler topologique de la strate Y_k.

3. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une modification propre qui est un isomorphisme hors de $f^{-1}(0)$ et telle que $(f \circ \pi)^{-1}(0)$ soit un diviseur à croisements normaux dont la stratification naturelle est adaptée au complexe $\pi^{-1}\mathscr{F}$. Pour toute composante D_i $(i \in I)$ de ce diviseur, soit $\mathring{D}_i = D_i - \cup_{j \neq i} D_j$. Alors la fonction $x \mapsto \zeta_x^{\log}(f \circ \pi, \pi^{-1}\mathscr{F}, 0)$ est une fonction constante pour $x \in \mathring{D}_i$ et la *formule d'A'Campo* pour la fonction zêta de la monodromie (qui se démontre comme la formule précédente) implique que l'on a

$$Z^{\log}(f, \mathscr{F}, 0) = \prod_{i \in I} [\zeta_{D_i}^{\log}(f \circ \pi, \pi^{-1}\mathscr{F}, 0)]^{-\chi(\mathring{D}_i)}.$$

Si par exemple $\mathscr{F} = \mathbf{R}j_* \mathbf{C}_U$, le terme entre crochets est égal à

$$\prod_{l=0}^{N_i - 1} \left(s + \frac{l}{N_i} \right)$$

si N_i est la valuation de $f \circ \pi$ le long de D_i.

Remarque. Le degré $d \in \mathbf{Z}$ de $Z^{\log}(f, \mathscr{F}, 0)$ est égal au degré de $Z^{\log}(f, \mathscr{F}, \infty)$ puisque chaque groupe de cohomologie du complexe $\mathbf{R}f_* \mathscr{F}$ est un système local (éventuellement nul) sur un ouvert de $\mathbf{C}^*$. Ce degré est aussi le degré de $Z^{\log}(f, \mathscr{F}, t)$ pour tout $t \in \mathbf{C}^*$. Comme pour t assez général on a $\psi_{f,t}\mathscr{F} = i_{f^{-1}(t)}^{-1}\mathscr{F}[-1]$ on en déduit que

$$d = \chi(f^{-1}(t), i_{f^{-1}(t)}^{-1}\mathscr{F}[-1]) = -\chi(f^{-1}(t), \mathscr{F}).$$

2.3. *Le théorème*

THÉORÈME 2.3.1. *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_U$-module holonome tel que $j_+\mathscr{M}$ soit $\mathscr{D}_X$-régulier (plus généralement $\mathscr{M}$ est un complexe borné à cohomologie holonome tel que $j_+\mathscr{M}$ soit régulier). On a alors l'égalité (dans le groupe hypergéométrique $\mathbf{C}(s)^*/\sim$)*

$$\det \mathscr{A}_f(\mathscr{M})(s) = (-1)^d \cdot c(f, \mathscr{F}) \cdot \frac{Z^{\log}(f, \mathscr{F}, 0)(s)}{Z^{\log}(f, \mathscr{F}, \infty)(-s)}$$

où $\mathscr{F} = \mathbf{R}j_* DR(\mathscr{M})$, $DR(\mathscr{M}) = \Omega_U^{an\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_U^{an}} \mathscr{M}[\dim U]$ désigne le complexe de de Rham analytique de $\mathscr{M}$ et où $d = \deg Z^{\log}(f, \mathscr{F}, 0)$.

Remarques.

1. Ce résultat signifie que l'on peut trouver des bases des groupes de cohomologie de $\mathscr{A}_f(\mathscr{M})(s)$ de sorte que le produit alterné des déterminants des matrices de τ dans ces bases soit égal au terme de droite.
2. Ce résultat, dans une formulation un peu différente, est montré par Anderson [1] par une méthode différente lorsque $\mathscr{M} = \mathscr{O}_U$. Le fait de le montrer pour un $\mathscr{D}_X$-module régulier n'est pas plus difficile et permet plus de souplesse: nous allons en fait nous ramener au cas où $X = \mathbf{P}^1$ par image directe en remplaçant $\mathscr{M}$ par son complexe de Gauss–Manin.
3. Comme on a vu plus haut, le terme de droite dans la formule est une fraction rationnelle de degré total nul.

4. En vue de la généralisation pour plusieurs polynômes, nous allons exprimer d'une autre manière le résultat. Posons $Z(f, \mathscr{F}, 0) = \Pi(T-\lambda)^{\gamma_\lambda}$ et définissons

$$\Gamma_{Z(f,\mathscr{F},0)}(s) = \prod_\lambda \Gamma\left(s - \frac{1}{2i\pi}\log\lambda\right)^{\gamma_\lambda}.$$

De manière analogue, si $Z(f, \mathscr{F}, \infty) = \Pi(T-\lambda)^{\gamma'_\lambda}$ nous posons

$$\Gamma_{Z(f,\mathscr{F},\infty)}(s) = \prod_\lambda \left[\frac{\Gamma\left(-s - \frac{1}{2i\pi}\log\lambda\right)}{(-1)^{-s}}\right]^{\gamma'_\lambda}.$$

Avec cette normalisation, on peut exprimer le théorème de la manière suivante:

$$\det \mathscr{A}_f(\mathscr{M})(s) = \mathrm{EDF}(c(f, \mathscr{F})^s \cdot \Gamma_{Z(f,\mathscr{F},0)}(s) \cdot \Gamma_{Z(f,\mathscr{F},\infty)}(s)).$$

5. Puisque l'on a $\mathscr{A}_f(\mathscr{M})(s) = \mathscr{A}_t(f_+\mathscr{M})(s)$ et puisque $DRf_+\mathscr{M} = \mathbf{R}f_* DR\mathscr{M}$ du fait de la régularité de $j_+\mathscr{M}$, on déduit des remarques du §1.3.4 qu'il suffit de montrer le résultat lorsqure $X = \mathbf{P}^1$, $U = T = \mathbf{C}^*$, f est l'identité et $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_T$-module holonome tel que $j_+\mathscr{M}$ soit régulier.

En vertu de la remarque précédente, nous nous plaçons dans le cas où $X = \mathbf{P}^1$, $U = T = \mathbf{C}^*$ et $f = Id_{\mathbf{P}^1}$. Nous allons présenter de deux manières différentes une démonstration du théorème 2.3.1 dans cette situation, la première étant tout à fait élémentaire.

2.4. *Première démonstration*

Rappelons qu'il existe un opérateur $P \in \mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ tel que l'on ait une suite exacte

$$0 \to \mathscr{K}(T) \to \mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle/(P) \to \mathscr{M}(T) \to 0$$

avec $\mathscr{K}(T)$ à support ponctuel dans le tore T (en effet, d'après le théorème de Stafford, $\mathscr{M}(T)$ est isomorphe à $\mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle/I$ où I est un idéal non nul, et on choisit dans I un opérateur de degré minimal en $t\partial_t$).

Comme la formule à démontrer se comporte de manière multiplicative par extensions, il suffit de la montrer pour les modules définis par un opérateur P, puisque $\mathscr{K}(T)$ est aussi extension de modules de cette forme. Supposons donc que $\mathscr{M}(T) = \mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle/(P)$ avec

$$P = a_0(t\partial_t) + \cdots + a_r(t\partial_t)t^r.$$

On a donc

$$\mathfrak{M}(\mathcal{M})(s) = \mathbf{C}(s)\langle\tau, \tau^{-1}\rangle \Big/ \left(\tau^r + \frac{a_{r-1}(-s)}{a_r(-s)} \cdot \tau^{r-1} + \cdots + \frac{a_0(-s)}{a_r(-s)}\right).$$

Ainsi $\mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)$ est de dimension r sur $\mathbf{C}(s)$ et dans la base $[1], [\tau], \ldots, [\tau^{r-1}]$ la matrice de τ a pour déterminant

$$(-1)^r \cdot \frac{a_0(-s)}{a_r(-s)}.$$

2.4.1. *Calcul de* $a_0(-s)$. Considérons le module $j_+\mathcal{M}$ dans la carte $\mathbf{P}^1 - \{\infty\}$. Supposons que le polynôme a_0 vérifie la propriété

$$\forall l \in \mathbf{N} \quad a_0(l) \neq 0.$$

Dans ces conditions il est facile de vérifier que la multiplication par t sur le $\mathbf{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module $\mathbf{C}[t]\langle\partial_t\rangle/(P)$ est inversible et par suite que l'on a dans cette carte

$$j_+\mathcal{M}(\mathbf{P}^1 - \{\infty\}) = \mathbf{C}[t]\langle\partial_t\rangle/(P).$$

Soit d le degré de P par rapport à $t\partial_t$. L'hypothèse que $j_+\mathcal{M}$ est régulier implique en particulier que P est Fuchsien en 0 et par conséquent a_0 est de degré d. Les résultats classiques sur les systèmes réguliers en dimension 1 montrent que si a_{0d} désigne le coefficient du terme de degré d dans a_0, on peut écrire

$$a_0(-s) = (-1)^d a_{0d} \cdot Z^{\log}(Id_{\mathbf{P}^1}, \mathbf{R}j_* DR\mathcal{M}, 0)(s).$$

Si la condition sur a_0 n'est pas satisfaite, on remplace le générateur $[1]$ de $\mathcal{M}(T)$ par $[t^{-k}]$ pour $k \geq 0$ assez grand: dans la nouvelle présentation de $\mathcal{M}(T)$, le polynôme $a_0(t\partial_t)$ est remplacé par $a_0(t\partial_t + k)$ et on peut appliquer le raisonnement précédent.

2.4.2. *Calcul de* $a_r(-s)$. Soit $z = t^{-1}$ et donc $-z\partial_z = t\partial_t$. On pose

$$\begin{aligned} P &= a_0(t\partial_t) + \cdots + a_r(t\partial_t)t^r \\ &= a_0(-z\partial_z) + \cdots + a_r(-z\partial_z)z^{-r} \\ &= z^{-r}[b_0(z\partial_z)z^r + \cdots + b_r(z\partial_z)] \end{aligned}$$

avec $b_r(z\partial_z) = a_r(-z\partial_z + r)$. Le même calcul que ci-dessus montre alors que

$$a_r(-s) = a_{rd} \cdot Z^{\log}(Id_{\mathbf{P}^1}, \mathbf{R}j_* DR\mathcal{M}, \infty)(-s).$$

2.4.3. *Calcul de* $(-1)^r a_{0d}/a_{rd}$. Le terme de degré d en $t\partial_t$ dans P a pour coefficient le polynôme

$$a_{0d} + \cdots + a_{rd}t^r$$

et $(-1)^r a_{0d}/a_{rd}$ est égal au produit des racines de ce polynôme comptées avec multiplicité. Chaque racine $t_i \in \mathbf{C}^*$ est un point singulier de P dans le tore et la multiplicité de cette racine est la multiplicité du conormal en t_i à T dans la variété caractéristique de P, donc, d'après une variante du théorème d'indice local de Malgrange, est égale à $\dim_{\mathbf{C}} \phi_{id_{\mathbf{P}^1},t_i}(DR\mathcal{M})$. Ceci termine la première démonstration. □

NOTE. Il n'est pas nécessaire de supposer ici que $\mathcal{M}$ est régulier sur le tore T. Seule la régularité en 0 et ∞ est nécessaire pour obtenir la formule cherchée.

2.5. *Deuxième démonstration*

Nous voulons calculer le déterminant $\det \mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)$ à une constante multiplicative près (nous ne referons pas le calcul de la constante). Le calcul s'appuiera sur la remarque élémentaire suivante:

Soient E et F deux $\mathbf{C}[s]$-modules libres de rang r et $\varphi : E \to F$ un morphisme $\mathbf{C}[s]$-linéaire induisant un isomorphisme après tensorisation par $\mathbf{C}(s)$. A une constante multiplicative près, le déterminant de la matrice de φ dans des bases de E et de F ne dépend pas du choix de ces bases. Les hypothèses faites impliquent que φ est injectif et que Coker φ est $\mathbf{C}[s]$-artinien. Posons

$$\operatorname{Coker} \varphi = \bigoplus_i \mathbf{C}[s]/(s-\alpha_i)^{\gamma_i}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \det \varphi &= \star\, \Pi_i (s-\alpha_i)^{\gamma_i} \\ &= \star \operatorname{Car}(s; \operatorname{Coker} \varphi) \end{aligned}$$

avec $\star \in \mathbf{C}^*$ et où le dernier polynôme désigne le polynôme caractéristique de la multiplication par s sur Coker φ.

