Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 66 (1991)

Artikel: Sous-variétés lagrangiennes et lagrangiennes exactes des fibrés cotangents.

Autor: Lalonde, Francois / Sikorav, J.-C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50389

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 66 (1991) 18–33 0010–2571/91/010018–16$1.50 + 0.20/0
© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel

Sous-variétés lagrangiennes et lagrangiennes exactes des fibrés cotangents

FRANÇOIS LALONDE* ET JEAN-CLAUDE SIKORAV

0. Introduction

Soit M une variété différentiable. Le fibré cotangent T^*M est muni de la structure symplectique canonique $\omega = d\lambda$, $\lambda = p \cdot dq$. Si L est une variété fermée de même dimension que M, on s'intéresse ici à l'existence et aux propriétés d'un plongement lagrangien $j : L \to T^*M$. Plus particulièrement, nous étudierons les plongements *exacts*, c'est-à-dire tels que $j^*\lambda$ est une forme exacte. Soulignons que nous ne considérons que des plongements: la théorie des immersions lagrangiennes (exactes ou non) est beaucoup plus flexible puisqu'elle relève du h-principe de M. Gromov [7] (pour une présentation détaillée de cette théorie, voir M. Audin [2]). Par exemple, si $M = \mathbb{R}^n$, une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une immersion lagrangienne de L dans $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ est la trivialité de $TL \otimes \mathbb{C}$. Pour l'existence d'un plongement, M. Audin [4] obtient comme condition nécessaire des contraintes sur $\chi(L)$ à partir de sa formule des points doubles d'une immersion totalement réelle (voir la section 1). Ces contraintes ne contredisent pas encore une éventuelle flexibilité des plongements lagrangiens, mais c'est le cas pour les résultats suivants, obtenus par des méthodes analytiques (courbes pseudo-holomorphes) ou variationnelles (principe de Hamilton):

(1) ([6], th. 2.3.B_3' et 2.3.B_4'') Si M est une variété fermée et $L \subset T^*M$ une sous-variété fermée lagrangienne exacte, alors L rencontre la section nulle M_0. De plus, si L' est hamiltoniennement isotope à L, $L \cap L'$ est non vide.

(2) ([6], 2.3.B_2) Si $M = \mathbb{R}^n$, T^*M ne contient aucune sous-variété fermée lagrangienne exacte.

En fait, l'argument de [6], 2.3.B_4'' montre que c'est encore vrai si M est une variété ouverte quelconque (voir 2.1).

(3) (L. V. Polterovich [11] [12], C. Viterbo [14]; voir 2.5) Si $M = \mathbb{R}^n$ et $L = T^n$, tout plongement lagrangien $L \to T^*M$ a une classe de Maslov non nulle.

*Recherches soutenues par le CRSNG-Canada (subvention URF0035045) et le FCAR-Québec (subvention EQ-3518).

On supposera dorénavant que M est fermée et que $L \subset T^*M$ est une sous-variété fermée lagrangienne exacte. Un exemple est l'image de la section nulle par un difféomorphisme hamiltonien. Dans ce cas, le résultat (1) peut être précisé en donnant une borne inférieure pour le nombre de points de $L \cap M_0$ ([8], [10], et [13]).

QUESTION. Une sous-variété fermée exacte d'un cotangent est-elle toujours hamiltoniennement isotope à la section nulle?

Cette question a été évoquée par V. I. Arnold dans son survey [1]. La solution semble pour l'instant hors de portée. Le but de cet article est de faire le point sur les propriétés d'une telle sous-variété.

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ. La projection $f: L \to M$ est surjective: ceci résulte aisément de (1), voir 2.1.

Dans [1], Arnold pose la question: a-t-on $\deg(f) = \pm 1$, ou du moins $\deg(f) \neq 0$? Nous ne savons pas y répondre en général, mais nous obtenons les résultats suivants en utilisant (1) et (2).

THÉORÈME 1. (a) *Fixons un point-base arbitraire sur L. Alors l'image $f_\#(\pi_1(L))$ est d'indice fini dans $\pi_1(M)$.*

(b) *L'application $f_\#$ est surjective si M est une variété infra-homogène de la forme $M = K\backslash G/H$ où K est compact connexe.*

Notons que les variétés vérifiant (b) incluent les espaces homogènes et les surfaces.

COROLLAIRES. (a) *L'application $f_*: H_1(L; \mathbb{R}) \to H_1(M; \mathbb{R})$ est surjective, et en particulier on a $b_1(L) \geq b_1(M)$ (nombres de Betti).*

(b) *Supposons $L = M = T^n$. Alors f est de degré ± 1.*

Intéressons-nous aux propriétés d'intersection. Une question naturelle est: si L et L' sont deux sous-variétés exactes, a-t-on $L \cap L' \neq \emptyset$? Notons que c'est vrai si L et L' ont une phase génératrice quadratique au sens de [13]. On a aussi le cas particulier suivant:

THÉORÈME 2. *On suppose que M est un espace homogène G/H avec G compact et que L et L' sont deux sous-variétés lagrangiennes fermées exactes de T^*M. Alors $L \cap L'$ est non vide.*

Par exemple, c'est vrai si $M = T^n$ ou $M = S^n$.

