Dérivée des petites valeurs propres des surfaces de Riemann

Autor(en): **Batchelor, Ph.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **73 (1998)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-55106

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 73 (1998) 337–352
0010-2571/98/030337-16 $ 1.50+0.20/0

© 1998 Birkhäuser Verlag, Basel

Commentarii Mathematici Helvetici

Dérivée des petites valeurs propres des surfaces de Riemann

Ph. Batchelor

Résumé. On estime la dérivée des petites valeurs propres du Laplacien sur une famille de surfaces de Riemann. Ces valeurs propres sont considérées comme des fonctions sur l'espace de Teichmüller, et l'estimation des dérivées peut s'exprimer dans ce contexte.

Mathematics Subject Classification (1991). 58G25.

Mots clés. Laplacien, valeurs propres, spectre, géométrie spectrale, surfaces de Riemann.

Dans ce travail nous allons nous intéresser à la variation des petites valeurs propres du Laplacien sur des surfaces de Riemann qui dégénèrent.

Les classes d'isométrie des surfaces hyperboliques de genre γ, (courbure -1) compactes sans bords, *i.e.* les *surfaces de Riemann*, peuvent être paramétrées par $6\gamma - 6$ nombres réels, [Bus92]. Les classes *marquées* décrivent une variété, *l'espace de Teichmüller*, voir [Bus92], chapitre 6.

Une courbe analytique réelle sur cet espace décrira donc une famille de classes d'isométries de surfaces marquées, et les valeurs propres du Laplacien sont des fonctions analytiques réelles bien définies le long de cette courbe, voir [Bus92], 14.9.

Nous nous intéressons aux courbes décrivant des surfaces qui *dégénèrent*, comme dans [Bur90, Col85]. Pour les décrire et pouvoir énoncer les résultats sur les valeurs propres, nous allons adopter les notations suivantes.

Notations. Le genre d'une surface sera noté γ. L'espace de Teichmüller des surfaces de genre γ sera $\mathcal{T}_\gamma$.

S sera la notation habituelle pour une surface de Riemann, S_t sera donc une famille de représentants de la courbe paramétrée par t sur $\mathcal{T}_\gamma$. Rappelons que S est par définition une surface différentiable M munie d'une structure hyperbolique, ou de manière équivalente d'un tenseur métrique tel que $K = -1$.

Un point de $\mathcal{T}_\gamma$ correspond à la classe d'équivalence d'une surface *marquée* : un choix de générateurs du groupe fondamental distingue deux surfaces isométriques par une isométrie non-isotope à l'identité. Pratiquement, on met en exergue sur la surface $3\gamma - 3$ géodésiques fermées simples séparant la surface en $2\gamma - 2$ morceaux

de type topologique $(0,3)$: les *pantalons*, voir [Bus92] chapitre 3, en particulier le théorème 3.6.4. Ces géodésiques sont notées $c_k = c_k(S)$, $k = 1 \dots 3\gamma - 3$. Un choix de paramètres est par exemple les longueurs de ces géodésiques par rapport à la structure, et le paramètre de twist le long de ces géodésiques, voir les références standards, p.ex. [Abi80, Bus92]. Le twist sera fixé dans tout l'article. Les pantalons sont eux-mêmes obtenus par collage d'hexagones hyperboliques droits.

Parmi ces géodésiques, un certain nombre $p \leq 3\gamma - 3$ que l'on choisit être les p premières, auront une longueur qui tend vers zéro avec ε: on écrit (Longueur$(c_k(S_t))$ $= \alpha_k(\varepsilon + t)$, $k = 1 \dots p$, où α_k est une constante positive) car nous voulons dériver en ε, *i.e.* en $t = 0$. Les autres géodésiques ont une longueur fixée que nous supposerons être supérieure à une constante, p.ex. $1/2$ (voir [Bus92], théorème 4.1.6 pour une constante géométrique).

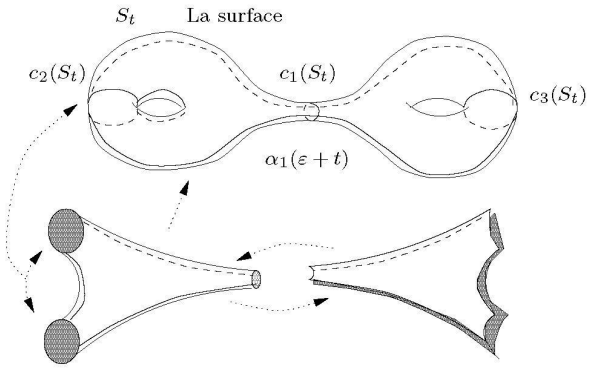

Figure 1.
Pantalons et hexagones correspondant à une surface

En général, ε ne sera pas noté comme indice afin de ne pas trop alourdir les notations. En particulier, $S := S_0$.