Nous allons commencer par expliciter des *réseaux* dans $\mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)$, c'est à dire des sous-$\mathbf{C}[s]$-modules libres de rang égal à $\dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)$.

PROPOSITION 2.5.1. *Soit* ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T)$ *un sous-*$\mathbf{C}[t]\langle t\partial_t\rangle$*-module de type fini de* $\mathcal{M}(T)$ *qui engendre* $\mathcal{M}(T)$ *sur* $\mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$ *et* ${}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)$ *un sous-*$\mathbf{C}[z]\langle z\partial_z\rangle$*-module avec une propriété analogue. Alors* ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)$ *est un sous-*$\mathbf{C}[t\partial_t]$*-module de type fini de* $\mathcal{M}(T)$ *qui l'engendre sur* $\mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$.

COROLLAIRE 2.5.2. *Supposons que* $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$ *n'ait pas de* $\mathbf{C}[s]$*-torsion. Alors, avec les notations ci-dessus (et* via *l'identification* $\mathcal{M}(T) = \mathfrak{M}(\mathcal{M})$*), l'image de* ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)$ *dans* $\mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)$ *est un réseau.* □

Démonstration de la proposition 2.5.1. Nous allons interpréter ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)$ comme une image directe. Considérons le faisceau $V_0\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1} \subset \mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}$ défini comme suit: dans la carte $\mathbf{P}^1 - \{\infty\}$, on pose $V_0\mathbf{C}[t]\langle\partial_t\rangle = \mathbf{C}[t]\langle t\partial_t\rangle$; dans la carte $\mathbf{P}^1 - \{0\}$ on pose $V_0\mathbf{C}[z]\langle\partial_z\rangle = \mathbf{C}[z]\langle z\partial_z\rangle$; dans le tore T on pose $V_0\mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle = \mathbf{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle$. Posons aussi $V_0\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}[s] = \mathbf{C}[s] \otimes_{\mathbf{C}} V_0\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}$.

LEMME 2.5.3. ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T)[s]t^s$ *est un sous-*$\mathbf{C}[s, t]\langle t\partial_t\rangle$*-module de type fini de* $\mathcal{M}(T)[s]t^s$.

Notons cependant que $\mathcal{M}(T)[s]t^s$ n'est pas de type fini sur l'anneau $\mathbf{C}[s, t]\langle\partial_t\rangle$. Pour montrer le lemme, il suffit de remarquer que si $m \in {}^{(0)}U\mathcal{M}(T)$, on a

$$(P(t, t\partial_t) \cdot m)t^s = P(t, t\partial_t - s) \cdot (mt^s).$$

En faisant de même avec ${}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)$ on obtient un sous-faisceau $Uj_+\mathcal{M}[s]t^s$ du faisceau $j_+\mathcal{M}[s]t^s$ qui est $V_0\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}[s]$-cohérent (cependant $j_+\mathcal{M}[s]t^s$ n'est pas cohérent sur $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}[s]$ mais seulement sur $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$).

Soit Ω^1 le faisceau des 1-formes relatives à $\mathbf{P}^1 \times \operatorname{Spec} \mathbf{C}[s]/\operatorname{Spec} \mathbf{C}[s]$ et $\Omega^1\langle 0, \infty\rangle$ le faisceau des 1-formes à pôles logarithmiques on 0 et ∞. Considérons le "complexe de de Rham relatif"

$$0 \to Uj_+\mathcal{M}[s]t^s \xrightarrow{d_U} \Omega^1\langle 0, \infty\rangle \otimes Uj_+\mathcal{M}[s]t^s \to 0$$

où la différentielle est définie comme pour le complexe (1.3.2), puis son image directe par le morphisme propre $\mathbf{P}^1 \times \operatorname{Spec} \mathbf{C}[s] \to \operatorname{Spec} \mathbf{C}[s]$.

D'une part la cohomologie de cette image directe est de type fini sur $\mathbf{C}[s]$: il suffit de le vérifier en remplaçant $Uj_+\mathcal{M}[s]t^s$ par $V_0\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1}[s]$, par cohérence. On calcule cette image directe à l'aide du complexe double fabriqué à l'aide du complexe de Čech pour le recouvrement déjà considéré. Dans la carte $\mathbf{P}^1 - \{\infty\}$ on obtient le complexe

$$0 \to \mathbf{C}[s, t]\langle t\partial_t\rangle \xrightarrow{t\partial_t} \mathbf{C}[s, t]\langle t\partial_t\rangle \to 0$$

qui a pour seul groupe de cohomologie Coker $t\partial_t \simeq \mathbf{C}[s, t]$. Le même calcul dans les autres cartes montre que la cohomologie de l'image directe est l'intersection dans $\mathbf{C}[s, t, t^{-1}]$ de $\mathbf{C}[s, t]$ et $\mathbf{C}[s, t^{-1}]$, d'où l'assertion.

D'autre part cette cohomologie est égale à ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)$: on utilise pour cela le même calcul que ci-dessus. Dans la carte $\mathbf{P}^1 - \{\infty\}$ le complexe de de Rham relatif a pour sections globales le complexe

$$0 \to {}^{(0)}U\mathcal{M}(T)[s] \xrightarrow{t\partial_t + s} {}^{(0)}U\mathcal{M}(T)[s] \to 0$$

qui a pour seul groupe de cohomologie ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T)$ (*voir* lemme 1.2.2).

Nous avons ainsi montré la finitude de ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)$ sur $\mathbf{C}[s]$. Montrons pour terminer que

$$\mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} [{}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)] = \mathfrak{M}(\mathcal{M})(s).$$

Rappelons qu'il existe un polynôme $b_{(0)}$ tel que l'on ait

$$b_{(0)}(t\partial_t) \cdot {}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \subset t \cdot {}^{(0)}U\mathcal{M}(T)$$

et un polynôme $b_{(\infty)}$ avec une relation analogue. Par suite, pour tout $k \in \mathbf{Z}$ on a

$$b_{(0)}(t\partial_t + k)t^{-k} \cdot {}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \subset t^{-k+1} \cdot {}^{(0)}U\mathcal{M}(T).$$

Ainsi, après tensorisation par $\mathbf{C}(s)$ (et identification $s = -t\,\partial_t$), l'inclusion

$$t^{-k+1} \cdot {}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \hookrightarrow t^{-k} \cdot {}^{(0)}U\mathcal{M}(T)$$

devient un isomorphisme, de même que l'inclusion ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \hookrightarrow \mathcal{M}(T)$, et de manière analogue l'inclusion

$${}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T) \hookrightarrow \mathcal{M}(T). \qquad \square$$

2.5.4. *Elimination de la torsion.* Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_T$-module holonome. Il existe un plus grand sous-module $\mathcal{M}'$ tel que $\mathfrak{M}(\mathcal{M}/\mathcal{M}')$ n'ait pas de $\mathbf{C}[s]$-torsion. Dans la suite nous travaillerons avec $\mathcal{M}/\mathcal{M}'$, ce qui ne change rien puisque $\mathfrak{M}(\mathcal{M}/\mathcal{M}')(s) = \mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)$.

2.5.5. *Calcul du déterminant.* Soient ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T)$ et ${}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)$ comme dans la proposition 2.5.1. On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap [t^{-1} \cdot {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)] & \underset{t^{-1}}{\overset{t}{\rightleftarrows}} & [t \cdot {}^{(0)}U\mathcal{M}(T)] \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T) \\ \downarrow_C & & \downarrow_D \\ {}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T) & = & {}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T) \end{array}$$

Puisqu'on a supposé $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$ sans $\mathbf{C}[s]$-torsion on voit que chaque sommet est un $\mathbf{C}[s]$-module libre de rang $r = \dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)$. Fixons des bases de ces modules, soit $A(s)$ la matrice de t et $B(s)$ celle de t^{-1}. On a alors

$$A(s)B(s+1) = B(s+1)A(s) = Id.$$

En notant $C(s)$ et $D(s)$ les matrices des inclusions C et D on voit que la matrice de t dans la base de $\mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)$ induite par celle de ${}^{(0)}U\mathcal{M}(T) \cap {}^{(\infty)}U\mathcal{M}(T)$ n'est autre que

$$D(s) \cdot A(s) \cdot C(s)^{-1}$$

et par conséquent son déterminant s'écrit

$$\det D(s) \cdot \det A(s) \cdot \det C(s)^{-1}.$$

Or $\det A(s)$ est dans $\mathbf{C}[s]$ et est inversible, donc est une constante non nulle. On a ainsi l'égalité (avec $\tau = t$, $z = t^{-1}$, et $\star \in \mathbf{C}^*$)

$$\det \mathfrak{M}(\mathcal{M})(s) = \star \operatorname{Car}[s; {}^{(\infty)}U({}^{(0)}U/t \cdot {}^{(0)}U)] \cdot \operatorname{Car}[s; {}^{(0)}U({}^{(\infty)}U/z \cdot {}^{(\infty)}U)]^{-1}. \tag{DET}$$

Nous allons appliquer cette égalité à la filtration canonique. Dans la carte $\mathbf{P}^1 - \{\infty\}$ on note $V\mathbf{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ la filtration croissante indexée par $\mathbf{Z}$ pour laquelle t est de degré -1 et ∂_t de degré 1 (donc comme plus haut $V_0\mathbf{C}[t]\langle\partial_t\rangle = \mathbf{C}[t]\langle t\partial_t\rangle$). Le $\mathbf{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module de type fini $\mathcal{M}(T)$ est alors muni d'une bonne filtration canonique notée ${}^{(0)}V\mathcal{M}(T)$: cette filtration est bonne pour $V\mathbf{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ et sur $gr_k^{(0)V}\mathcal{M}(T)$ l'opérateur $t\,\partial_t + k$ admet un polynôme caractéristique $b_{(0)}$ de la forme

$$b_{(0)}(t\partial_t + k) = \prod_{\alpha \in \Sigma} (t\partial_t + k + \alpha)^{\gamma_\alpha}$$

où $\Sigma \in \mathbf{C}$ est défini par

$$\Sigma = \{\alpha \in \mathbf{C} \mid -1 \leq \text{Ré}\,\alpha \leq 0, \operatorname{Im}\alpha \geq 0 \text{ si } \text{Ré}\,\alpha = -1, \operatorname{Im}\alpha < 0 \text{ si } \text{Ré}\,\alpha = 0\}.$$

En particulier la multiplication par t

$$t : gr_k^{(0)V}\mathcal{M}(T) \to gr_{k-1}^{(0)V}\mathcal{M}(T)$$

est bijective pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et on a lorsque $j_+\mathcal{M}$ est régulier en 0

$$(-1)^d b_{(0)}(-s) = Z^{\log}(Id_{\mathbf{P}^1}, \mathbf{R}j_* DR\mathcal{M}, 0)(s).$$

où $d = \deg b_{(0)}$. On a des énoncés analogues à l'infini.