Un autre type d'intersection est celle avec un fibré conormal $\nu^*K \subset T^*M$ où $K \subset M$ est une sous-variété fermée. On rappelle que ν^*K est l'ensemble des

covecteurs qui sont orthogonaux à K, et que c'est une variété lagrangienne; en particulier, on a $v^*M = M_0$ et $v^*\{q\} = T_q^*M$. Lorsque L est le graphe de la différentielle d'une fonction f, $L \cap v^*K$ est en bijection avec crit $(f \mid K)$, et en particulier est non vide. En utilisant (1) et les résultats sur les phases génératrices de [10], nous montrons le

THÉORÈME 3. *Soit $K \subset M$ une sous-variété fermée. Alors L rencontre v^*K au moins dans les trois cas suivants:*

(i) *L est hamiltoniennement isotope à M*

(ii) *K est une fibre d'une submersion $\pi : M \to B$ où B est une variété fermée,*

(iii) *K est homotope à un point dans M.*

Enfin, une autre question naturelle est: le plongement i est-il régulièrement lagrangiennement homotope à la section nulle. Du moins, la classe de Maslov $\mu(i) \in H^1(L; \mathbb{Z})$ est-elle nulle? En utilisant (3), on prouve le

THÉORÈME 4. *Supposons $M = T^n$, et soit $i : M \to T^*M$ un plongement lagrangien exact. Alors la classe de Maslov $\mu(i)$ est nulle.*

Ceci se généralise à d'autres variétés, voir 2.4.

Supposons maintenant que M soit une surface orientée, pas nécessairement compacte. Le Théorème 5 résume ce que nous savons sur l'existence de plongements lagrangiens dans T^*M, exacts ou non.

THÉORÈME 5. (a) *Une surface orientée L admet un plongement lagrangien dans T^*M dont le degré de la projection sur M est $d \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $\chi(L) = d^2\chi(M)$, à l'exception des cas $L = M = T^2$ avec $|d| \geq 2$ qui ne sont pas réalisables.*

(b) *Une surface non orientable L admet un plongement lagrangien dans T^*M dont le degré de la projection sur M est $d \in \mathbb{Z}_2$ si et seulement si $\chi(L)$ est paire et $\chi(L) - d\chi(M)$ est non positif et nul mod 4, à l'exception peut-être de la bouteille de Klein dans $\mathbb{R}^4$ ($\chi(L) = 0$ et $d = 0$).*

Enfin, supposons que M soit une surface fermée orientable et que L soit orientable lagrangienne exacte dans T^*M. On a alors le

THÉORÈME 6. (a) *L'indice de la projection $f = \pi|_L$ de L sur M est ± 1, et le degré est non-nul sauf peut-être pour $M = S^2$ et $L = T^2$.*

(b) *Si L et L' sont lagrangiennes exactes dans T^*M, $L \cap L' \neq \emptyset$.*

(c) *Si M est le tore T^2, alors $L = T^2$* et le degré de la projection f est ± 1.

PLAN. Dans les deux premières parties, nous travaillons en dimension quelconque. Dans la première, nous explicitons les propriétés des plongements lagrangiens (et aussi totalement réels) donnés par le h-principe et par les calculs de nombres de points doubles d'immersions. Dans la seconde, nous traitons le cas des variétés exactes. Dans la troisième partie, nous traitons plus en détail le cas des surfaces, en nous intéressant aux sous-variétés lagrangiennes exactes et non exactes. Les résultats seront démontrés dans l'ordre de l'Introduction sauf le Théorème 2 qui dépend du Théorème 3,(ii).

1. Sous-variétés lagrangiennes et totalement réelles

Il existe deux types d'obstructions topologiques à l'existence d'un plongement lagrangien d'une variété fermée L dans T^*M, où M est une variété sans bord. La première est donnée par le h-principe pour les immersions lagrangiennes ([7] et [2]), la seconde par la nullité du nombre de points doubles de l'immersion (voir [3] pour les plongements lagrangiens dans $\mathbb{C}^n$).

Le h-principe énonce que la différentielle induit une équivalence d'homotopie faible entre l'espace des immersions lagrangiennes (ou lagrangiennes exactes) $j : L \to T^*M$ et l'espace des applications fibrées

$$\begin{array}{ccc} T_*L & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & T_*(T^*M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \xrightarrow{\varphi} & T^*M \end{array}$$

dont la restriction à chaque fibre est un isomorphisme linéaire sur un plan lagrangien. Notons λ la forme de Liouville sur T^*M, $\omega = d\lambda$ la forme symplectique et $(\langle , \rangle, J)$ une structure presque kählérienne sur T^*M compatible avec $\omega : \omega = \langle J \cdot , \cdot \rangle$. La condition que l'image par $\tilde{\varphi}$ d'une fibre $F_p \subset T_*L$ soit lagrangienne s'exprime par l'orthogonalité de $\tilde{\varphi}(F)$ et $J(\tilde{\varphi}(F))$, d'où

$$\tilde{\varphi}(F) \otimes \mathbb{C} \simeq T_{\varphi(p)}(T^*M).$$

La donnée de $\tilde{\varphi}$ est donc équivalente à celle d'une application fibrée $\tilde{\varphi} : T_*L \otimes \mathbb{C} \to T_*(T^*M))$ induisant un isomorphisme sur chaque fibre, c'est-à-dire un isomorphisme $T_*L \otimes \mathbb{C} \simeq \varphi^*(T_*(T^*M))$. Comme

$$\begin{aligned} \varphi^*(T_*(T^*M)) &\simeq (\pi \circ \varphi)^*(T_*(T^*M)) \simeq (\pi \circ \varphi)^*(T_*M \otimes \mathbb{C}), \pi : T^*M \to M \\ &\simeq ((\pi \circ \varphi)^*(T_*M)) \otimes \mathbb{C}, \end{aligned}$$