Résultats. Si le complément des géodésiques c_k, $k = 1 \dots p$ contient $N + 1$ $(1 \leq N \leq 2\gamma - 3)$ composantes M_j, $j = 1 \dots N + 1$ de genre γ_j, le théorème de Schoen, Wolpert et Yau [SWY80] implique que les N premières valeurs propres non-nulles tendent vers 0 avec ε. Dans la suite, nous parlerons souvent de *petites valeurs propres* et de *petites géodésiques*. Plus précisément, soit $\lambda_n(\varepsilon)$ la n-ième valeur propre du Laplacien sur S. On rappelle que S est un représentant d'une famille de surfaces dépendant de ε:

Théorème 1. (Schoen, Wolpert et Yau, [SWY80]) *Il existe deux constantes positives $c_1(\gamma)$, $c_2(\gamma)$ ne dépendant que du genre, et une constante $\varepsilon_0 > 0$ tels que*

pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $n \leq N$,

$$c_1(\gamma) \leq \frac{\lambda_n(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq c_2(\gamma)$$

et $\lambda_{N+1}(\varepsilon)$ *est bornée inférieurement par une constante ne dépendant que du genre.*

Intuitivement, pour ε suffisamment petit, la surface ressemble à un graphe $G = G(\gamma_j, \alpha_k)$, dont les sommets, correspondant aux M_j, ont un poids déterminé par γ_j. Colbois [Col85] améliore fortement l'estimation de [SWY80] en calculant la limite du rapport $\lambda_n(\varepsilon)/\varepsilon$ (voir aussi [Burg90]):

Théorème 2. (Colbois, [Col85]) *Soient* $\delta_n(G)$, $n = 1 \ldots N$ *les valeurs propres non-nulles du Laplacien du graphe associé à la famille de surfaces, défini dans [Col85]. Alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_n(\varepsilon)}{\varepsilon} = \delta_n(G).$$

Burger [Bur90] exprime ce résultat sous une forme qui suggère que la fonction $\lambda_n(\varepsilon)$ est asymptotiquement linéaire en ε, mais ne donne aucune information sur la *dérivée* de $\lambda_n(\varepsilon)$ au voisinage de zéro. Dans cet article, nous montrerons que les valeurs propres $\lambda_n(\varepsilon)$, $n = 1 \ldots N$ décroissent lorsque $\varepsilon \to 0$, en estimant leurs dérivées, qui sont proches d'une constante pour ε petit. Soit $\lambda_n'(\varepsilon)$, la dérivée par rapport à ε de $\lambda_n(\varepsilon)$. Le but de cet article est de démontrer le théorème:

Théorème 3. *Il existe une constante* $\beta = \beta(G) > 0$ *explicite, telle que pour la variation définie ci-dessus,*

$$\delta_n - \beta \frac{1}{|\log \varepsilon|} \leq \lambda_n'(\varepsilon) \leq \delta_n + \beta \frac{1}{|\log \varepsilon|},$$

en particulier, $\lambda_n(\varepsilon)$ *est monotone en fonction de* ε *pour* $\varepsilon \leq e^{-\beta/\delta_n}$.

Remarque 0.1. Le théorème 2 peut être considéré comme donnant la dérivée à la limite. Ici, nous avons un contrôle sur un intervalle bien déterminé. (Une valeur pour β peut être extraite de la démonstration.) Wolpert étudie le même problème pour des valeurs propres ne tendant pas vers zéro, en particulier celles supérieures à 1/4 dans [Wol92a, Wol92b]. Voir aussi [CC89].

1. Difféomorphismes par morceaux

Le spectre est un invariant riemannien. Cependant, dans sa définition entrent des concepts comme le Laplacien, fonctions propres, dont la définition nécessite un tenseur métrique explicite. Ici, nous devrions construire une *famille* de tenseurs métriques hyperboliques sur *une* variété différentiable. Une telle construction est en général très difficile (voire impossible) sur une variété n'ayant pas une unique carte. Nous allons effectuer cette construction sur des polygones dont le collage sera une surface isométrique à la surface voulue S. Il sera alors nécessaire de contrôler le passage d'un polygone à l'autre, *i.e.* la discontinuité du tenseur métrique induit sur S par cette décomposition en polygones (voir lemme 1.3). Il existe une infinité de possibilités pour ce faire (voir [BC90], [Bus92] 14.6); cependant, comme nous voulons dériver les valeurs propres, il est préférable de faire un choix pour lequel le tenseur métrique soit le plus simple possible sur les parties les plus importantes. Pour les surfaces qui dégénèrent, les *parties épaisses et minces* jouent un rôle essentiel. Sur *une* surface de Riemann, la partie mince est définie comme étant l'ensemble des points où le rayon d'injectivité est inférieur à une certaine constante, voir [Bus92] chapitre 4 pour plus de détails. Nous utiliserons directement la définition suivante, spécifique à notre problème:

Définition 1.1. (Parties minces et épaisses) Nous appellerons *partie mince* de S_t (représentant un point de la courbe sur $\mathcal{T}_\gamma$), l'ensemble des points dont la distance à l'une des géodésiques c_k, $k = 1 \dots p$ est inférieure à $\log(\frac{1}{\text{Longueur}(c_k(S_t))})$ $= -\log(\alpha_k(\varepsilon + t))$. La *partie épaisse* est le complément de la partie mince.