LEMME 2.5.6. *On a*

$$gr_l^{(\infty)V} gr_k^{(0)V}\mathcal{M}(T) = 0 \quad si\ k + l > 1.$$

En effet, sur ce bi-gradué, l'opérateur $t\partial_t$ vérifie les deux équations $b_{(0)}(t\partial_t + k) = 0$ et $b_{(\infty)}(-t\partial_t + l) = 0$. Lorsque $k + l > 1$, il résulte des choix faits que ces deux polynômes n'ont pas de racine commune. □

On peut appliquer maintenant l'égalité (DET) en prenant ${}^{(0)}U = {}^{(0)}V_k$ et ${}^{(\infty)}U = {}^{(\infty)}V_l$ avec $k + l > 1$. Il résulte du lemme ci-dessus que l'on a

$${}^{(\infty)}V_l gr_k^{(0)V}\mathcal{M}(T) = gr_k^{(0)V}\mathcal{M}(T)$$

et une égalité analogue en inversant les rôles de 0 et ∞. Ceci termine la deuxième démonstration. □

3. Déterminant du complexe d'Aomoto dans le cas général

Nous allons généraliser le théorème 2.3.1 au cas de plusieurs polynômes en donnant une formule topologique pour $\det \mathcal{A}_{f_1,\dots,f_p}(\mathcal{M})(s)$. Cette formule fait intervenir des fonctions zêta associées à plusieurs polynômes. De telles fonctions ont été introduites dans [17]. Nous allons d'abord rappeler quelques propriétés que nous utiliserons et renvoyons à cette référence pour les démonstrations. Nous nous plaçons dans la situation du §1.3.

3.1. *Fonction zêta associée à plusieurs polynômes*

3.1.1. Soit I un sous-ensemble de $\{1, \dots, p\}$. Nous noterons $f_I : X \to (\mathbf{P}^1)^{\operatorname{card} I}$ l'application définie par les f_i pour $i \in I$. Soit (I_0, I_∞) une partition de I en deux

sous-ensembles disjoints. Etant donné un complexe borné $\mathscr{F}$ à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible sur X, le complexe d'Alexander de $\mathscr{F}$ relativement à $(f_i)_{i\in I}$ pour les valeurs critiques 0 ($i \in I_0$) et ∞ ($i \in I_\infty$), noté

$$^A\psi_{f_{I_0},f_{I_\infty}}(\mathscr{F})$$

est un complexe de faisceaux sur le sous-espace

$$X_{I_0,I_\infty} \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{i\in I_0} f_i^{-1}(0) \cap \bigcap_{i\in I_\infty} f_i^{-1}(\infty).$$

Plus exactement, c'est un objet de la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux de $\mathbf{C}[T_I, T_I^{-1}]$-modules sur cet ensemble, à cohomologie $\mathbf{C}[T_I, T_I^{-1}]$-constructible (nous avons posé $T_I = (T_i)_{i\in I}$). Lorsque $p = 1$ on a

$$^A\psi_{f,0}\mathscr{F} = \Psi_{f,0}\mathscr{F}[-1] = \psi_{f,0}\mathscr{F}$$

et une égalité analogue à l'infini. Aussi, dans la suite, nous poserons en général

$$\psi_{f_{I_0},f_{I_\infty}}(\mathscr{F}) \overset{\text{déf}}{=} {}^A\psi_{f_{I_0},f_{I_\infty}}(\mathscr{F}).$$

3.1.2. Soit $x \in X_{I_0,I_\infty}$. Considérons les $\mathbf{C}[T_I, T_I^{-1}]$-modules $\mathscr{H}^l(\psi_{f_{I_0},f_{I_\infty}}(\mathscr{F}))_x$ qui sont des modules de type fini et de torsion. Chaque module définit un cycle de codimension 1 (éventuellement nul) sur le tore Spec $\mathbf{C}[T_I, T_I^{-1}]$. La donnée de ce cycle est équivalente à la donnée d'une fonction définissant ce cycle, appelée polynôme d'Alexander du module. Celui-ci peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\prod_{L\in\mathscr{L}_I^+} \prod_{\lambda\in\mathbf{C}^*} (T^L - \lambda)^{\gamma_{L,\lambda,l}(x)}$$

où $\mathscr{L}_I^+$ est l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbf{Q}^{\operatorname{card} I}$ à coefficients $(\lambda_i)_{i\in I}$ dans $\mathbf{N} - \{0\}$ premiers entre eux et $T^L = \Pi_{i\in I} T_i^{\lambda_i}$. De plus, $\gamma_{L,\lambda,l}(x) \in \mathbf{Z}$ et la fonction

$$x \mapsto \gamma_{L,\lambda,l}(x)$$

est une fonction constructible sur X_{I_0,I_∞}, identiquement nulle sauf pour un nombre fini de L et λ.

La fonction zêta du complexe $\psi_{f_{I_0},f_{I_\infty}}(\mathscr{F})$ est la fonction sur X_{I_0,I_∞} notée

$$x \mapsto \zeta_x(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathscr{F}) \in \mathbf{C}[T_I, T_I^{-1}]$$

définie par

$$\zeta_x(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathscr{F})(T_I) = \prod_{l \in \mathbf{Z}} \prod_{L \in \mathscr{L}_I^+} \prod_{\lambda \in \mathbf{C}^*} (T^L - \lambda)^{(-1)^l \gamma_{L,\lambda,l}(x)}$$

pour laquelle l'exposant de $T^L - \lambda$ est $\gamma_{L,\lambda}(x) = \Sigma_{l \in \mathbf{Z}} (-1)^l \gamma_{L,\lambda,l}(x)$. Nous avons ainsi défini une fonction constructible

$$X_{I_0, I_\infty} \to \mathbf{C}[T_I, T_I^{-1}]$$

dont la donnée est équivalente à la donnée, pour chaque $L \in \mathscr{L}_I^+$ et chaque $\lambda \in \mathbf{C}^*$, d'une fonction constructible $\gamma_{L,\lambda}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$, identiquement nulle sauf pour un nombre fini de L et λ.

3.1.3. *Image directe.* Soit $\pi : X' \to X$ un morphisme de variétés algébriques lisses et propres sur $\mathbf{C}$. Posons $f'_i = f_i \circ \pi$ et soit $\mathscr{F}'$ un complexe borné $\mathbf{C}$-constructible sur X'. On a alors l'égalité

$$\zeta(f'_{I_0}, f'_{I_\infty}, \mathscr{F}') = \zeta(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathbf{R}\pi_* \mathscr{F}').$$

où, dans le terme de gauche, π_* désigne l'image directe des fonctions constructibles définie comme suit: l'exposant de $T^L - \lambda$ dans $\pi_* \zeta(f'_{I_0}, f'_{I_\infty}, \mathscr{F}')$ est la fonction constructible

$$x \mapsto \chi(\pi^{-1}(x), \gamma_{L,\lambda})$$

si $\gamma_{L,\lambda}$ est l'exposant dans $\zeta(f'_{I_0}, f'_{I_\infty}, \mathscr{F}')$ et χ désigne la caractéristique d'Euler pondérée par $\gamma_{L,\lambda}$. Voici quelques applications de cette formule:

1. Soit $\mathring{X}_{I_0, I_\infty}$ l'ouvert de X_{I_0, I_∞} défini par $f_j \neq 0$ et $f_j \neq \infty$ pour tout $j \notin I$. Notons $p : \mathring{X}_{I_0, I_\infty} \to \operatorname{Spec} \mathbf{C}$ l'application constante et posons

$$Z(f_1, \ldots, f_p; I_0, I_\infty; \mathscr{F}) = p_* \zeta(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathscr{F}) \in \mathbf{C}[T_I, T_I^{-1}].$$

L'exposant de $T^L - \lambda$ dans $Z(f_1, \ldots, f_p; I_0, I_\infty; \mathscr{F})$ est l'entier $\chi(\mathring{X}_{I_0, I_\infty}, \gamma_{L,\lambda})$. On a alors

$$Z(f'_1, \ldots, f'_p; I_0, I_\infty; \mathscr{F}') = Z(f_1, \ldots, f_p; I_0, I_\infty; \mathbf{R}\pi_* \mathscr{F}').$$

2. Si l'on prend pour π l'application $f_I : X \to (\mathbf{P}^1)^{\operatorname{card} I}$, on a l'égalité

$$f_{I*} \zeta(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathscr{F}) = \zeta(Id_{(\mathbf{P}^1)^{\operatorname{card} I_0}}, Id_{(\mathbf{P}^1)^{\operatorname{card} I_\infty}}, \mathbf{R} f_{I*} \mathscr{F})$$

entre fonctions constructibles sur $\bigcap_{i\in I_0}\{t_i=0\}\cap\bigcap_{i\in I_\infty}\{t_i=\infty\}$. On en déduit l'égalité dans $\mathbf{C}[T_I, T_I^{-1}]$:

$$Z(f_1,\ldots,f_p; I_0, I_\infty; \mathscr{F}) = Z(t_1,\ldots,t_p; I_0, I_\infty; \mathbf{R}f_{I*}\mathscr{F})$$

3. On a une *formule d'A'Campo* dans le cas où π est une résolution des singularités: supposons par exemple que U est égal à l'image inverse dans X du tore $(\mathbf{C}^*)^p$, que $\mathscr{F} = \mathbf{R}j_*\mathbf{C}_U$ et que les diviseurs $f'_i = 0$ et $f'_i = \infty$ sont réunion de composantes irréductibles d'un même diviseur à croisements normaux $D = \cup_{k\in K} D_k$. Posons $\mathring{D}_k = D_k - \cup_{l\neq k} D_l$. Pour tout $k \in K$, soit $\Lambda_k(s_1,\ldots,s_p)$ la forme linéaire dont le coefficient sur s_i est la valeur absolue de la valuation de f'_i sur D_k. On a

$$Z(f_1,\ldots,f_p; I_0, I_\infty; \mathbf{R}j_*\mathbf{C}_U) = \prod_{\{k\in K \mid \mathring{D}_k \subset \mathring{X}'_{I_0,I_\infty}\}} (T^{\Lambda_k}-1)^{-\chi(\mathring{D}_k)}. \qquad \square$$

3.1.4. *Translation.* Supposons que l'on ait $\mathscr{F} = \mathbf{R}j_*j^{-1}\mathscr{F}$, où j désigne toujours l'inclusion $U \hookrightarrow X$. Soit $k \in I$, $\mu_k \in \mathbf{C}^*$ et $\mathfrak{L}^{(k)}_{\mu_k}$ le système local sur U image inverse par f_k du système local de $\mathbf{C}^*$ de monodromie μ_k^{-1} autour de $f_k = 0$ (et donc μ_k autour de $f_k = \infty$). On a alors

$$\zeta(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathbf{R}j_*(j^{-1}\mathscr{F}\otimes\mathfrak{L}^{(k)}_{\mu_k}))(T_I) = \zeta(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathscr{F})(T'_I)$$

avec

$$T'_i = T_i \quad \text{si } i \neq k$$
$$T'_k = \mu_k^{-1}T_k \quad \text{si } k \in I_0$$
$$T'_k = \mu_k T_k \quad \text{si } k \in I_\infty.$$

Si maintenant $k \notin I$, le complexe $\mathbf{R}j_*(j^{-1}\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{(k)}_{\mu_k})$ est localement quasi-isomorphe à $\mathbf{R}j_*j^{-1}\mathscr{F}$ au voisinage de X_{I_0,I_∞} et par suite les fonctions zêta correspondantes sont les mêmes.

3.1.5. *Restriction.* Supposons toujours que $\mathscr{F} = \mathbf{R}j_*j^{-1}\mathscr{F}$. Soit $k \in I$ et supposons que $T_k - 1$ ne divise pas $\zeta(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathscr{F})$. Posons $\hat{I} = I - \{k\}$. On a l'égalité de fonctions constructibles sur X_{I_0,I_∞}:

$$\zeta(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathscr{F})_{|T_k=1} = \zeta_{|X_{I_0,I_\infty}}(f_{\hat{I}_0}, f_{\hat{I}_\infty}, \mathscr{F}).$$

NOTE. Si $T_k - 1$ divise ζ, on a une égalité analogue où le terme de gauche désigne alors la restriction résiduelle, c'est à dire la restriction à $T_k = 1$ du quotient

de ζ par la puissance convenable de $T_k - 1$. Nous n'aurons cependant pas à considérer cette situation.