les classes d'homotopie régulière d'immersions lagrangiennes sont déterminées par les classes d'homotopie de $f = \pi \circ \varphi$ et de l'isomorphisme

$$T_* L \otimes \mathbb{C} \simeq f^*(T_* M) \otimes \mathbb{C}.$$

Le second type d'obstruction topologique provient du nombre algébrique de points doubles $d(i)$ d'une immersion lagrangienne $i : L \to T^*M$ ($d(i) \in \mathbb{Z}$ si $n = \dim L$ est pair et L est orientable, et $d(i) \in \mathbb{Z}/2$ dans tous les autres cas). M. Audin a calculé $d(i)$ dans [3] pour $M = \mathbb{R}^n$ quand n est pair et dans un grand nombre de cas particuliers quand n est impair. On tire de là sans difficulté le calcul du nombre de points doubles pour un cotangent quelconque, en se limitant aux dimensions paires de L. Précisons les orientations: il y en a trois naturelles sur T^*M qui sont, en coordonnées locales, *l'orientation de fibré* ($dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$), *l'orientation complexe* ($dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$), et *l'orientation symplectique* ω^n ($=(-1)^n dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$). Dans ce qui suit, à moins d'indication contraire, toutes les définitions—en particulier celle de $d(i)$—sont relatives à l'orientation de fibré, et donc compatibles avec la définition de la caractéristique d'Euler.

Supposons d'abord L orientable. Si i' est une petite perturbation de i dont l'image est en position générale par rapport à celle de i, le nombre algébrique d'intersection entre $\operatorname{Im} i$ et $\operatorname{Im} i'$ dans T^*M s'obtient en comptant d'une part le nombre d'intersection dans le fibré normal $v(i)$ entre $\operatorname{Im} i'$ et la section nulle de $v(i)$, et d'autre part deux points d'intersection pour chaque point double comptés avec le signe de ce point double:

$$[\operatorname{Im} i] \cdot [\operatorname{Im} i'] = \chi(v(i)) + 2d(i)$$

où $[\operatorname{Im} i] \in H_n(T^*M; \mathbb{Z})$. Comme i est lagrangienne, J induit un isomorphisme entre $v(i)$ et $T_* L$ qui préserve l'orientation. Si $d \in \mathbb{Z}$ désigne le degré de $\pi \circ i : L \to M$, la formule de points doubles est donc:

$$d(i) = \frac{d^2\chi(M) - \chi(L)}{2}, \quad \text{c'est-à-dire } \chi(L) = d^2\chi(M) \text{ pour un plongement.}$$

Si L est non orientable la même formule de points doubles, considérée mod 2, est encore valable. On la déduit de la même manière en généralisant aux cotangents la formule pour une immersion lagrangienne dans $\mathbb{C}^n$ calculée par M. Audin dans ce cas-ci à partir d'un résultat de Lannes ([9]).

COROLLAIRE. *Si $L \subset T^*M$ est une sous-variété lagrangienne plongée de degré d, alors*

$\chi(L) = d^2\chi(M)$ *si L est orientable*

$\chi(L) \equiv d^2\chi(M)$ mod. 4 *si L n'est pas orientable.*

Comme ces obstructions sont de nature homotopique, elles restent valables aussi bien pour les immersions totalement réelles que lagrangiennes. On précisera ces résultats dans la troisième partie qui traite le cas des surfaces.

2. Sous-variétés exactes

Soit $L \subset T^*M$ une sous-variété lagrangienne fermée exacte. On note $i : L \to T^*M$ l'inclusion et $f : L \to M$ la restriction de la projection.

2.1. *Preuve de la surjectivité de f*

Sinon, il existe $q_0 \in M$ tel que $L \subset T^*(M \setminus \{q_0\})$. Comme $M \setminus \{q_0\}$ est une variété ouverte, il existe une fonction $g : M \setminus \{q_0\} \to \mathbb{R}$ sans point critique. La translation par $t\,dg$ dans les fibres donne alors une isotopie hamiltonienne de $T^*(M \setminus \{q_0\})$:

$$\varphi_t(q, p) = (q, p + t\,dg(q)).$$

Donc $\varphi_t(L)$ est exacte pour tout t, et il est clair qu'elle est disjointe de M pour t assez grand; ceci contredit le th. 2.3.B_4'' de [6] (voir (1) de l'Introduction).

Une variante de ce raisonnement permet de montrer la

PROPOSITION 1. *Si U est une variété ouverte, il n'y a pas de sous-variété lagrangienne fermée exacte dans T^*U.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire. Il existe une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ sans point critique. La construction ci-dessus donne une isotopie hamiltonienne $\varphi_t(L) \subset T^*U$ telle que $\varphi_t(L) \cap L$ est vide pour t assez grand: ceci contredit le th. 2.3.B_3' de [6]: il est applicable car on peut supposer que U est de type fini, ce qui implique l'hypothèse de convexité à l'infini pour T^*U.

REMARQUE. Il est tentant d'utiliser la Proposition 1 pour montrer $\deg(f) \neq 0$: il suffirait pour cela de montrer que toute application $L \to M$ de degré

zéro se factorise par une variété ouverte U, l'application $U \to M$ étant une immersion. Ceci n'a pas l'air d'être vrai en général, mais peut-être y a t-il une version stable (après produit par S^N par exemple)?

2.2. *Preuve du Théorème* 1

(a) Soit $M_1 \to M$ le revêtement associé à $f_\#(\pi_1(L))$: on peut alors relever L en une sous-variété exacte $L_1 \subset T^*M_1$. Si l'indice est infini, M_1 est ouverte, ce qui est impossible d'après la Proposition 1.