La partie mince a une géométrie simple. Pour plus de détails, on renvoie au paragraphe 4.1 de la référence standard pour cet article: [Bus92]. C'est la réunion de cylindres disjoints, notés $C^{(k)}$, voisinages des géodésiques qui dégénèrent. Le choix des parties minces a été effectué de manière à permettre l'introduction de coordonnées de Fermi (r, θ) basées sur c_k, r étant la distance à c_k et θ la distance à un point fixé le long de c_k. On rappelle que les coordonnées de Fermi sont définies sur tout voisinage d'un segment géodésique. En coordonnées de Fermi (r, θ), une métrique hyperbolique prend la forme:

$$dr^2 + \cosh^2 r \, d\theta^2.$$

Ces coordonnées seront l'outil principal pour notre construction, la décomposition de la surface. Les morceaux de la décomposition seront des domaines sur lesquels les coordonnées seront globalement définies.

Définition 1.2. (Quadrilatères standards) Un *quadrilatère standard* sera un domaine du plan hyperbolique donné en coordonnées de Fermi par $r \in [r(\theta), R(\theta)]$, $\theta \in [l_1, l_2]$ avec $r(\cdot) < R(\cdot) \in C^\infty([l_1, l_2])$. Une *paramétrisation standard* sera le

difféomorphisme d'un domaine isométrique à un polygone standard dans $[0,1]^2$, donné par $\rho := \frac{r-r(\theta)}{R(\theta)-r(\theta)}$, $\tau := \frac{\theta-l_1}{l_2-l_1}$.

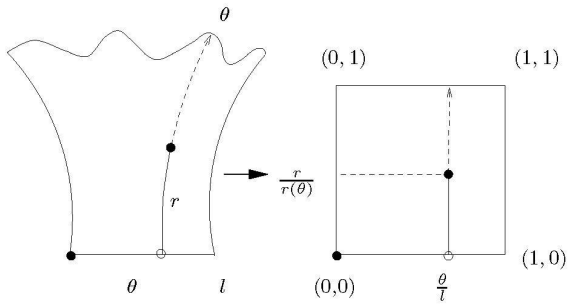

Figure 2.
Quadrilatère standard

Définition 1.3. (Partitions admissibles) Une partition admissible de S_t sera une décomposition de S_t en domaines isométriques à des quadrilatères standards.

Elle sera subordonnée à la décomposition en parties minces et épaisses, et à la décomposition en pantalons dans le sens suivant. On a fixé une décomposition en pantalons telle que les bords des pantalons contiennent les petites géodésiques c_k. Chaque pantalon dont un des bords est une copie d'une petite géodésique contient un collier (une moitié de cylindre) autour de cette petite géodésique. Si l'on considère le pantalon comme collage de deux hexagones isométriques, cette partition du pantalon détermine une partition des hexagones. Un hexagone n'est pas encore un domaine isométrique à un quadrilatère standard, mais il est aisé de fixer une décomposition d'un hexagone en quadrilatères, (figure 4) i.e. chaque polygone est inclus dans *une* composante de ces partitions de la surface.

Ces partitions seront telles que les longueurs des côtés seront des fonctions réelles analytiques de t. On note $\{K_t^i\}_{i\in I}$ la partition admissible de S_t. ($K_0^i = K^i$). Concrètement, on considérera la décomposition en hexagones induite par les pantalons, les hexagones dont un des côtés correspond à une géodésique qui dégénère étant encore séparés en parties épaisses et minces. La partie épaisse est découpée en quadrilatères par des géodésiques perpendiculaires aux bords des hexagones, et qui passent soit par les sommets opposés, soit perpendiculairement aux côtés opposés, en fonction du type de l'hexagone: zéro, un, deux, ou trois côtés qui dégénèrent.

Pour simplifier la description, on peut supposer S_t décrite par un tenseur métrique g_t (*inconnu*) sur M. Dans ce cas, K^i se déforme en K_t^i. Grâce à une paramétrisation standard, on peut introduire une métrique *explicite* g_t^i sur K^i telle

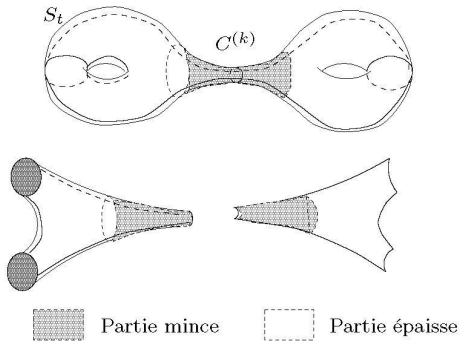

Figure 3.
Parties épaisses et minces

que (K_t^i, g_t) et (K^i, g_t^i) soient isométriques, par ϕ_t^i ($\phi_0^i = id$). L'utilisation de la partition permettra d'exprimer la dérivée de g_t (et donc de λ_n) en fonction de g_t^i et ϕ_t^i. ϕ_t^i est défini à l'aide des coordonnées standards de la définition 1.2. Ce sont ces dérivées que nous devons contrôler.