En utilisant le §3.1.4 on obtient aussi, pour $\mu_k \in \mathbf{C}^*$, que si μ_k est assez général, on a

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } k \in I_0 & \zeta(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathscr{F})_{|T_k = \mu_k} \\ \text{si } k \in I_\infty & \zeta(f_{I_0}, f_{I_\infty}, \mathscr{F})_{|T_k = \mu_k^{-1}} \end{array}\right\} = \zeta_{|X_{I_0, I_\infty}}(f_{\hat{I}_0}, f_{\hat{I}_\infty}, \mathbf{R}j_*(j^{-1}\mathscr{F} \otimes \mathfrak{L}_{\mu_k}^{(k)})).$$

On en déduit que pour $k \in I$ on a

$$\begin{aligned} &Z(f_1, \ldots, \hat{f}_k, \ldots, f_p; \hat{I}_0, \hat{I}_\infty; \mathbf{R}j_*(j^{-1}\mathscr{F} \otimes \mathfrak{L}_{\mu_k}^{(k)})) \qquad (3.1.6) \\ &\quad Z(f_1, \ldots, f_p; \hat{I}_0, \hat{I}_\infty; \mathbf{R}j_* j^{-1}\mathscr{F}) \cdot Z(f_1, \ldots, f_p; \hat{I}_0 \cup \{k\}, \hat{I}_\infty; \mathbf{R}j_* j^{-1}\mathscr{F})_{|T_k = \mu_k} \\ &\quad \times Z(f_1, \ldots, f_p; \hat{I}_0, \hat{I}_\infty \cup \{k\}; \mathbf{R}j_* j^{-1}\mathscr{F})_{|T_k = \mu_k^{-1}}. \end{aligned}$$

En effet, soit $\dot{X}_{\hat{I}_0, \hat{I}_\infty} \subset X_{\hat{I}_0, \hat{I}_\infty}$ l'ouvert sur lequel $f_l \neq 0$ et $f_l \neq \infty$ pour tout $l \in \{1, \ldots, p\} - I = \{1, \ldots, \hat{k}, \ldots, p\} - \hat{I}$. On a une décomposition

$$\dot{X}_{\hat{I}_0, \hat{I}_\infty} = \mathring{X}_{\hat{I}_0 \cup \{k\}, \hat{I}_\infty} \sqcup \mathring{X}_{\hat{I}_0, \hat{I}_\infty \cup \{k\}} \sqcup \mathring{X}_{\hat{I}_0, \hat{I}_\infty}$$

qui correspond à la formule cherchée. □

3.2. *Restriction du complexe d'Aomoto et de son déterminant*

Soit $\alpha_p \in \mathbf{C}$ et notons $\mathscr{N}_{\alpha_p}^{(p)}$ le $\mathscr{D}_{T^p}$-module engendré par $t_p^{\alpha_p}$. Alors $\mathscr{N}_{\alpha_p}^{(p)}$ est isomorphe à $\mathscr{N}_{\alpha_p + l}^{(p)}$ pour tout $l \in \mathbf{Z}$.

PROPOSITION 3.2.1. *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_U$-module holonome. On a alors*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}i^*_{\{s_p = \alpha_p\}} \mathscr{A}_{f_1, \ldots, f_p}(\mathscr{M}) &\overset{\text{déf}}{=} \mathbf{C}[s]/(s_p - \alpha_p) \overset{L}{\otimes} \mathscr{A}_{f_1, \ldots, f_p}(\mathscr{M}) \\ &= \mathscr{A}_{f_1, \ldots, f_{p-1}}(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}} f^+ \mathscr{N}_{\alpha_p}^{(p)}). \end{aligned}$$

Démonstration. On a $\mathscr{A}_{f_1, \ldots, f_p}(\mathscr{M}) = \mathscr{A}_{t_1, \ldots, t_p}(f_+ \mathscr{M})$ et par suite $\mathbf{L}i^*_{\{s_p = \alpha_p\}} \mathscr{A}_{f_1, \ldots, f_p}(\mathscr{M})$ est représenté par le complexe double

$$\mathscr{A}_{t_1, \ldots, t_p}(f_+ \mathscr{M}) \xrightarrow{s_p - \alpha_p} \mathscr{A}_{t_1, \ldots, t_p}(f_+ \mathscr{M}).$$

Soit ϖ_p la projection de T^p sur le tore T^{p-1} des $p - 1$ premières coordonnées. En

effectuant une transformation de Mellin inverse partielle on voit que ce dernier complexe s'écrit:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}_{t_1,\ldots,t_{p-1}}(\{f_+\mathscr{M}\otimes\mathscr{N}^{(p)}_{\alpha_p}\xrightarrow{-t_p\,\partial_{t_p}}f_+\mathscr{M}\otimes\mathscr{N}^{(p)}_{\alpha_p}\})\\
&\quad= A_{t_1,\ldots,t_{p-1}}(\varpi_{p+}(f_+\mathscr{M}\otimes\mathscr{N}^{(p)}_{\alpha_p}))\\
&\quad= \mathscr{A}_{t_1,\ldots,t_{p-1}}((\varpi_p\circ f)_+(\mathscr{M}\otimes f^+\mathscr{N}^{(p)}_{\alpha_p}))\\
&\quad= \mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_{p-1}}(\mathscr{M}\otimes f^+\mathscr{N}^{(p)}_{\alpha_p}).
\end{aligned}$$

□

3.2.2. Soit $\mathfrak{M}$ un système holonome d'EDF. Nous avons vu (§1.2) qu'après une localisation convenable, le système $\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}$ est libre sur $\mathbf{C}[s]_{\mathrm{loc}}$. Le déterminant det $\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}$ est alors un système de rang 1 sur $\mathbf{C}[s]_{\mathrm{loc}}$. Par suite, si α_p est assez général pour que $s_p-\alpha_p$ ne soit pas inversible dans $\mathbf{C}[s]_{\mathrm{loc}}$, la restriction

$$i^*_{\{s_p=\alpha_p\}}\mathfrak{M}(s)\overset{\text{déf}}{=}(\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}/(s_p-\alpha_p)\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}})(s')$$

est un système rationnel d'EDF en $s'=(s_1,\ldots,s_{p-1})$ indépendant de la localisation convenable choisie. Il est alors clair que pour $\mathfrak{M}(s)$ holonome de rang r, la restriction (pour α_p assez général) $i^*_{\{s_p=\alpha_p\}}\mathfrak{M}(s)$ est aussi de rang r et que

$$i^*_{\{s_p=\alpha_p\}}\overset{r}{\wedge}\mathfrak{M}(s)=\overset{r}{\wedge}i^*_{\{s_p=\alpha_p\}}\mathfrak{M}(s).$$

Par ailleurs, si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont deux systèmes holonomes tels que $\mathfrak{M}(s)$ soit isomorphe à $\mathfrak{M}'(s)$, il existe une localisation pour laquelle $\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}}$ est isomorphe à $\mathfrak{M}'_{\mathrm{loc}}$. Ainsi, α_p étant assez général, la classe d'isomorphisme de $i^*_{\{s_p=\alpha_p\}}\mathfrak{M}(s)$ ne dépend que de celle de $\mathfrak{M}(s)$. On peut donc écrire pour α_p assez général:

$$i^*_{\{s_p=\alpha_p\}}\det\mathfrak{M}(s)=\det i^*_{\{s_p=\alpha_p\}}\mathfrak{M}(s).$$

Nous déduisons des résultats précédents:

PROPOSITION 3.2.3. *Pour α_p assez général on a*

$$i^*_{\{s_p=\alpha_p\}}\det\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})(s)=\det\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_{p-1}}(\mathscr{M}\otimes\mathscr{N}^{(p)}_{\alpha_p})(s').$$

□

3.3. *Le théorème*

3.3.1. *Normalisation.* Nous nous plaçons encore dans la situation du §1.3 et nous reprenons les notations du §2. Fixons $I\subset\{1,\ldots,p\}$ et une partition $I=I_0\sqcup I_\infty$.

Considérons la décomposition de la fonction zêta:

$$Z(f_1, \ldots, f_p; I_0, I_\infty; \mathscr{F}) = \prod_L \prod_{\lambda \in \mathbf{C}^*} (T^L - \lambda)^{\gamma_{L,\lambda}}$$

où L parcourt un ensemble de formes linéaires à coefficients $l_i \in \mathbf{N} - \{0\}$ (pour $i \in I$) premiers entre eux (et nuls si $i \notin I$). Nous normalisons alors le produit des facteurs Γ comme suit:

$$\mathrm{EDF}(\Gamma_{Z(f_1,\ldots,f_p;I_0,I_\infty;\mathscr{F})}(s)) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{EDF}\left(\prod_L \prod_{\lambda \in \mathbf{C}^*} \left[\frac{\Gamma\left(L(s_{I_0} - s_{I_\infty}) - \frac{1}{2i\pi}\log\lambda\right)}{(\Pi_{i\in I_0} l_i^{l_i s_i}) \cdot (\Pi_{i \in I_\infty}(-l_i)^{-l_i s_i})}\right]^{\gamma_{L,\lambda}}\right).$$

Cette normalisation est choisie pour que le lemme ci-dessous soit satisfait:

LEMME 3.3.2. *Soit $k \in I$ et $\mu_k = \exp 2i\pi\alpha_k$. Alors*

$$i^*_{\{s_k = \alpha_k\}} \mathrm{EDF}(\Gamma_{Z(f_1,\ldots,f_p;I_0,I_\infty;\mathscr{F})}(s)) =$$
$$\begin{cases} \mathrm{EDF}(\Gamma_{Z(f_1,\ldots,f_p;I_0,I_\infty;\mathscr{F})|T_k = \mu_k}(s)) & \text{si } k \in I_0 \\ \mathrm{EDF}(\Gamma_{Z(f_1,\ldots,f_p;I_0,I_\infty;\mathscr{F})|T_k = \mu_k^{-1}}(s)) & \text{si } k \in I_\infty \end{cases}$$

Démonstration. On a la formule suivante, pour une forme linéaire Λ à coefficients λ_i dans $\mathbf{Z}$ et $\delta \in \mathbf{N} - \{0\}$:

$$\mathrm{EDF}(\Gamma(\delta\Lambda(s) + \alpha)) = \mathrm{EDF}\left(\delta^{\delta\Lambda(s)} \prod_{k=0}^{\delta-1} \Gamma\left(\Lambda(s) + \frac{\alpha + k}{\delta}\right)\right)$$

et donc

$$\mathrm{EDF}\left(\frac{\Gamma(\delta\Lambda(s) + \alpha)}{\Pi_{i=1}^p (\delta\lambda_i)^{\delta\lambda_i s_i}}\right) = \mathrm{EDF}\left(\prod_{k=0}^{\delta-1}\left[\frac{\Gamma\left(\Lambda(s) + \frac{\alpha+k}{\delta}\right)}{\Pi_{i=1}^p \lambda_i^{\lambda_i s_i}}\right]\right)$$

dont on déduit immédiatement le lemme. □

Avec ces notations nous allons montrer:

THÉORÈME 3.3.3. *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_U$-module holonome tel que $j_+\mathscr{M}$ soit $\mathscr{D}_X$-régulier et posons $\mathscr{F} = \mathbf{R}j_* DR\mathscr{M}$. On a*

$$\det \mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})(s)$$
$$= \mathrm{EDF}\left(\prod_{i=1}^p c(f_i, \mathscr{F})^{s_i} \cdot \prod_{I \subset \{1,\ldots,p\}} \prod_{I_0 \sqcup I_\infty = I} \Gamma_{Z(f_1,\ldots,f_p;I_0,I_\infty;\mathscr{F})}(s)\right).$$

Remarques.