(b) Nous allons généraliser un argument de [1]. Supposons d'abord M homogène. Soit Γ_1 le plus grand sous-groupe normal de $\pi_1(M)$ contenu dans $f_\#(\pi_1(L))$: comme ce dernier est d'indice fini dans $\pi_1(M)$, il en est de même de Γ_1. Soit $M_1 \to M$ le revêtement galoisien fini associé à $\Gamma_1 : M_1$ est encore homogène, disons $M_1 = G/H$. Les transformations de revêtement sont induites par des translations de G, donc sont isotopes à l'identité. On en déduit que le revêtement $T^*M_1 \to T^*M$ est galoisien et que $\mathrm{Aut}\,(T^*M_1/T^*M)$ est formé de difféomorphismes hamiltoniens de T^*M_1.

D'autre part, soit $L_1 \to L$ le revêtement associé à $f_\#^{-1}(\Gamma_1) \subset \pi_1(L)$, et soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_k : L_1 \to T^*M_1$ $(k = [\pi_1(M) : \Gamma_1])$ les relevés de l'application composée $J : L_1 \to L \to T^*M$. Désignons par N le nombre de sous-variétés mutuellement disjointes parmi $\mathrm{Im}\,\varphi_1, \ldots, \mathrm{Im}\,\varphi_k$. Comme

$$[\pi_1(L) : \pi_1(L_1)] = [f_\#(\pi_1(L)) : \Gamma_1] < \infty,$$

L_1 est compacte, et on a donc N sous-variétés compactes exactes, hamiltoniennement isotopes et disjointes: on en conclut $N = 1$ par le Théorème 1. Or la théorie des revêtements donne

$$\begin{aligned} N &= [\pi_1(M) : \pi_1(M_1)]/[\pi_1(L) : \pi_1(L_1)] \\ &= [\pi_1(M) : \Gamma_1]/[f_\#(\pi_1(L)) : \Gamma_1], \end{aligned}$$

donc $N = 1$ équivaut à $f_\#(\pi_1(L)) = \pi_1(M)$.

(ii) On se ramène au cas (i) de la façon suivante. On associe à L une variété L_1 obtenue en prenant le produit fibré de L et de G/H au-dessus de $M = K\backslash G/H$:

$$L_1 = \{(l, x) \in L \times G/H : f(l) = \pi(x)\},$$

où π est la projection de G/H sur M.

Comme π est une fibration de fibre K, L_1 est une variété fermée et l'application $p : L_1 \to L$ est une fibration de fibre K. On définite ensuite $i_1 : L_1 \to T^*(G/H)$ en posant

$$i_1(l, g) = (d\pi_g)^*(i(l))$$

où $(d\pi_g)^* : T^*_{\pi(g)}(M) \to T^*_g(G/H)$ est l'application différentielle cotangente. Comme π est une submersion, $(d\pi_g)^*$ est injective, donc i_1 est un plongement. De plus $i_1^* \lambda_{G/H} = p^*(i^* \lambda_M)$, donc c'est un plongement exact.

On a deux suites exactes envoyées l'une sur l'autre:

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1(K) & \longrightarrow & \pi_1(L_1) & \longrightarrow & \pi_1(L) & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow \mathrm{id} & & \downarrow F_\# & & \downarrow f_\# & & \\
\pi_1(K) & \longrightarrow & \pi_1(G/H) & \longrightarrow & \pi_1(M) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

D'après (a), $F_\#$ est surjective, donc $f_\#$ est surjective. □

Le Corollaire (a) est alors évident. Quant au Corollaire (b), il résulte du fait que si f est une application de T^n dans lui-même, induisant $A \in M_n(\mathbb{Z})$ au niveau du π_1, on a $|\deg(f)| = |\det(A)|$.

2.3. *Preuve du Théorème* 3

(i) Ceci résulte du fait, démontré dans [13], que L admet une phase génératrice S, définie sur $M \times \mathbb{R}^N$, et égale à une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^N$ hors d'un compact. Donc $L \cap v^*K$ est en bijection avec les points critiques de la restriction $S \mid K \times \mathbb{R}^N$, ce qui prouve que son cardinal est au moins égal à $CL(K) + 1$ où $CL(K)$ est la "cuplength". A fortiori $L \cap v^*K$ est non vide.

(ii) Supposons au contraire $L \cap v^*K = \varnothing$. Si $K = \pi^{-1}(b_0)$, il existe alors un voisinage U de b_0 dans B tel que $L \cap v^*F = \varnothing$ pour toute fibre F de π dans $\pi^{-1}(U)$. De plus, il existe $h : B \to \mathbb{R}$ telle que crit $(f) \subset U$. Posons $g = h \circ \pi$ et considérons l'isotopie hamiltonienne φ_t de T^*M obtenue par translation de $t\,dg$ dans les fibres. Alors

(a) La restriction $g \mid M \backslash U$ n'a pas de point critique, donc pour t assez grand on a $\varphi_t(L) \cap (M \backslash U) = \varnothing$, où $M \backslash U$ est considérée comme contenue dans la section nulle $M_0 \subset T^*M$.

(b) Pour toute fibre F de π, l'image de F par dg est contenue dans v^*F. Donc si $F \subset \pi^{-1}(U)$, $\varphi_t(L)$ reste disjoint de v^*F pour tout t, et a fortiori on a

$\varphi_t(L) \cap F = \emptyset$, où F est considérée comme contenue dans la section nulle $M_0 \subset T^*M$. On en déduit que pour tout t on a $\varphi_t(L) \cap U = \emptyset$.