Définition 1.4. Soit une famille de tenseurs métriques g_t, telle que $g_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ sur une variété différentiable M. La forme volume associée à g_t est notée ω_{g_t}, (ω en $t = 0$). Nous noterons D le tenseur de déformation associé, défini par $(\frac{d}{dt} g_t(X,Y))|_{t=0} =: \langle X, DY \rangle$. La variation de la forme volume est décrite par $(\frac{d}{dt}\omega_{g_t})|_{t=0} =: v\omega$.

Si ϕ_t est une famille de difféomorphismes telle que $\phi_0 = id$, nous noterons V le champ vectoriel de variation: $(\frac{d}{dt}\phi_t)|_{t=0} =: V$. Si $g_t = \phi_t^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ alors $v = divV$.

Soit $R_t^{(k)} := \log 1/(\alpha_k(\varepsilon + t))$. On introduit directement sur tous les cylindres $C^{(k)}$ formant la partie mince un tenseur métrique explicite g_t^k: $C^{(k)}$ est isométrique à $[0,1]^2$ muni du tenseur métrique

$$(R_t^{(k)})^2 d\rho^2 + \alpha_k^2(\varepsilon + t)^2 \cosh^2(R_t^{(k)}\rho) d\tau^2; \quad (\rho, \tau) \in [0,1]^2$$

en coordonnées standards (voir la définition 1.2). Dans ces coordonnées, le tenseur est diagonal pour toute valeur du paramètre.

Lemme 1.1. (Parties minces) *Soit D^k, le tenseur de déformation associé au tenseur métrique précédent. D^k est diagonal. v^k est une fonction décroissante de la distance, symétrique sur $[-R^{(k)}, R^{(k)}]$, qui satisfait:*

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{\log \alpha_k \varepsilon}\right) \geq v^k(r) \geq \frac{1}{\varepsilon \log \alpha_k \varepsilon} + \frac{2(\alpha_k \varepsilon)^2}{1 + (\alpha_k \varepsilon)^2}$$

Preuve. Un calcul direct donne

$$D^k_{\rho\rho}(\rho,\tau) = \frac{2}{\varepsilon \log \alpha_k \varepsilon}, \quad D^k_{\rho\tau}(\rho,\tau) = 0, \quad D^k_{\tau\tau}(\rho,\tau) = \frac{2}{\varepsilon}(1 - \rho \tanh R^{(k)} \rho).$$

□

La métrique g^i_t sur K^i dans la partie épaisse est donnée par le même procédé de reparamétrisation que sur la partie mince (définition 1.2). Cette fois, les côtés paramétrés par $r(\theta), R(\theta)$ opposés à la base n'étant pas à une distance constante, la métrique induite n'est plus diagonale. Si le quadrilatère K^i est dans un hexagone dont un des côtés dégénère, on utilise les coordonnées de Fermi basées sur ce côté. (voir figure 4)

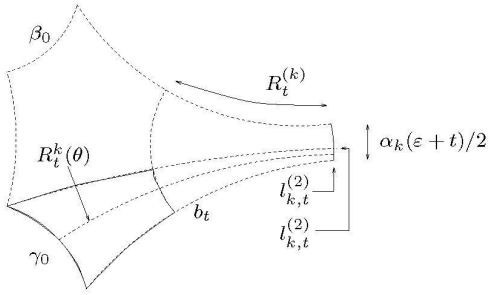

Figure 4.
Un quadrilatère de la partie épaisse (bords: lignes pleines)

Lemme 1.2. *Il existe une constante C telle que $\|D^i\| \leq C$ pour K^i dans la partie épaisse.*

Preuve. Nous nous restreindrons au cas d'un hexagone dont un seul des côtés dégénère, les deux autres côtés indépendants étant de longueur β_0, γ_0. Les autres cas seront traités de manière complètement analogue. Soit $K^{i_k}_t$ dans l'intersection de ce pantalon avec la partie épaisse, déterminé par des segments géodésiques perpendiculaires à c_k. En coordonnées de Fermi basées sur c_k, un tel quadrilatère est décrit par $r \in [R^k_t, R^k_t(\theta)]$, $\theta \in [l^{(1)}_{k,t}, l^{(2)}_{k,t}]$, où l'on n'a pas écrit les indices i, k, car les estimations ne dépendent pas du polygone particulier si l'on choisit dans le calcul qui suit les constantes de manière appropriée. On note que le côté $\{r = R^k_t\}$ n'est pas géodésique. Le tenseur métrique induit est alors:

$$A_t(\tau)^2\, d\rho^2 + 2\rho A_t(\tau) B_t(\tau)\, d\rho d\tau + \left(\rho^2 B_t^2(\tau) + l_t^2 \cosh^2(R_t + A_t(\tau)\rho)\right) d\tau^2 \quad (1)$$

où l'on a posé

$$l_t := l^{(2)}_{k,t} - l^{(1)}_{k,t}; \quad A_t(\tau) := R^k_t(l_t\tau)) - R^k_t; \quad B_t(\tau) := \frac{\partial}{\partial \tau} A_t(\tau).$$