1. L'écriture donnée ici de $\det \mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathscr{M})(s)$ n'est pas celle donnée par la proposition 1.1.4 puisque les formes linéaires qui interviennent ne sont pas toutes dans un ensemble $\mathscr{L}$ comme dans cette proposition (à cause du signe $-s_{I_\infty}$). Cette écriture n'est donc pas nécessairement minimale. On peut bien sûr, par des manipulations élémentaires, transformer la formule pour n'utiliser que des formes $L \in \mathscr{L}$, mais on perd alors la simplicité de l'expression des constantes c_i (qui sont modifiées par un signe).
2. Fixons $I \subset \{1, \ldots, p\}$ ainsi qu'une partition $I = I_0 \sqcup I_\infty$. Alors

$$\Gamma_{Z(f_1,\ldots,f_p;I_0,I_\infty;\mathscr{F})}(s) \cdot \Gamma_{Z(f_1,\ldots,f_p;I_\infty,I_0;\mathscr{F})}(s)$$

est le produit des facteurs Γ qui dépend exactement des variables $\pm s_{I_0}$ et $\mp s_{I_\infty}$, c'est à dire le produit des termes de la forme

$$\Gamma(\pm \lambda_{I_0} s_{I_0} \mp \lambda_{I_\infty} s_{I_\infty} - \alpha)$$

avec $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in I$. Ce terme ne dépend que du comportement de $(f_1, \ldots, f_p)$ et de $\mathscr{F}$ le long de $\mathring{X}_{I_0,I_\infty} \sqcup \mathring{X}_{I_\infty,I_0}$. Par exemple, le produit des termes de la forme $\Gamma(s_i + \alpha)$ ne dépend que du polynôme caractéristique de T_i le long de $\{f_i = 0\} \cup \{f_i = \infty\} - \cup_{j \neq i} [\{f_j = 0\} \cup \{f_j = \infty\}]$.
3. Introduisons la fonction zêta *globale*:

$$Z(f_1, \ldots, f_p; \mathscr{F}) = \prod_{I \subset \{1,\ldots,p\}} \prod_{I_0 \sqcup I_\infty = I} Z(f_1, \ldots, f_p; I_0, I_\infty; \mathscr{F})(T_{I_0}, T_{I_\infty}^{-1}).$$

Cette fonction zêta a l'interprétation suivante (*voir* [17]): soit $\pi_1(T^p)$ le groupe fondamental du tore T^p basé à l'origine et $\mathbf{C}[\pi_1(T^p)]$ l'algèbre de ce groupe. Considérons le système local $\mathfrak{L}$ sur ce tore dont la fibre à l'origine est l'algèbre $\mathbf{C}[\pi_1(T^p)]$ et l'action de $\pi_1(T^p)$ est celle induite par la multiplication. Si l'on a fixé des coordonnées $t_1, \ldots, t_p$, on a des générateurs T_i (lacet autour de $t_i = 0$) et $\mathbf{C}[\pi_1(T^p)] = \mathbf{C}[T, T^{-1}]$. Soit $\mathscr{G}$ un complexe borné à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible sur ce tore, tel que le prolongement $\rho_!\mathscr{G}$ par 0 soit aussi à cohomologie constructible, où $\rho : T^p \hookrightarrow Y$ désigne l'inclusion dans une compactification algébrique quelconque. Pour une telle compactification, notons $\iota : Y - T^p \hookrightarrow Y$ l'inclusion complémentaire de ρ. Considérons le complexe

$$\mathbf{R}\Gamma_\iota^{-1}\mathbf{R}\rho_*(\mathscr{G} \otimes_{\mathbf{C}} \mathfrak{L}).$$

C'est un complexe borné à cohomologie de type fini sur $\mathbf{C}[\pi_1(T^p)]$, qui ne dépend pas (à quasi-isomorphisme près) du choix de la compactification

(cela résulte de la formule de projection et du fait que deux compactifications sont dominées par une troisième). De plus, les groupes de cohomologie sont des $\mathbf{C}[\pi_1(T^p)]$-modules de torsion. Considérons le cycle de codimension 1 dans le tore Spec $\mathbf{C}[\pi_1(T^p)]$ correspondant à ce complexe. Si l'on a choisi des coordonnées comme plus haut (et donc une compactification $Y = \mathbf{P}^1 \times \cdots \times \mathbf{P}^1$), ce cycle est le cycle défini par la fonction $Z(t_1, \ldots, t_p; \mathbf{R}\rho_* \mathscr{G})(T)$. La fonction $Z(f_1, \ldots, f_p; \mathscr{F})$ vérifie la même propriété en prenant pour $\mathscr{G}$ la restriction au tore T^p de l'image directe $\mathbf{R}f_* \mathscr{F}$.

Démonstration du théorème 3.3.3. Elle se fait par récurrence sur p. Lorsque $p = 1$, le résultat est donné par le théorème 2.3.1. Pour p quelconque, il suffit de montrer les deux lemmes suivants:

LEMME 3.3.4. *Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, si α_k est assez général, les restrictions à $s_k = \alpha_k$ des deux systèmes dans* 3.3.3 *sont égales.*

LEMME 3.3.5. *Soient $\mathfrak{M}(s)$ et $\mathfrak{M}'(s)$ deux classes dans le groupe hypergéométrique $\mathscr{H}G(p)$. Supposons que pour tout α_p assez général on ait*

$$i^*_{\{s_p = \alpha_p\}} \mathfrak{M}(s) = i^*_{\{s_p = \alpha_p\}} \mathfrak{M}'(s).$$

Alors il existe $c_p \in \mathbf{C}^*$ et $\gamma : \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ à support fini tels que l'on ait

$$\mathfrak{M}(s) = \mathrm{EDF}\left(c_p^{s_p} \cdot \prod_{\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}} \Gamma(s_p - \alpha)^{\gamma_\alpha} \right) \otimes \mathfrak{M}'(s).$$

Une fois ces deux lemmes montrés, on voit que les deux systèmes de 3.3.3 diffèrent au plus par un système du type

$$\mathrm{EDF}\left(c_p^{s_p} \cdot \prod_{\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}} \Gamma(s_p - \alpha)^{\gamma_\alpha} \right).$$

En considérant aussi la restriction à $s_1 = \alpha_1$ pour α_1 assez général, on voit que $c_p = 1$ et $\gamma \equiv 0$. □

Démonstration du lemme 3.3.5. Tout revient à montrer que si $\mathfrak{M}(s)$ est la classe d'un système de rang 1 tel que $i^*_{\{s_p = \alpha_p\}} \mathfrak{M}(s) = \mathrm{EDF}(1)$, alors $\mathfrak{M}(s)$ est égal à un système du type indiqué ci-dessus pour un certain $(c_p; \gamma) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}^{[\mathbf{C}/\mathbf{Z}]}$. On peut supposer que $\mathfrak{M}(s)$ est sous la forme donnée par la proposition 1.1.4. Notons $s' = (s_1, \ldots, s_{p-1})$, $L'(s') = L(s', 0)$ et soit $\delta(L)$ le *pgcd* des coefficients de L'. Nous

supposerons que $\mathscr{L}$ est comme dans l'exemple avant 1.1.4 (et $\mathscr{L}'$ de même avec $p-1$ variables), de sorte que si $L \in \mathscr{L}$ et si $L' \not\equiv 0$, alors $(1/\delta(L)) \cdot L' \in \mathscr{L}'$. Il est possible de choisir α_p assez général pour que les hyperplans d'équation

$$\left[\frac{1}{\delta(L)} L'(s') + \frac{\lambda_p \alpha_p - \alpha + k}{\delta(L)} + l\right] = 0$$

pour $L \in \mathscr{L}$, $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ tels que $\gamma_{L,\alpha} \neq 0$ et $L' \not\equiv 0$, et $k = 1, \ldots, \delta(L) - 1$, $l \in \mathbf{Z}$ soient deux à deux distincts. Le système

$$\mathfrak{M}(s) = \mathrm{EDF}\left(c_1^{s_1} \cdots c_p^{s_p} \prod_{L \in \mathscr{L}} \prod_{\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}} \Gamma(L(s) - \alpha)^{\gamma_{L,\alpha}}\right)$$

se restreint en le système satisfait par

$$c_1^{s_1} \cdots c_{p-1}^{s_{p-1}} \prod_{L \in \mathscr{L} | L' \not\equiv 0} \prod_{\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}} \delta(L)^{\gamma_{L,\alpha} L'(s_1, \ldots, s_{p-1})}$$

$$\times \prod_{k=0}^{\delta(L)-1} \Gamma\left[\frac{1}{\delta(L)} L'(s') + \frac{\lambda_p \alpha_p - \alpha + k}{\delta(L)}\right]^{\gamma_{L,\alpha}}.$$

Ainsi, le système restreint est écrit sous la forme canonique 1.1.4. On en déduit que si $i^*_{\{s_p = \alpha_p\}} \mathfrak{M}(s) = \mathrm{EDF}(1)$, alors pour toute forme L telle que $L' \not\equiv 0$ et tout $\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ on a $\gamma_{L,\alpha} = 0$. On vérifie de même que $c_i = 1$ pour $i = 1, \ldots, p-1$, ce qui montre l'assertion. □

Démonstration du lemme 3.3.4. Elle se fait par récurrence sur le nombre de variables. L'hypothèse de récurrence, la formule (3.1.6) et le lemme 3.3.2, la proposition 3.2.3 et le fait dû à la régularité de $j_+ \mathscr{M}$ que $DR(j_*[\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}_{\alpha_k}^{(k)}]) = \mathbf{R}j_*[DR(\mathscr{M}) \otimes \mathfrak{L}_{\mu_k}^{(k)}]$ (avec $\mu_k = \exp 2i\pi\alpha_k$), impliquent que l'égalité des restrictions à $\{s_k = \alpha_k\}$ a lieu pour les facteurs Γ normalisés.

Il reste à montrer cette égalité pour les termes en c^s, c'est à dire que pour tout $i \neq k$ on a

$$c(f_i, \mathscr{F}) = c(f_i, \mathbf{R}j_*(\mathscr{F} \otimes \mathfrak{L}_{\mu_k}^{(k)})).$$

Il suffit de montrer que pour tout $t_i \in \mathbf{C}^*$ on a l'égalité des caractéristiques d'Euler

$$\chi(f_i^{-1}(t_i), \mathbf{R}j_*(\mathscr{F} \otimes \mathfrak{L}_{\mu_k}^{(k)})) = \chi(f_i^{-1}(t_i), \mathbf{R}j_*\mathscr{F})$$

ce qui est clair, puisque les deux faisceaux ont même fonction caractéristique d'Euler locale sur les fibres de f_i. □

4. Déterminant d'intégrales de fonctions multiformes

4.1. *Solutions des systèmes d'EDF de rang* 1

4.1.1. Soit $\mathcal{O}(\mathbf{C}^p)$ l'algèbre des fonctions holomorphes en $s_1, \ldots, s_p$ et $\mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}$ la sous-algèbre des fonctions φ satisfaisant la condition de croissance suivante: pour toute famille de couples de réels $r_i \leq R_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ il existe $C > 0$, $a > 0$ et $R > 0$ tels que dans le domaine

$$\{s \in \mathbf{C}^p \mid \forall i = 1, \ldots, p, r_i \leq \text{Ré}\, s_i \leq R_i, |\text{Im}\, s_i| > R\}$$

on ait

$$|\varphi(s_1, \ldots, s_p)| < C \cdot \exp\left(a \sum_{i=1}^{p} |\text{Im}\, s_i|\right).$$

Définissons $\mathcal{E}(\mathbf{C}^p)$ comme la sous-algèbre du corps des fonctions méromorphes en $s_1, \ldots, s_p$ caractérisée par la propriété suivante: une fonction méromorphe φ est dans $\mathcal{E}(\mathbf{C}^p)$ si il existe un nombre fini de formes linéaires L à coefficients dans $\mathbf{Z}$ premiers entre eux, un ensemble fini de nombres complexes non nuls λ, des entiers $\gamma_{L,\lambda}$ et un polynôme $h(s) \in \mathbf{C}[s]$ tels que

$$h(s) \cdot \prod_{L,\lambda} (\exp(2i\pi L(s)) - \lambda)^{\gamma_{L,\lambda}} \cdot \varphi \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}.$$

Il est clair que $\exp(2i\pi L(s)) - \lambda$ est dans $\mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}$ de même que $h(s)$, et $\mathcal{E}(\mathbf{C}^p)$ est obtenu à partir de $\mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}$ en inversant uniquement ces fonctions.