Il résulte de (a) et de (b) que pour t assez grand on a $\varphi_t(L) \cap M_0 = \emptyset$, ce qui contredit la propriété (1) de l'Introduction.

(iii) Notons $i : K \to M$ l'inclusion et $K_0 \subset T^*K$ la section nulle. Considérons $M' = K \times M$, $L' = K_0 \times L \subset T^*M'$, $K' = (id \times i)(K) \subset M'$. Supposons d'abord que K soit de codimension au moins 2 dans M. Comme i est homotope à un point, K' est isotope à une fibre $K \times \{\text{point}\}$ de la projection $M' \to M$, donc est une fibre d'une submersion $M' \to M$. De plus L' est exacte et (ii) implique $L' \cap v^*K' \neq \emptyset$. Soit (q, p) un point de l'intersection, avec

$$q = (x, y) \in K \times M$$

$$p = (\xi, \eta) \in T_x^*K \times T_y^*M.$$

Alors $(q, p) \in L'$ se traduit par: $\xi = 0$ et $(y, \eta) \in L$. Et $(q, p) \in v^*K'$ par: $y = i(x)$ et $(\xi, \eta) \in [(id \times i_*)(T_xK) \subset T_qM']^\perp$. Donc η est orthogonal à $i_*(T_xK)$, autrement dit $(y, \eta) \in v^*K$. Comme on a déjà $(y, \eta) \in L$, ceci prouve $L \cap v^*K \neq \emptyset$. Reste le cas où K est de codimension 1: il suffit alors de faire un produit de plus: $M'' = K \times K \times M$, $L'' = K_0 \times K_0 \times L$, $K'' = (id \times id \times i)(K)$. □

2.4. *Preuve du Théorème* 2

Par la construction du produit fibré donnée plus haut, on associe à L et L' deux sous-variétés exactes L_1 et L_1' de T^*G (connexes par la preuve du Théorème 1, mais peu importe), et l'on a une application naturelle de $L_1 \cap L_1'$ dans $L \cap L'$. Il suffit donc de montrer que $L_1 \cap L_1'$ est non-vide.

Or $L_1 \cap L_1'$ est en bijection avec $(L_1 \times L_1') \cap \Delta_{T^*G} \subset T^*G \times T^*G$. De façon équivalente, en notant $-L_1'$ la symétrisée dans les fibres et $A \subset T^*G \times T^*G$ l'antidiagonale, $L_1 \cap L_1'$ est en bijection avec $(L_1 \times (-L_1')) \cap A$. Il suffit pour terminer de noter que si l'on identifie $T^*G \times T^*G$ au cotangent $T^*(G \times G)$, alors $A = v^*\Delta_G$ et que Δ_G est une fibre de la submersion $(gh) \mapsto gh^{-1}$ de $G \times G$ sur G: donc le Théorème 3, Partie (ii), implique que $L_1 \cap L_1'$ est non vide.

2.5. *Preuve du Théorème* 4

Nous allons utiliser le résultat suivant de Viterbo ([14], th. A′): Soit $j : T^n \to (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ un plongement lagrangien. Alors sa classe de Maslov est de la forme $\mu(j) = ma$, où $a \in H^1(T^n; \mathbb{Z})$ est primitive et $2 \leq m \leq n + 1$.

Supposons d'abord que M soit une variété quelconque admettant un plongement lagrangien $j : M \to \mathbb{R}^{2n}$, et que i soit un plongement lagrangien de L dans T^*M. Par un théorème de Weinstein, j s'étend en un plongement symplectique (encore noté j) de U_1 dans $\mathbb{R}^{2n}$, où U_1 est un voisinage de M_0 dans T^*M. Par homothétie dans les fibres, la sous-variété $i(M)$ peut être supposée contenue dans U_1, donc on peut définir le plongement lagrangien composé $j \circ i : L \to U_1 \to \mathbb{R}^{2n}$. Notant f la projection de L sur M, on montre aisément la formule reliant les classes de Maslov:

$$\mu(j \circ i) = \mu(i) + f^*(\mu(j)) \in H^1(L; \mathbb{Z}). \tag{$*$}$$

En itérant cette construction, on définit ainsi, à partir du plongement initial $j = j_0$, une suite de plongements lagrangiens

$$j_k = j_0 \circ (i)^k : M \to U_k \to U_{k-1} \to \cdots \to U_1 \to \mathbb{R}^{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où les U_k sont des voisinages (de plus en plus petits) de M_0 dans T^*M. La formule ($*$) donne alors, en posant $A = f^* \in \operatorname{End} H^1(M; \mathbb{Z})$:

$$\mu(j_k) = \mu(j_{k-1} \circ i) = \mu(i) + A(\mu(j_{k-1})),$$

d'où par récurrence sur k:

$$\mu(j_k) = \{id + A + \cdots + A^{k-1}\}(\mu(i)) + A^k(\mu(j)).$$

Plus généralement, soient $\varphi_1, \ldots \varphi_k$ des difféomorphismes de M, et $\Phi_1, \ldots \Phi_k$ leurs extensions symplectiques à T^*M. On peut modifier j_k en intercalant des compositions par les $\varphi_j^* : j'_k = j \circ \Phi_1 \circ i \circ \Phi_2 \circ \cdots \circ \Phi_k \circ i$. Il vient alors, en posant $B_j = \varphi_j^* \in \operatorname{Aut} H^1(M; \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}\mu(j'_k) = {} & \{id + AB_k + \cdots + AB_k AB_{k-1} \ldots AB_2\}(\mu(i)) \\ & + AB_k AB_{k-1} \ldots AB_1(\mu(j)).\end{aligned} \tag{$**$}$$