A nouveau, on écrira l, etc... au lieu de l_0.
Affirmation 1 $l'/l = 1/\varepsilon + O(\varepsilon) = -(R^k)' + O(\varepsilon)$.
Soient $d_1 := \coth\beta_0 \coth^2\gamma_0$, $d_2 := \coth\gamma_0/\sinh\beta_0$. Comme

$$\coth l_t = \coth\gamma_0 \cosh b_t = \frac{1}{\sinh\alpha_k(\varepsilon+t)}(d_1 + d_2\cosh(\alpha_k(\varepsilon+t)), \tag{2}$$

on déduit

$$l_t = \frac{\alpha_k(\varepsilon+t)}{d_1+d_2}(1 + O((\varepsilon+t)^2)) \tag{3}$$

De même, en dérivant l'équation (2):

$$-\frac{1}{\sinh^2 l}l' = -\frac{\alpha_k\cosh\alpha_k\varepsilon}{\sinh^2\alpha_k\varepsilon}(d_1 + d_2\cosh\alpha_k\varepsilon) + d_2\alpha_k. \tag{4}$$

On multiplie (4) par $-\sinh^2 l/l = O(l) = O(\varepsilon)$, pour obtenir,

$$\frac{l'}{l} = \frac{\alpha_k(1+O(\varepsilon^2)}{\sinh^2\alpha_k\varepsilon}\frac{\sinh^2(\frac{\alpha_k\varepsilon}{d_1+d_2}(1+O((\varepsilon)^2)))}{\frac{\alpha_k\varepsilon}{d_1+d_2}(1+O((\varepsilon)^2))}(d_1 + d_2(1+O(\varepsilon^2))) + O(\varepsilon) \tag{5}$$

Où l'on a introduit l'équation (3).
Affirmation 2 $A(\tau) = C(\tau) + O(\varepsilon^2)$ et $A'(\tau) = R' + O(\varepsilon)$, $C(\tau)$ borné uniformément en ε.
Soit $A_t(0) := b_t$. Remarquons d'abord que $\cosh b_t = e_t^b(1+e^{-2b_t})/2$. Il s'ensuit

$$\cosh b_t = \tanh\beta_0\coth l_t \implies$$
$$b_t = \log\frac{1}{\sinh l_t} + \log 2 + \log\tanh\beta_0 + \log\cosh l_t - \log(1+e^{-2b_t}).$$

ce qui, avec $\sinh R_t(\theta) = \cosh\theta\tanh b_t\cosh a$, implique l'affirmation.
Affirmation 3 $|B(\tau)| \le C\varepsilon^2$.
Par définition $B(\tau) = l\frac{\partial}{\partial\theta}R(\theta)$. La dérivation de l'expression pour $\sinh R(\theta)$ par rapport à θ implique

$$\frac{\partial R(\theta)}{\partial\theta} = \tanh\theta\tanh R(\theta).$$

Or $\theta \le l \le C\varepsilon$. Il s'ensuit que les termes essentiels sont les termes diagonaux en coordonnées ρ, τ. Le lemme se déduit directement des estimations sur les coefficients. □

Les différents g_t^i ne forment pas une métrique lisse. Nous avons par contre une relation avec g_t, la métrique sur S_t, par les difféomorphismes ϕ_t^i. Comme g_t est localement isométrique à g_t^i par ϕ_t^i, sa dérivée sera fonction de la dérivée D^i et du déplacement relatif des points selon ϕ_t^i. Cet effet n'intervient que sur les bords des

polygones standards, par l'intermédiaire des champs vectoriels de variation. En d'autres termes, il nous faut une estimation sur «l'erreur» commise en passant d'un polygone à l'autre le long d'un côté commun.