NOTE. Lorsque $p = 1$, ce type de condition de croissance est classiquement utilisé pour étudier la transformation de Mellin inverse. Dans le cas des EDF, il a été systématiquement utilisé par J.-P. Ramis (non publié, *voir* aussi [3, 10]).

La preuve de la proposition suivante est élémentaire et, en ce qui concerne la fonction Γ, repose sur la formule de Stirling. Il sera commode dans la suite de noter $T_i = \exp 2i\pi s_i$ et $T = (T_1, \ldots, T_p)$.

PROPOSITION 4.1.2. *Les algèbres $\mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}$ et $\mathcal{E}(\mathbf{C}^p)$ satisfont les propriétés suivantes*:

1. *$\mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}$ (resp. $\mathcal{E}(\mathbf{C}^p)$) est un module à gauche sur $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ (resp. $\mathbf{C}(s)\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$).*
2. *La sous-algèbre des éléments invariants par $\tau_1, \ldots, \tau_p$ dans $\mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}$ s'identifie à $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$ et la sous-algèbre analogue de $\mathcal{E}(\mathbf{C}^p)$ à l'algèbre $\mathbf{C}[T, T^{-1}]_{\text{loc}}$ obtenue à partir de $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$ en inversant les $T^L - \lambda$.*

3. *Si* $\pi : \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^q$ *est une projection linéaire définie sur* $\mathbf{Q}$, *on a* $\pi^*\mathcal{O}(\mathbf{C}^q)^{(1)} \subset \mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}$ *et* $\pi^*\mathcal{E}(\mathbf{C}^q) \subset \mathcal{E}(\mathbf{C}^p)$.
4. *Pour toute forme* L *comme ci-dessus et tout* $\alpha \in \mathbf{C}$, *les fonctions* $\Gamma(L(s) - \alpha)$ *et* $\Gamma(L(s) - \alpha)^{-1}$ *sont dans* $\mathcal{E}(\mathbf{C}^p)$. □

4.1.3. Soit $\mathfrak{M}(s)$ un système holonome d'EDF. L'espace des solutions dans $\mathcal{E}(\mathbf{C}^p)$ de ce système est par définition l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(s)\langle\tau,\tau^{-1}\rangle}(\mathfrak{M}(s), \mathcal{E}(\mathbf{C}^p))$. Soit S une solution et soit $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ une base de $\mathfrak{M}(s)$. Alors les fonctions $S(m_1), \ldots, S(m_r)$ sont solutions du système ($i = 1, \ldots, p$)

$$\tau_i \cdot \begin{pmatrix} S(m_1) \\ \vdots \\ S(m_r) \end{pmatrix} = A_i(s) \cdot \begin{pmatrix} S(m_1) \\ \vdots \\ S(m_r) \end{pmatrix}$$

si A_i est la matrice de τ_i dans la base $\mathbf{m}$ et inversement tout tel vecteur définit une solution S de cette manière. De plus, l'espace des solutions $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(s)\langle\tau,\tau^{-1}\rangle}(\mathfrak{M}(s), \mathcal{E}(\mathbf{C}^p))$ est naturellement un module sur $\mathbf{C}[T, T^{-1}]_{\mathrm{loc}}$.

NOTE. Nous ne donnerons pas de résultats généraux concernant cet espace. On sait (*voir loc. cit.*) que lorsque $p = 1$, cet espace est de dimension $\dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(s)$ sur $\mathbf{C}[T, T^{-1}]_{\mathrm{loc}}$ (qui est alors égal au corps des fractions rationnelles $\mathbf{C}(T)$). Il serait aussi naturel de considérer les groupes Ext (ou alors de montrer qu'ils sont nuls).

PROPOSITION 4.1.4. *Soit* $\mathfrak{M}(s)$ *un système holonome d'EDF de rang* 1. *Alors il existe* $(c_1, \ldots, c_p; \gamma) \in (\mathbf{C}^*)^p \times \mathbf{Z}^{[\mathcal{L} \times \mathbf{C}/\mathbf{Z}]}$ *unique tel que pour toute base* m *de* $\mathfrak{M}(s)$ *et toute solution* $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(s)\langle\tau,\tau^{-1}\rangle}(\mathfrak{M}(s), \mathcal{E}(\mathbf{C}^p))$ *il existe* $h \in \mathbf{C}(s)$ *et* $\varphi \in \mathbf{C}[T, T^{-1}]_{\mathrm{loc}}$ *avec*

$$S(m) = h(s) \cdot \varphi(T) \cdot c_1^{s_1} \cdots c_p^{s_p} \cdot \prod_L \prod_\alpha \Gamma(L(s) - \alpha)^{\gamma_{L,\alpha}}.$$

Démonstration. Soit m' une base dans laquelle $c_1^{s_1} \cdots c_p^{s_p} \cdot \Pi_L \Pi_\alpha \Gamma(L(s) - \alpha)^{\gamma_{L,\alpha}}$ est solution (*voir* prop. 1.1.4) et posons $m = h(s) \cdot m'$. Alors

$$\left[h(s) \cdot c_1^{s_1} \cdots c_p^{s_p} \cdot \prod_L \prod_\alpha \Gamma(L(s) - \alpha)^{\gamma_{L,\alpha}} \right]^{-1} \cdot S(m) \in \mathcal{E}(\mathbf{C}^p)$$

est solution du système de rang 1 de matrice égale à l'identité, autrement dit est une fonction périodique. On applique alors la proposition précédente. □

Nous utiliserons le résultat suivant, qui découle du précédent. Notons par $\mathbf{C}(T)$ le corps des fractions de $\mathbf{C}[T]$.

PROPOSITION 4.1.5. *Soit $\mathfrak{M}(s)$ un système holonome d'*EDF *de rang r. Supposons donnés r éléments $m_1, \ldots, m_r \in \mathfrak{M}(s)$ et r solutions $S_1, \ldots, S_r \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(s)\langle\tau,\tau^{-1}\rangle}(\mathfrak{M}(s), \mathscr{E}(\mathbf{C}^p))$, et supposons que le déterminant $\det(S_k(m_l)) \in \mathscr{E}(\mathbf{C}^p)$ ne soit pas identiquement nul. Alors*

1. *$m_1, \ldots, m_r$ est une base de $\mathfrak{M}(s)$ et $S_1, \ldots, S_r$ une base du $\mathbf{C}(T)$-espace vectoriel $\mathbf{C}(T) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(s)\langle\tau,\tau^{-1}\rangle}(\mathfrak{M}(s), \mathscr{E}(\mathbf{C}^p))$ (qui est donc de dimension r).*
2. *On a*

$$\det(S_k(m_l)) = h(s) \cdot \varphi(T) \cdot c_1^{s_1} \cdots c_p^{s_p} \cdot \prod_L \prod_\alpha \Gamma(L(s) - \alpha)^{\gamma_{L,\alpha}}$$

avec $h \in \mathbf{C}(s)$ et $\varphi \in \mathbf{C}[T, T^{-1}]_{\mathrm{loc}}$. □

4.2. *Déterminant d'intégrales*

Nous nous plaçons dans la situation du §1.3 et nous prenons ici $\mathscr{M} = \mathscr{O}_U$. Nous allons d'abord définir les intégrales que nous voulons considérer.

4.2.1. Soit $(\tilde{\mathbf{C}}^*)^p$ le revêtement universel du tore $(\mathbf{C}^*)^p$ et $\tilde{U}$ le produit fibré de U par $(\tilde{\mathbf{C}}^*)^p$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{p} & U \\ \downarrow & \square & \downarrow f \\ (\tilde{\mathbf{C}}^*)^p & \rightarrow & (\mathbf{C}^*)^p \end{array}$$

On dispose sur $\tilde{U}$ (qui est lisse) de l'accouplement (seul le cas $n = \dim U$ nous intéressera)

$$\langle , \rangle : H_c^n(\tilde{U}, \mathbf{C}) \times H^n(\tilde{U}, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}.$$

Il faut remarquer cependant que les espaces vectoriels considérés ne sont pas de dimension finie. Le système local introduit à la remarque 4 du §3.3 n'est autre que l'image directe à support propre $p_! \mathbf{C}_{\tilde{U}}$ et on voit que

$$H_c^n(\tilde{U}, \mathbf{C}) = H_c^n(U, \mathfrak{L})$$

est un $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$-module de type fini (*voir* par exemple [17]). Par ailleurs, si $\omega \in \Omega^n(U)$ est une n-forme algébrique, $p^*\omega$ est une n-forme holomorphe sur $\tilde{U}$ et $p^*\omega f^s$ est une n-forme dépendant analytiquement du paramètre s. Puisque $\tilde{U}$ est un

revêtement de U, c'est aussi une variété de Stein, donc, pour s fixé, $p^*\omega f^s$ définit une classe de cohomologie $[\omega f^s] \in H^n(\tilde{U}, \mathbf{C})$ et pour tout $\gamma \in H_c^n(U, \mathfrak{L})$, la fonction

$$s \mapsto \langle \gamma, [\omega f^s] \rangle$$

est holomorphe sur $\mathbf{C}^p$.

Remarque. Soit $\mathfrak{L}^*$ le système local dual de $\mathfrak{L}$ (comme faisceau de $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$-modules). La fibre de $\mathfrak{L}^*$ est aussi égale à $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$ mais la monodromie autour de $t_i = 0$ est la multiplication par T_i^{-1} pour $i = 1, \ldots, p$. Alors l'homologie à support compact $H_n^c(U, \mathfrak{L}^*)$ est (par définition) égale à $H_c^n(U, \mathfrak{L})$ de sorte qu'on peut interpréter γ comme un cycle à coefficients dans $\mathfrak{L}^*$.

DÉFINITION 4.2.2. Pour $\gamma \in H_c^n(U, \mathfrak{L})$ et $\omega \in \Omega^n(U)$, on pose

$$\int_\gamma \omega f^s \overset{\text{déf}}{=} \langle \gamma, [\omega f^s] \rangle.$$

C'est une fonction holomorphe de s. On étend la définition à $\mathbf{C}[s] \otimes_{\mathbf{C}} \Omega^n(U)$ par linéarité.

PROPOSITION 4.2.3.

1. *$\int_\gamma \omega f^s$ ne dépend que de la classe de ω dans $H^0(\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathcal{O}_U))$.*
2. *Pour tout $i = 1, \ldots, p$, on a*

$$\int_{T_i\gamma} \omega f^s = \exp - 2i\pi s_i \cdot \int_\gamma \omega f^s.$$

3. *Pour tout $\gamma \in H_c^n(U, \mathfrak{L})$ et tout $\omega \in \Omega^n(U)$ on a*

$$\int_\gamma \omega f^s \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}.$$

Démonstration. Le premier point est immédiat et le second résulte du fait que l'accouplement est invariant sous l'action du groupe du revêtement $\tilde{U} \to U$. Montrons le troisième point. Si on fixe γ et ω, on a

$$|\langle \gamma, [\omega f^s] \rangle| \leq |\exp(2i\pi s \log f)| \cdot |\langle \gamma, p^*\omega \rangle|$$

et puisque γ est à support compact, il existe $c, c' > 0$ tels qu'on ait sur le support de γ:

$$|\log|f|| \leq c \quad \text{et} \quad |\arg f| \leq c'.$$

Puisque

$$|\exp(2i\pi s \log f)| = \exp(-2\pi(\operatorname{Im} s)\log|f|)\cdot\exp(-2\pi(\operatorname{Ré} s)\arg f)$$

on en déduit que $\langle\gamma, [\omega f^s]\rangle \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}$. □

4.2.4. *Restriction.* Soit $\mu \in (\mathbf{C}^*)^p$. Si μ est assez général, on a

$$H_c^n(U, \mathfrak{L}_\mu) = H_c^n(U, \mathfrak{L})/(T_1 - \mu_1, \ldots, T_p - \mu_p)$$

où $\mathfrak{L}_\mu$ désigne le système local de rang 1 sur $\mathbf{C}$ de monodromie μ_i^{-1} autour de $f_i = 0$, c'est à dire

$$\mathfrak{L}_\mu = \mathfrak{L}/(T_1 - \mu_1, \ldots, T_p - \mu_p).$$

Il suffit pour cela de choisir μ dans l'ouvert affine V sur lequel les modules $H_c^*(U, \mathfrak{L})$ sont $\mathbf{C}[T, T^{-1}]_V$-plats.