Dans le cas où $M = T^n$, le Théorème 1, Corollaire b, implique que A est bijective. De plus $\operatorname{Diff}(T^n)$ agit transitivement sur les classes primitives dans $H^1(T^n; \mathbb{Z})$. Donc, en écrivant $\mu(j) = ma$ et $\mu(i) = xb$, où a et b sont des classes primitives et m, $x \geq 0$, on peut imposer que pour tout $r \in [2, k]$ on ait $AB_k AB_{k-1} \ldots AB_r(b) = b$ et que $AB_1(a) = b$. L'égalité ($**$) devient alors

$$\mu(j'_k) = (kx + m)b.$$

D'après le théorème de Viterbo, on doit donc avoir $kx + m \leq n + 1$ pour tout $k \geq 1$: ceci implique $x = 0$. □

REMARQUES. (1) Pour $n = 2$, le résultat de Viterbo a aussi été prouvé par L. V. Polterovich [11], ainsi que l'application au Théorème 4 [12]. D'autre part, dans la version définitive de [14], Viterbo déduit du Théorème 2 le fait que tout plongement lagrangien $T^n \to T^*T^n$ de degré non nul a une classe de Maslov nulle. C'est équivalent au Théorème 4 car un tel plongement peut être rendu exact par une translation dans les fibres, qui ne change pas la classe de Maslov.

(2) Le Théorème 4 reste valable sous les hypothèses:

(i) M admet une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle.
(ii) M se plonge lagrangiennement dans $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.
(iii) Le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ agit transitivement sur les classes primitives dans $H^1(M; \mathbb{Z})$.
(iv) f est de degré ± 1.

En effet le résultat de Viterbo reste valable sous les hypothèses (i) et (ii), et la preuve ci-dessus utilise seulement les hypothèses supplémentaires (iii) et (iv). Il y a, à part les tores, plusieurs autres variétés vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) obtenues par exemple de la façon suivante: selon ([3], 7.2.5), $V \times T^m$ admet un plongement lagrangien dès que V admet une immersion lagrangienne, et il suffit donc de prendre V admettant une métrique à courbure non-positive avec $H^1(V; \mathbb{Z}) = 0$ et $TV \otimes \mathbb{C}$ trivial. En dimension 3 par exemple, cette dernière condition est toujours réalisée et les théorèmes d'uniformisation de Thurston donnent un grand nombre de variétés hyperboliques avec premier groupe de cohomologie nul (par exemple, la chirurgie de Dehn de rapport p/q sur la figure huit de S^3, pour presque toute valeur de p/q).

Enfin, tout récemment Polterovich [12] a étendu le résultat de Viterbo à une classe de variétés comprenant les produits de sphères par des tores. Appliquant notre méthode, il en déduit que pour ces variétés le Théorème 4 reste vrai.

3. Cas des surfaces

Dans cette section L et M sont des surfaces, L étant fermée et M orientable.

3.1. *Immersions lagrangiennes*

D'après la Section 1, il existe une immersion lagrangienne de L dans T^*M si et seulement s'il existe une application fibrée $T_*L \otimes \mathbb{C} \to T_*M \otimes \mathbb{C}$ induisant un isomorphisme sur chaque fibre. Puisque $BSO(2)$ est simplement connexe et que l'application $BSO(2) \to BU(2)$ induit une application nulle sur le π_2, le complexifié d'un fibré réel orientable de rang 2 sur une surface est trivial. Toute surface orientable admet donc une immersion lagrangienne dans le cotangent de toute surface. Le même genre d'argument montre qu'une surface non-orientable L admet une immersion lagrangienne dans T^*M si et seulement si la caractéristique d'Euler de L est paire.

3.2. *Plongements lagrangiens: preuve des conditions nécessaires du Théorème* 5

Soit $L \subset T^*M$ un plongement de degré d, où $d \in \mathbb{Z}/2$ si L n'est pas orientable.

(a) Si L est orientable, la Section 1 donne la condition nécessaire $\chi(L) = d^2\chi(M)$. Reste le cas où $M = T^2$: un plongement lagrangien $i : T^2 \to T^*T^2$ de degré $|d| \geq 2$ produirait un plongement lagrangien exact $i_e : T^2 \to T^*T^2$ de même degré en translatant i par des multiples $C_1\, d\theta$ et $C_2\, d\varphi$ des formes fermées génératrices de $H^1(T^2; \mathbb{R})$. Ceci est interdit par le Corollaire (b) du Théorème 1.

(b) Si L n'est pas orientable, on a vu en 3.1 que $\chi(L)$ doit être paire. De plus la Section 1 donne la condition nécessaire $\chi(L) \equiv d^2\chi(M)$ mod. 4.

3.3. *Eclatement d'un point d'intersection de deux surfaces lagrangiennes*

Pour la construction des plongements lagrangiens ayant les propriétés annoncées dans le Théorème 5, on a d'abord besoin d'une construction locale remplaçant le voisinage d'un point d'intersection par un anneau lagrangien. Nous allons l'obtenir à partir de courbes complexes.