Lemme 1.3. *Soit V^i le champ vectoriel de variation associé à ϕ^i, $V^{ij} = V^i - V^j$ décrit la discontinuité de ϕ^i relativement à ϕ^j le long d'un segment commun à K^i et K^j. Alors il existe une constante C telle que $|V^{ij}| \leq C\varepsilon$.*

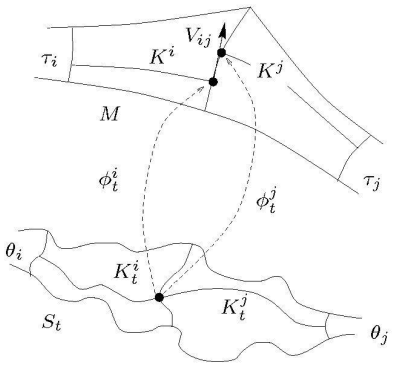

Figure 5.
Difféomorphisme

Preuve. Supposons que K_t^i et K_t^j soient compris dans la partie épaisse de deux hexagones adjacents dont un côté dégénère. Un point de leur côté adjacent, $K_t^i \cap K_t^j$ aura des coordonnées θ_j respectivement θ_i qui devront satisfaire $\cosh b^j \tanh \theta^j = \cosh b^i \tanh \theta^i$, ce qui est la condition que ce point p doit être à distance égale d'un des sommets communs de K_t^i et K_t^j (voir figure 1). Le difféomorphisme ϕ_t^{ij} restreint au bord est donc donné par

$$\tau^i \mapsto \frac{1}{l_t^i} \arg\tanh \left(\frac{\cosh b_t^j}{\cosh b_t^i} \tanh l_t^j \tau^i \right)$$

De l'équation (6) on tire $\cosh b_t^i = \frac{C^i}{l_t^i}(1 + O(\varepsilon + t)^2)$, d'où

$$\frac{\cosh b_t^j}{\cosh b_t^i} \tanh l_t^j \tau^i = \frac{C^i}{C^j} l_t^i \tau^i (1 + O((\varepsilon + t)^2) \tag{7}$$

où C^i, C^j sont des constantes indépendantes de t, ε. On introduit (7) dans le développement de $\operatorname{arctanh} x = x + O(x^3)$, ce qui donne

$$\phi_t^{ij} : \tau^i \mapsto \frac{C^i}{C^j} \tau^i (1 + O((\varepsilon + t)^2). \tag{8}$$

L'application en (8) est réelle analytique en ε, on peut estimer sa dérivée en dérivant terme à terme. $\square$

2. Estimations sur les fonctions propres

2.1. Fonctions propres et fonctions test

Dans nos estimations, nous rencontrerons naturellement les fonctions propres associées aux petites valeurs propres. Plus tard, nous allons établir une formule de variation pour les valeurs propres. Nous n'allons pas effectuer les calculs dans la formule de variation directement avec la fonction propres, mais d'abord remplacer ces fonctions propres par des fonctions tests beaucoup plus simples. Le but de cette section est de déterminer cet espace de fonctions test. Nous aurons besoin de ces estimations seulement *après* la variation, nous prendrons donc $t = 0$ dans cette section.

2.2.

On note $H = H(S)$ l'espace de Hilbert des fonctions admissibles sur S, E, l'espace engendré par les fonctions propres pour les $N+1$ premières valeurs propres (0 étant la première) et $E_h \subset H$, l'espace des fonctions constantes sur les parties épaisses, harmoniques et radiales sur les cylindres $C^{(k)}$ (fonctions uniquement de la distance à c_k).

La proposition suivante est inspirée du lemme des petites valeurs propres de [CCdV88].

Proposition 2.1. *Soit $(h, u) \in E_h \times E$ tel que $\|u\|_{L^2} = 1$, et tel que la projection orthogonale de h sur E soit u. Il existe une constante C telle que*

$$\|u - h\|_H \leq C\varepsilon$$

Remarque: Il s'ensuit $\|h\|_{L^2} \leq 1 + C\varepsilon$.

Preuve. Soit $\bar{h} := h/\|h\|_{L^2}$, $\bar{u} := u/\|h\|_{L^2}$. Par définition, $\bar{h} - \bar{u}$ est perpendiculaire à E. Il s'ensuit par la caractérisation variationnelle des valeurs propres [Chavel] que le quotient de Rayleigh de $\bar{h} - \bar{u}$ est supérieur à la $N+1$-ième valeur propre. Par le théorème de Schoen, Wolpert et Yau, [SWY80], cette valeur propre est bornée inférieurement par une constante $C_1 > 0$ qui ne dépend que du genre.

Dans [CCdV88], il est démontré que $(\nabla f, \nabla g) \leq C_2\varepsilon\|f\|_{L^2}\|g\|_{H^1}$ pour $f \in E_h$, $g \in H$. Il s'ensuit (car $\Delta(E) \subset E$ et $\bar{h} - \bar{u} \perp E$).

$$\|\nabla(\bar{h} - \bar{u})\|_{L^2}^2 = (\nabla(\bar{h} - \bar{u}), \nabla\bar{h})^2 \leq C_2\varepsilon\sqrt{\|\nabla\bar{h} - \nabla\bar{u}\|_{L^2}^2 + \|\bar{h} - \bar{u}\|_{L^2}^2}.$$

On en déduit $\|\nabla(\bar{h}-\bar{u})\|_{L^2}^2 \leq C_2^2(1+\frac{1}{C_1})\varepsilon^2$, d'où $\|\bar{h}-\bar{u}\|_{L^2}^2 \leq \frac{C_2^2}{C_1}(1+\frac{1}{C_1})\varepsilon^2$, ce qui donne une constante $(1+\frac{1}{C_1})^2 C_2^2$.