Par ailleurs, d'après le §3.2, si $\alpha \in \mathbf{C}^p$ est assez général, la restriction à $s = \alpha$ de $H^0(\mathcal{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathcal{O}_U))$ est égale à $H^0(p_+\mathcal{N}_\alpha)$ qui, par régularité, n'est autre que $H^n(U, \mathfrak{L}_\mu)$, si $\mu_i = \exp 2i\pi\alpha_i$ pour $i = 1, \ldots, p$.

Ainsi, le rang générique de $H_c^n(U, \mathfrak{L})$ est égal à $\dim_{\mathbf{C}(s)} H^0(\mathcal{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathcal{O}_U)(s))$ puisque ces deux nombres sont égaux à

$$\dim_{\mathbf{C}} H_c^n(U, \mathfrak{L}_{\mu^{-1}}) = \dim_{\mathbf{C}} H^n(U, \mathfrak{L}_\mu)$$

pour μ assez général, cette dernière égalité provenant de la dualité de Poincaré pour $\mathfrak{L}_\mu$ sur U.

Soit $\gamma \in H_c^n(U, \mathfrak{L})$ et notons $\gamma(\mu^{-1}) \in H_c^n(U, \mathfrak{L}_{\mu^{-1}})$ sa restriction à μ^{-1} assez général. Alors, pour $\alpha \in \mathbf{C}^p$ assez général et $\mu = \exp 2i\pi\alpha$, on a

$$\left(\int_\gamma \omega f^s\right)_{|s=\alpha} = \langle\gamma(\mu^{-1}), [\omega f^\alpha]\rangle$$

ce dernier symbole signifiant la dualité de Poincaré pour $\mathfrak{L}_\mu$.

4.2.5. Classiquement, les cycles d'intégration ne sont pas à support compact dans U, aussi il faut définir dans ce cas $\int_\gamma \omega f^s$ par régularisation (ou partie finie). Nous allons détailler ce point. On dispose d'une application naturelle de $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$-modules de type fini

$$H_c^n(U, \mathfrak{L}) \to H_{fp}^n(U, \mathfrak{L}), \tag{4.2.6}$$

où le deuxième terme désigne la cohomologie à support f-propre.

Le résultat suivant est conséquence de [17, théorème 2.5.7]:

PROPOSITION 4.2.7. *Soit, comme en* (4.1.2), $\mathbf{C}[T, T^{-1}]_{\mathrm{loc}}$ *l'algèbre obtenue en inversant les* $T^L - \lambda$, L *à coefficients dans* $\mathbf{Z}$ *premiers entre eux et* $\lambda \in \mathbf{C}^*$. *Alors, après tensorisation par* $\mathbf{C}[T, T^{-1}]_{\mathrm{loc}}$, *le morphisme* (4.2.6) *est un isomorphisme.*

Démonstration. Soient $j : (\mathbf{C}^*)^p \hookrightarrow (\mathbf{P}^1)^p$ *et* $\iota : (\mathbf{P}^1)^p - (\mathbf{C}^*)^p \hookrightarrow (\mathbf{P}^1)^p$ les inclusions. On a un triangle

$$j_!(\mathbf{R}f_!\mathfrak{L}) \to \mathbf{R}j_*(\mathbf{R}f_!\mathfrak{L}) \to \mathbf{R}\iota_*\iota^{-1}\mathbf{R}j_*(\mathbf{R}f_!\mathfrak{L}) \xrightarrow{+1}$$

et il résulte de *loc. cit.* que la cohomologie du troisième terme est de torsion, et annulée par un produit de $T^L - \lambda$. Les deux premiers complexes ont donc même cohomologie après tensorisation par $\mathbf{C}[T, T^{-1}]_{\mathrm{loc}}$, et puisque cet anneau est plat sur $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$, on en déduit que (4.2.6) est un isomorphisme après tensorisation. □

En utilisant l'isomorphisme inverse de (4.2.6) (après localisation), on peut ainsi définir $\int_\gamma \omega f^s$ comme fonction méromorphe de s lorsque $\gamma \in H^n_{fp}(U, \mathfrak{L})$ et $\omega \in \Omega^n(U)$: on choisit $\gamma' \in H^n_c(U, \mathfrak{L})$ et $P(T) = \Pi_{L,\lambda}(T^L - \lambda)^{\gamma_{L,\lambda}}$ de sorte que l'image de $P(T) \cdot \gamma'$ soit γ. On pose

$$\int_\gamma \omega f^s = \int_{P(T)\gamma'} \omega f^s \overset{\text{déf}}{=} P(\exp - 2i\pi s)^{-1} \cdot \int_{\gamma'} \omega f^s.$$

Les propriétés vues plus haut pour les supports compacts s'étendent et on a

PROPOSITION 4.2.8. *Pour* $\gamma \in H^n_{fp}(U, \mathfrak{L})$ *et* $\omega \in \Omega^n(U)$,

$$\int_\gamma \omega f^s \in \mathscr{E}(\mathbf{C}^p). \qquad \square$$

4.2.9. Soit $\gamma \in H^n_{fp}(U, \mathfrak{L})$. Alors γ définit une solution $\int_\gamma$ dans $\mathscr{E}(\mathbf{C}^p)$ du système d'EDF $H^0(\mathscr{A}_{f_1,\dots,f_p}(\mathcal{O}_U)(s))$ par la formule

$$\omega \mapsto \int_\gamma \omega f^s.$$

Nous avons vu que le rang générique r du $\mathbf{C}[T, T^{-1}]$-module $H^n_{fp}(U, \mathfrak{L})$ est égal à

$$\dim_{\mathbf{C}(s)} H^0(\mathscr{A}_{f_1,\dots,f_p}(\mathcal{O}_U)(s)).$$

Choisissons alors $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in H^n_{fp}(U, \mathfrak{L})$ tels que pour μ dans un ouvert dense du tore $(\mathbf{C}^*)^p$, les restrictions $\gamma_1(\mu), \ldots, \gamma_r(\mu)$ à $T = \mu$ forment une base de $H^n_{fp}(U, \mathfrak{L}_\mu)$. Choissons de même $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \Omega^n(U)$ dont les classes dans $H^0(\mathscr{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathcal{O}_U)(s))$ forment une $\mathbf{C}(s)$-base.

THÉORÈME 4.2.10. *Dans ces conditions, le déterminant* $\det(\int_{\gamma_i} \omega_j f^s)$ *n'est pas identiquement nul et peut s'écrire sous la forme*

$$\det\left(\int_{\gamma_i} \omega_j f^s\right) = h(s) \cdot \varphi(T) \cdot \prod_{i=1}^{p} c(t_i, \mathscr{F})^{s_i} \cdot \prod_{I \subset \{1,\ldots,p\}} \prod_{I_0 \sqcup I_\infty = I} \Gamma_{Z(t_1,\ldots,t_p; I_0, I_\infty, \mathscr{F})}(s)$$

où $h(s) \in \mathbf{C}(s)$ *a des pôles localisés sur des hyperplans affines d'équation* $L(s) - \alpha = 0$, $\varphi(T) \in \mathbf{C}[T, T^{-1}]_{\mathrm{loc}}$ *et* $\mathscr{F} = DR\mathscr{H}^0(f_+ \mathcal{O}_U)$.

Remarques.

1. Cette écriture suppose fait le choix d'une section $\mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$. Un autre choix modifie seulement h.
2. Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est à singularités isolées (§1.3.5), on peut remplacer dans cette formule les t_i par f_i et prendre $\mathscr{F} = \mathbf{R}j_* \mathbf{C}_U[\dim U]$.
3. On peut penser que pour certains choix de bases (γ_i) et (ω_j), le numérateur de $h(s)$ est aussi un produit de formes affines et que le numérateur de $\varphi(T)$ est aussi un produit de termes $T^L - \lambda$.
4. Comme la preuve ci-dessous le montre, si l'on choisit convenablement les représentants des facteurs Γ, les pôles du déterminant sont uniquement dus à la régularisation. On peut, si l'on y tient, donner plus d'information sur ces pôles à l'aide des résultats de [17]. Nous laissons au lecteur le soin de le faire.
5. Lorsque $f_1, \ldots, f_p$ définissent un arrangement d'hyperplans, la formule ainsi obtenue est moins précise que celle donnée par Varchenko ([19]), puisque nous ne spécifions pas les bases choisies et donc nous ne pouvons avoir d'information supplémentaire sur h et φ. Par contre, dans cette situation, le théorème 3.3.3 est tout à fait analogue au théorème (2.2) de [14].

Démonstration. On commence par travailler avec des éléments $\gamma'_i \in H^n_c(U, \mathfrak{L})$ dont la restriction à μ^{-1} assez général forment une base de $H^n_c(U, \mathfrak{L}_{\mu^{-1}})$. La non nullité du déterminant considéré provient du fait que l'accouplement

$$H^n_c(U, \mathfrak{L}_{\mu^{-1}}) \times H^n(U, \mathfrak{L}_\mu) \to \mathbf{C}$$

est non dégénéré. On déduit de la proposition 4.1.5 la formule pour le déterminant $\det(\int_{\gamma'_i} \omega_j f^s)$. Dans ce cas, si l'on choisit convenablement les représentants des

éléments de $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ intervenant dans les facteurs Γ, on peut faire en sorte que $h \in \mathbf{C}[s]$ et $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^p)^{(1)}$ puisque ce déterminant est homomorphe en s. Un changement de ces représentants peut au plus ajouter des pôles sur des hyperplans $L(s) - \alpha = 0$.