Soit $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2 = \{(z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2))$ muni de la métrique standard. Soit $V \subset \mathbb{R}^4$ une surface minimale. Il existe sur $\mathbb{R}^4$ une structure complexe (constante) pour laquelle V est lagrangienne si et seulement s'il existe une structure complexe (constante) pour laquelle V est complexe ([4]). Comme une courbe complexe est minimale, toute courbe complexe de $\mathbb{C}^2$ donne lieu à une surface lagrangienne de $\mathbb{R}^4$. Identifiant de la façon classique la grassmannienne des 2-plans orientés de $\mathbb{R}^4$ à $S^2 \times S^2$ et les grassmanniennes des plans lagrangiens orientés $\Lambda(2)$ et des droites complexes $\mathbb{CP}^1$ aux sous-espaces $S^1 \times S^2$ et $\{pt\} \times S^2$ respectivement, on voit qu'il

existe un sous-espace R des rotations de $\mathbb{R}^4$, paramétré par le cercle, qui appliquent $\mathbb{CP}^1$ dans $\Lambda(2)$ (par exemple, la rotation $\varphi_{x_1y_2}$ de $\pi/2$ dans le plan $[x_1, y_2]$ appartient à R). L'image par $\varphi \in R$ de toute courbe complexe C est donc une surface lagrangienne de $\mathbb{R}^4$. En particulier, l'image par $\varphi_{x_1y_2}$ de la courbe $C = \{z_1 z_2 = \varepsilon \neq 0\}$ est un anneau lagrangien asymptotique aux plans $[x_1, x_2]$ et $-[y_1, y_2]$ qui, après lissage sur les asymptotes, coïncide avec $[x_1\, x_2] \cup -[y_1, y_2]$ hors d'un compact. Ainsi, deux plans lagrangiens orientés P_1 et P_2 se coupant en un point p donnent lieu, après chirurgie, à un anneau lagrangien plongé coïncidant avec $P_1 \cup \pm P_2$ hors d'un voisinage arbitrairement petit de p, le signe étant positif si $[P_1, P_2]$ définit la même orientation que celle de $\mathbb{C}^2$, c'est-à-dire l'opposé de l'orientation (de fibré) de $T^*\mathbb{R}^2$. On appellera cette chirurgie l'éclatement du point d'intersection.

Il faut encore s'assurer que le lissage lagrangien de $\varphi_{x_1y_2}(C)$ sur les plans $[x_1, x_2]$ et $-[y_1, y_2]$ est possible. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que $\varphi_{x_1y_2}(C)$ soit exacte, c'est-à-dire que $\int_c \lambda = 0$ où c est une courbe non-triviale sur l'anneau $\varphi_{x_1y_2}(C)$: la condition est clairement nécessaire car, après lissage, $\int_c \lambda = \int_{c'} \lambda = 0$, où c' est une courbe dans le plan $[x_1, x_2]$ (ou $-[y_1, y_2]$); elle est suffisante car la condition $\int_c \lambda = 0$ entraîne que $\varphi_{x_1y_2}(C)$ est le graphe d'une forme exacte définie sur un anneau $D_2 \backslash D_1$ de $[x_1, x_2]$ centré à l'origine de $[x_1, x_2]$: le lissage revient donc à prolonger une fonction définie sur $D_2 \backslash D_1$ à une fonction définie sur $[x_1, x_2] \backslash D_1$ et constant sur $[x_1, x_2] \backslash D_3$ (où $D_3 \supset D_2$).

Maintenant, il est facile de voir que $\varphi_{x_1y_2}(C)$ est exacte, c'est-à-dire que

$$\alpha = \varphi^*_{x_1y_2}(\lambda) = \tfrac{1}{2}(z_1\, dz_2 + \bar{z}_1\, d\bar{z}_2)$$

est exacte sur C: comme C est une courbe quadratique de $\mathbb{C}^2$ asymptotique à la droite $D = \{z_1 = 0\}$, α est exact sur C si le résidu de la 1-forme fermée singulière $f^*(\alpha) \in \Omega^1(D)$ est nul, où $f : D \backslash K \to C$ est un paramétrage de C par D défini hors d'un voisinage compact K de l'origine de D. Soient $f(z_2) = (\varepsilon/z_2, z_2)$ et c une courbe de Jordan autour de l'origine de D. On a rés $(f^*\alpha) = \int_c f^*\alpha = (\varepsilon/2) \int_c (dz_2/z_2 + d\bar{z}_2/\bar{z}_2) = 0$. □

3.4. *Construction de plongements lagrangiens*

On termine la preuve du Théorème 5 en construisant un plongement de L dans T^*M de degré d donné.

(a) *Cas orientable.* Notons que la formule $\chi(L) = d^2\chi(M)$ impose la topologie de L.

Supposons d'abord que $\chi(M) < 0$ et $d \neq 0$. Soient $M_1, \ldots, M_{|d|}$, $|d|$ copies de la section nulle M_0 de T^*M, en position générale, obtenues comme graphes de formes fermées sur M et munies de la même orientation que M_0 si d est positif et de l'orientation opposée sinon. Comme le nombre minimal de zéros non-dégénérés d'une forme fermée est $|\chi(M)|$ et que $\chi(M)$ est négatif, chaque point d'intersection $p_{ij} \in M_i \cap M_j$ est de signe négatif relativement à l'orientation de fibré de T^*M. L'éclatement de $p_{ij} \in M_i \cap M_j$, $1 \leq i < j \leq |d|$, donne donc lieu à une anse lagrangienne reliant M_i à M_j qui respecte les orientations de M_i et M_j et on obtient une surface lagrangienne orientée L dans T^*M, qui est clairement de degré d (on peut aussi vérifier que le genre de L est le bon:

$$\begin{aligned} g(L) &= |d|g(M) + (\text{nombre d'anses rajoutées}) - (|d| - 1) \\ &= |d|g(M) - \tfrac{1}{2}\chi(M)|d|(|d| - 1) - |d| + 1 = d^2 g(M) - d^2 + 1, \end{aligned}$$

autrement dit: $\chi(L) = d^2\chi(M)$).