Il faut encore remplacer $\|\bar{h}\|_{L^2}=1$ par $\|u\|_{L^2}=1$. Cela revient à multiplier la constante par $1/(1-C\varepsilon)$. Pour ε suffisamment petit, on peut prendre p.ex.

$$C := 2\left(1+\frac{1}{C_1}\right)^2 C_2^2$$

□

2.3. Estimation sur les fonctions test

Considérons une fonction de E_h. Sur la partie épaisse, elle est par définition constante. Sur la partie mince, nous aurons besoin d'un certain nombre d'estimations liant la fonction aux termes provenant de la dérivée de la métrique. La restriction d'une fonction $\tilde{h}$ de E_h à un cylindre $C^{(k)}$ est harmonique radiale. C'est une fonction de r, telle que $\partial_r(\cosh r\partial_r)\tilde{h}=0$. Elle sera donc de la forme $a_k h(r)+b_k$ sur $C^{(k)}$, où $h(r) := \int_0^r dx/\cosh x$ et a_k et b_k sont déterminées par les conditions de bord. On rassemble ses caractéristiques dans le lemme suivant:

Lemme 2.1. *h est une fonction monotone, antisymétrique, bornée par*

$$\lim_{r\to\infty} h(r) = \pi/2.$$

Soit $\bar{C}^{(k)}$, la partie du cylindre étant à distance inférieure à $\sqrt{R^{(k)}}$ de c_k. On a

1. $\lim_{r\to\infty}\|h\|_{L^2(C^{(k)})}^2 = \frac{\pi^2}{4}$,
2. $\|\nabla h\|_{L^2(C^{(k)})}^2 \leq \alpha_k\pi\varepsilon$,
3. $\|\nabla h\|_{C^{(k)}\setminus\bar{C}^{(k)}}^2 \leq C\dfrac{\varepsilon}{|\log\varepsilon|}$.

Preuve. Par définition $h'(r)=1/\cosh r$, d'où la monotonie et l'antisymétrie. On peut en fait donner h explicitement $h(r)=2\arctan(e^r)-\pi/2$, ce qui donne la limite.

On a aussi $|\nabla h|^2 = 1/\cosh^2 r$, d'où $\|\nabla h\|_{L^2(C^{(k)})}^2 = 2\alpha_k\varepsilon h(R^{(k)})$. Par symétrie, il suffit de considérer $\int_0^{R^{(k)}} h^2(r)\alpha_k\varepsilon\cosh r\,dr$. On intègre par parties deux fois en utilisant $h'(r)=1/\cosh r$, pour obtenir

$$\|h\|_{L^2(C^{(k)})}^2 = 2\alpha_k\varepsilon\left(h^2(R^{(k)})\sinh R^{(k)} - 2h(R^{(k)})\log\cosh R^{(k)} + 2\int_0^{R^{(k)}}\frac{\log\cosh r}{\cosh r}\,dr\right). \quad (9)$$

Maintenant

$$\sinh R^{(k)} = \frac{1-\alpha_k\varepsilon^2}{2\alpha_k\varepsilon}; \quad \log\cosh r \le \log e^r \le r, \ \ (r \ge 0)$$

$$\int_0^{R^{(k)}} \frac{\log\cosh r}{\cosh r}\, dr \le 2\int_0^{R^{(k)}} re^{-r}\, dr = 2(1-e^{-R^{(k)}}(1-e^{-R^{(k)}})) \le 2.$$

□

On note que $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{vol}(\bar{C}^{(k)}) = 0$, mais $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{vol}(C^{(k)}\backslash\bar{C}^{(k)}) > 0$. Nous allons maintenant estimer des termes de la forme $(f, v^k)_{C^{(k)}}$, où $v^{(k)}$ a été donné dans le lemme 1.1:

Lemme 2.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*
1. $\left|(h^2, v^k)_{C^{(k)}}\right| \le C|\log\varepsilon|$,
2. $\left|(|\nabla h|^2, v^k)_{C^{(k)}\backslash\bar{C}^{(k)}}\right| \le C\frac{1}{|\log\varepsilon|}$
3. $\left|(|\nabla h|^2, v^k)_{\bar{C}^{(k)}} - \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla h\|^2_{\bar{C}^{(k)}}\right| \le C\frac{1}{|\log\varepsilon|}$.