On déduit l'énoncé du théorème par l'argument de régularisation expliqué plus haut. □

Remarque. Supposons que X, U et $f_1, \ldots, f_p$ soient définis sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe des formes réelles $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \Omega^n(U)$ dont les classes dans $H^0(\mathcal{A}_{f_1,\ldots,f_p}(\mathcal{O}_U)(s))$ forment une $\mathbf{C}(s)$-base. Soient $k : (\mathbf{C}^*)^p \to (\mathbf{P}^1)^p - \{\Pi_{i=1}^p t_i = 0\}$ l'inclusion et $g : U \to (\mathbf{P}^1)^p - \{\Pi_{i=1}^p t_i = 0\}$ la composée de la restriction de f et de k. On suppose que l'espace d'homologie à support g-propre $H_n^{gp}(U(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ est de dimension r et possède une base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ dont l'image par le morphisme naturel $H_n^{gp}(U(\mathbf{R}), \mathbf{R}) \to H_n^{fp}(U, \mathfrak{L}) \otimes \mathbf{C}(T)$ soit une base de ce $\mathbf{C}(T)$-espace vectoriel. Dans ce cas, pour Ré $(s_i) \gg 0$, $a(s) = \det\left(\int_{\gamma_i} \omega_j |f|^s\right)$ est bien défini et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}^p$. Supposons de plus que dans l'égalité du théorème 4.2.10 pour $\mathcal{F} = DR\mathcal{H}^0(f_+ \mathcal{O}_U)$, seuls des facteurs Γ normalisés du type $(I_0, \emptyset)$ où $(\emptyset, I_\infty)$ apparaissent effectivement, c'est à dire que les formes linéaires correspondantes ont tous leurs coefficients soit ≥ 0, soit ≤ 0. Puisque si L est une forme linéaire à coefficients l_i $(i \in I)$ dans $\mathbf{N} - \{0\}$ on a

$$\mathrm{EDF}(\Gamma(-L(s) - \alpha)) = \mathrm{EDF}\left(\prod_{i \in I} (-1)^{l_i s_i} \cdot \Gamma(L(s) + \alpha)^{-1}\right)$$

on en déduit que

$$\mathrm{EDF}\left(\frac{\Gamma(-L(s) - \alpha)}{\Pi_{i \in I}(-l_i)^{-l_i s_i}}\right) = \mathrm{EDF}\left(\left[\frac{\Gamma(L(s) + \alpha)}{\Pi_{i \in I}(l_i)^{l_i s_i}}\right]^{-1}\right)$$

et on peut réécrire l'égalité du théorème 4.2.10 de sorte que les formes linéaires intervenant dans les facteurs Γ normalisés aient leurs coefficients dans $\mathbf{N}$. On notera $\tilde{\Gamma}$ le produit des facteurs Γ ainsi normalisés. On a alors l'égalité, pour Ré $(s_i) \gg 0$,

$$a(s) = h(s) \cdot \prod_{i=1}^{p} |c(t_i, \mathcal{F})|^{s_i} \cdot \tilde{\Gamma}(s).$$

C'est en effet une conséquence du théorème de Carlson: toute fonction d'une variable complexe, analytique et bornée sur le demi-plan Ré $(z) \geq 0$ et qui s'annule aux entiers est dentiquement nulle. Pour montrer l'assertion, nous allons utiliser une récurrence sur p. Fixons $s' = (s_2, \ldots, s_p)$ avec Ré $(s_i) \gg 0$. Comme les f_i sont définis sur $\mathbf{R}$, les constantes $c(f_i, \mathcal{F})$ sont réelles. D'autre part le produit $\tilde{\Gamma}(s)$ est équivalent pour $|s_1| \to \infty$ et s' fixé à $A \cdot B^{s_1}$, où A et B sont des réels positifs: cela résulte de la formule de

Stirling et de la remarque 3 du §2.3. D'après le théorème 4.2.10, il existe une fraction rationnelle φ telle que

$$a(s) = h(s) \cdot \varphi(\exp(i\pi s_1), \ldots, \exp(i\pi s_p)) \cdot \prod_{i=1}^{p} |c(t_i, \mathscr{F})|^{s_i} \cdot \tilde{\Gamma}(s).$$

La fonction

$$b(s) = h(s) \cdot \varphi(1, \exp(i\pi s_2), \ldots, \exp(i\pi s_p)) \cdot \prod_{i=1}^{p} |c(t_i, \mathscr{F})|^{s_i} \cdot \tilde{\Gamma}(s)$$

admet donc une majoration

$$|b(s)| \leq E \cdot F^{\mathrm{Ré}\,(s_1)}$$

où E et F sont des réels positifs. Comme la fonction a vérifie une majoration similaire, on en déduit l'existence d'un réel positif G tel que la fonction

$$g(s) = (a(s) - b(s))G^{-s_1}$$

soit bornée pour $\mathrm{Ré}\,(s_1) \gg 0$, à s' fixé. D'après le théorème de Carlson on a donc $a(s) = b(s)$, ce qui prouve par récurrence sur p que φ est constante.

Dans le cas où les $f_i = 0$ définissent un arrangement d'hyperplans affines vérifiant une condition de transversalité à distance finie, A. Varchenko a montré dans [19] une formule équivalente à

$$\det\left(\int_{\gamma_i} \omega_j f^s\right) = \prod_{i=1}^{p} c(t_i, \mathscr{F})^{s_i} \cdot \tilde{\Gamma}(s)$$

pour un choix convenable des bases ω_i, γ_j et des représentants dans $\mathbf{C}$ des éléments de $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ intervenant dans $\tilde{\Gamma}$. Dans le cas où $p = 1$ et f_1 est semi-quasihomogène, il a obtenu un résultat du même type dans [20].

RÉFÉRENCES

[1] G. W. ANDERSON, *Local factorization of determinants of twisted DR cohomology groups*, preprint, May 1990.

[2] K. AOMOTO, *Les équations aux différences finies et les intégrales de fonctions multiformes*, J. Fac. Sci. Tokyo *22* (1975), 271–297 et *26* (1979), 519–523.

[3] M. BARKATOU, *Thèse*, Université de Grenoble, 1989.

[4] J. BERNSTEIN, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, Funct. An. and Appl. *6* (1972), 273–285.

[5] J.-E. BJÖRK, *Rings of Differential Operators*, North Holland, Amsterdam, 1979.

[6] A. BOREL, *Algebraic $\mathscr{D}$-modules*, Perspectives in Math. *2* Academic Press, Boston, (1987), 207–352.

[7] J.-L. BRYLINSKI, *Transformations canoniques, dualité projective, Géométrie et analyse microlocales*, Astérisque *140–141* (1986), 3–134.
[8] P. DELIGNE, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Springer Lect. Notes in Math. *163* (1970).
[9] P. DELIGNE, *Le formalisme des cycles évanescents*, SGA 7 II, exposés 13 et 14, Springer Lect. Notes in Math. *340* (1973), 82–115 et 116–173.
[10] A. DUVAL, *Thèse*, Université de Strasbourg, 1984.
[11] I. M. GELFAND, V. A. VASSILIEV, A. V. ZELEVINSKY, *General hypergeometric functions on complex Grassmannians*, Funct. Anal. and its appl. *21* (1987), 23–38.
[12] M. KASHIWARA, *B-functions and holonomic systems*, Invent. Math. *38* (1976), 33–53.
[13] T. KOHNO, *Homology of a local system on the complement of hyperplanes*, Proc. Japan Acad. *62* (1986), 144–147.
[14] F. LOESER, *Arrangements d'hyperplans et sommes de Gauss*, à paraître aux Ann. Sc. Ecole Normale Sup.
[15] Z. MEBKHOUT, *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}$-modules cohérents*, Hermann, Paris, 1989.
[16] Z. MEBKHOUT, C. SABBAH, *$\mathcal{D}$-modules et cycles évanescents*, Appendice à [15].
[17] C. SABBAH, *Modules d'Alexander et $\mathcal{D}$-modules*, Duke Math. J. *60* (1990), 729–814.
[18] T. TERASOMA, *On the determinant of Gauss-Manin connections and Hypergeometric functions on hypersurfaces*, Preprint, Sept. 1990.
[19] A. N. VARCHENKO, *Beta function of Euler, Vandermond determinant, Legendre equation and critical values of linear functions on configuration of hyperplanes*, Izvestia Akad. Nauk. SSSR *53* (1989), 1206–1235 et *54* (1990), 146–158.
[20] A. N. VARCHENKO, *Valeurs critiques et déterminants de périodes* (*en russe*), Uspekhi Math. Nauk *44* (1989), 235–236.

Ajouté sur épreuves: La proposition 1.1.4 et sa démonstration lorsque $p = 2$ se trouvent dans O. Ore, *Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables*, J. Math. Pures et Appl. *9* (1930), 311–326. La démonstration de M. Sato est maintenant parue dans M. Sato, *Theory of prehomogeneous vector spaces* (*notes by Shintani, translated by M. Muro*), Nagoya Math. J. *120* (1990), 1–34.

Université de Paris VI et Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique

et

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Paris, France

Received December 7, 1990

Buchanzeigen

JOHN C. MORGAN II, **Point Set Theory** (Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs and Textbooks/131), Marcel Dekker, Inc., New York, 1990, 296 pp., $45.00 (on orders of five or more copies, for classroom use only), $99.75 (U.S. and Canada), $119.50 (all other countries).

1. Category Bases: Singular, Meager, Abundant and Baire Sets – Baire Functions. 2. Point-Meager and Baire Bases: Rare Sets – The Duality Principle. 3. Separable Bases. 4. Cluster Points and Topologies. 5. Perfect Bases. 6. Translation Bases: Arithmetic Operations – Constructions of Vitali and Hamel – Groups and Periodic Functions – Congruent Sets.

CORA SADOSKY, Editor, **Analysis and Partial Differential Equations, A Collection of Papers Dedicated to Mischa Cotlar** (Lecture Notes in Pure & Applied Mathematics Series/122), Marcel Dekker, Inc., New York, 1990, 784 pp., $115.00 (U.S. and Canada), $130.00 (All other countries).

Mischa Cotlar: A Biography. Alberto P. Calderon: Introduction of Professor Mischa Cotlar to the National Academy of Exact Sciences of Argentina. José Luis Massera: Mischa in Montevideo. Manuel Sadosky: My Friend Mischa Cotlar. Further contributions: I. Harmonic and Complex Analysis, by: N. Asmar, E. Berkson and T. A. Gillespie – C. A. Berenstein, R. Gay and A. Yger – D.-C. Chang – R. R. Coifman and S. Semmes – G. David and S. Semmes – R. Fefferman – M. Feldman and R. Rochberg – J. García-Cuerva – A. E. Gatto and S. Vági – H. Helson – P. W. Jones – J.-P. Kahane – M. Milman and T. Schonbek – A. Nagel, F. Ricci and E. M. Stein – N. K. Nikolskii and A. L. Volberg – J. Peetre – Y. Sagher and K. Zhou – C. Segovia and J. L. Torrea – F. Soria, G. Weiss and A. Založnik. II. Functional Analysis and Operator Theory, by: R. Arocena – J. Ball, I. Gohberg and L. Rodman – G. Corach, H. Porta and L. Recht – H. Dym – C. Foias and A. Tannenbaum – S. Gokhale and N. Salinas – D. A. Herrero – L. Qing and N. Salinas – V. V. Peller – D. Sarason. III. Partial Differential Equations, by: H. Berestycki, L. Caffarelli and L. Nirenberg – B. E. J. Dahlberg and C. E. Kenig – H. Donnelly and C. Fefferman – F. A. Grünbaum – G. Ponce. IV. The Mathematical Work of Mischa Cotlar, by: John Horváth – Cora Sadosky.

JOZSEF ABAFFY, EMILIO SPEDICATO, **ABS Projection Algorithms: Mathematical Techniques for Linear and Nonlinear Equations**, John Wiley & Sons – Ellis Horwood Limited, U.K., 1989, 220 pp., £39.95.

1. Introduction. 2. Derivation of the ABS Algorithm (Basic Form). 3. Basic Properties of Iterates of the ABS Class. 4. Alternative Representations of the Search Vector and the Matrix H_i. 5. The Huang and the Modified Huang Algorithm. 6. The Implicit Gauss–Cholesky (Implicit LU-LT^T) Algorithm. 7. The Scaled ABS Algorithm: General Formulation. 8. Subclasses in the Scaled ABS Algorithm. 9. Least Squares Solution of Overdetermined Linear Systems. 10. Computational Performance of the Modified Huang Algorithm on Linear Systems and Linear Least Squares. 11. Application of the Implicit LU, LQ and QR Algorithms to Some Sparse Large Linear Systems. 12. Error Analysis in the Scaled ABS Algorithm. 13. The ABS Algorithm for Nonlinear Systems.

STEPHEN LLOYD BALUK MOSHIER, **Methods and Programs for Mathematical Functions**, John Wiley & Sons – Ellis Horwood Limited (Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications), U.K., 1989, 423 pp., £16.95.

1. Floating Point Arithmetic: Numeric Data Structures – Rounding – Addition and Subtraction – Multiplication – Division – C Language – An Extended Double Arithmetic: ieee.c – Binary—Decimal Conversion – Analysis of Error – Complex Arithmetic – Rational Arithmetic. 2. Approximation Methods: Power Series – Chebyshev Expansions – Padé Approximations – Least Maximum Approximations – A Program to Find Best Approximations: remes.c – Forms of Approximation – Asymptotic Expansions – Continued Fractions – Polynomials – Newton–Raphson Iterations. 3. Software Notes: Design Strategy – Testing – System Utilities – Arithmetic Utilities. 4. Elementary Functions.