Voyons les autres cas: si d est nul, le plongement lagrangien du tore dans T^*M est obtenu de façon locale à partir du tore $S^1 \times S^1$ de $\mathbb{R}^4$; si $M = S^2$ ou T^2, les seuls cas satisfaisant la condition $\chi(L) = d^2\chi(M)$ se réalisent trivialement.

(b) *Cas non orientable.* Soit L une surface non-orientable de caractéristique paire, telle que $\chi(L) \equiv d^2\chi(M) \bmod 4$.

Si $d = 0$, on construit un plongement lagrangien $L \to T^*M$ de degré 0 à partir des plongements lagrangiens dans $\mathbb{R}^4$ que l'on obtient, à l'exception de la bouteille de Klein, de la façon suivante: pour un entier $k \geq 2$, on se donne k tores lagrangiens $T_1, \ldots, T_k \subset \mathbb{R}^4$ obtenus par translation du tore standard orienté de $\mathbb{R}^4$, de sorte que $|T_i \cap T_j| = 2$ si $j = i + 1$ et 0 sinon. L'éclatement de chaque paire de points d'intersection donne lieu à deux anses lagrangiennes, l'une respectant et l'autre inversant l'orientation. La surface obtenue est non-orientable de caractéristique $-4\,(k - 1)$ (Voir Givental [5] pour une construction différente).

Le cas $d = 1$ se ramène également à une construction locale: l'attachement d'anses à la section nulle. Si S^2 est une sphère de Whitney rencontrant la section nulle $M_0 \subset T^*M$ en deux points, l'éclatement des points d'intersection produit une surface obtenue en attachant à M_0 une anse lagrangienne immergée ayant un point double. L'éclatement du point double donne l'attachement à M_0 d'une anse lagrangienne de genre 2, qui fait chuter la caractéristique d'Euler de 4. □

3.5. *Preuve du Théorème* 6

(a) La première partie de l'énoncé est simplement le Théorème 1(b). Si $d = 0$, alors $\chi(L) = d^2\chi(M)$ implique $L = T^2$. On en déduit $M = S^2$ ou T^2 car autrement $f_{\#}$

ne pourrait être surjective. Mais un plongement exact $T^2 \to T^*T^2$ de degré nul est exclu par le Corollaire (b) du Théorème 1.

(b) Soient $L, L' \subset T^*M$ deux sous-variétés lagrangiennes exactes. Alors $[L] \cdot [L'] = d\,d'\chi(M)$, donc l'intersection est non vide si d, d' et $\chi(M)$ sont non nuls. Si $\chi(M) = 0$, alors M est un espace homogène de groupe compact, donc $L \cap L' \neq \emptyset$ par le Théorème 2. Si d ou d' est nul, la Partie (a) entraîne que $M = S^2$ qui est encore un espace homogène.

(c) La formule de plongement totalement réel implique $L = T^2$, et on a: $|\text{degré}| = \text{indice} = 1$ par (a).

Remerciements

Le second auteur remercie l'UQAM, pour un séjour effectué au printemps 1989, au cours duquel ce travail a été amorcé.

REFERENCES

[1] ARNOLD, V. I., *First steps in symplectic topology*. Russian Math. Surv. *41*, 1–21 (1986).
[2] AUDIN, M., *Cobordismes d'immersions lagrangiennes et legendriennes*. Travaux en cours, Herman 1987.
[3] AUDIN, M., *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels*. Comment. Math. Helv. *63*, 593–623 (1988).
[4] CHEN, B. Y., et MORVAN, J.-M., *Propriétés riemanniennes des surfaces lagrangiennes*. C.R. Acad. Sc. Paris *301*, 209–212 (1985).
[5] GIVENTAL, A. B., *Lagrangian embeddings of surfaces*. Funct. Anal. Appl. *20*, 35–41 (1986).
[6] GROMOV, M., *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*. Invent. math. *82*, 307–347 (1985).
[7] GROMOV, M., *Partial Differential Relations*. Springer 1986.
[8] HOFER, H., *Lagrangian embeddings and critical point theory*. Ann. Inst. H. Poincaré Analyse non linéaire *2*, 407–462 (1985).
[9] LANNES, J., *Sur les immersions de Boy*. Algebraic Topology Aarhus 1982, edited by Madsen and Oliver, Lect. Notes in Math. *1051*, Springer.
[10] LAUDENBACH, F., et SIKORAV, J.-C., *Persistance d'intersection avec la section nulle dans un fibré cotangent*. Invent. Math. *82*, 349–357 (1985).
[11] POLTEROVICH, L. V., *The Maslov class of the Lagrange surfaces and Gromov's pseudo-holomorphic curves*. A paraître dans Math. Z.
[12] POLTEROVICH, L. V., *Monotone Lagrange submanifolds of linear spaces and the Maslov class in cotangent bundles*. A paraître dans Trans. AMS.
[13] SIKORAV, J.-C., *Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne*. Comment. Math. Helv. *62*, 62–73 (1987).
[14] VITERBO, C., *A new obstruction to embedding Lagrangian tori*. To appear in Invent. Math.

[15] WEINSTEIN, A., *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*. Adv. in Math. *6*, 329–349 (1971).

Département de Mathématiques et d'Informatique
Université du Québec à Montréal
Montréal, Canada H3C 3P8

URA 1169 du CNRS "Topologie et dynamique"
Mathématique, bâtiment 425
Centre d'Orsay, Université de Paris-Sud
91405 Orsay, France

Received February 13, 1990