Preuve.
1. La dérivation de

$$\int_0^{R^{(k)}} h^2(r)\alpha_k\varepsilon\cosh r\, dr = \int_0^1 h^2(R^{(k)}\rho)\alpha_k\varepsilon R^{(k)}\cosh(R^{(k)}\rho)\, d\rho$$

donne

$$\frac{1}{2}(h^2, v)_{C^{(k)}} - \frac{2}{R^{(k)}}\int_0^{R^{(k)}} h(r)r\, dr.$$

que l'on peut comparer avec la dérivée de (9), qui donne

$$h^2(R^{(k)})(\sinh R^{(k)} - \cosh R^{(k)}) - 2h(R^{(k)})\log\cosh R^{(k)} + 2\int_0^{R^{(k)}} \frac{\log\cosh r}{\cosh r}\, dr$$

2. On a $\max_{C^{(k)}}|v^{(k)}| \le \varepsilon^{-1}$. L'estimation du lemme 2.1 pour $\|\nabla h\|_{L^2(C^{(k)}\backslash\bar{C}^{(k)})}$ implique l'estimation.
3.

$$\begin{aligned}|(v^k - \frac{1}{\varepsilon}, |\nabla h|^2)_{\bar{C}^{(k)}}| &= 2|\frac{\alpha_k}{R^{(k)}}\int_0^{\sqrt{R^{(k)}}}(r\frac{\sinh r}{\cosh^2 r} + \frac{1}{\cosh r})\, dr| \\ &= 2\frac{\alpha_k}{R^{(k)}}|\left(-\frac{r}{\cosh r}|_0^{\sqrt{R^{(k)}}} + 2h(\sqrt{R^{(k)}}\right)|\end{aligned}$$

qui satisfait l'inégalité voulue □

3. Démonstration

3.1. Formule de variation

La dérivation de l'équation aux valeurs propres donne

$$\Delta' u_n + \Delta(u_n)' + \lambda_n'(\varepsilon) u_n + \lambda_n(\varepsilon)(u_n)' = 0$$

Cette égalité est multipliée avec u_n et intégrée partiellement. On obtient: $\lambda_n'(\varepsilon) = -(u_n, \Delta' u_n)$. Un calcul direct donne (voir [Bat97])

$$(f, \Delta' g) = (\nabla f, (D - v)\nabla g) - (f, v\Delta g)$$

Ce qui donne le lemme suivant:

Lemme 3.1.

$$\lambda_n'(\varepsilon) = (v, \Delta(|u_n|^2)) - (\nabla u_n, D\nabla u_n)$$

On pose $\Lambda_n(f, D, M) := (v, |\nabla f|^2 - \lambda_n(\varepsilon) f^2) - (\nabla f, D\nabla f)$ autrement dit $\lambda_n'(\varepsilon) = \Lambda_n(u_n, D, M)$. L'objectif est d'estimer $\eta(\varepsilon) := \lambda_n'(\varepsilon) - \lambda_n(\varepsilon)/\varepsilon$.

3.2. Substitution de la métrique

Comme $M = \cup_i K^i$, avec $K^i \cap K^j$ de mesure zéro, on peut écrire la dérivée sous forme de somme: $\lambda_n' = \sum_i \Lambda_n(u_n, D, K^i)$. Maintenant, nous allons utiliser la section 1. Sur K_t^i, nous avons

$$g_t|_{K_t^i} = (\phi_t^i)^* g_t^i,$$

où g_t^i est une métrique donnée explicitement et $\phi_0^i = id_{K^i}$. La dérivation par rapport à t donne

$$D|_{K^i} = D^i + \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} (\phi_t^i)^* g_0^i.$$

Le deuxième terme correspond à la variation de K^i sous l'effet de ϕ_t^i. L'effet sur la variation de la valeur propre ne peux dépendre que de la forme de K_t^i, donc du champ V^i sur le bord. (Plus exactement sa partie normale au bord), voir [SokolowskiZolesio] pour une théorie générale. Des formules explicites pour ce cas particulier se trouvent dans [Bat97]. On écrit

$$\lambda_n' = \sum_i \Lambda(u_n, D^i, K^i) + \sum_i \Gamma(V^i, n^i, \partial K^i)$$

Γ provenant de la transformation du deuxième terme en une intégrale sur le bord. Supposons que K^i et K^j soient adjacents le long de c^{ij}. Alors $\Gamma(V^i, n^i, c^{ij}) + \Gamma(V^j, n^j, c^{ij}) = \Gamma(V^i, n^i, c^{ij}) - \Gamma(V^j, n^i, c^{ij}) = \Gamma(V^{ij}, n^i, c^{ij})$. Et donc

$$\lambda_n' = \sum_i \Lambda(u_n, D^i, K^i) + \sum_{ij} \Gamma(V^{ij}, n^i, c^{ij}).$$

3.3. Substitution de la fonction

Nous allons maintenant utiliser les résultats des sections 1 et 2 pour estimer individuellement les différents termes. On note que

$$\eta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(\sum_k \|\nabla u_n\|^2_{2,\bar{C}^{(k)}} - \lambda_n(\varepsilon)) + \sum_k (v^k - \frac{1}{\varepsilon}, |\nabla u_n|^2)_{\bar{C}^{(k)}} \tag{10}$$

$$+ \sum_k (v^k, |\nabla u_n|^2)_{C^{(k)}\setminus\bar{C}^{(k)}} - \lambda_n(\varepsilon)\sum_k (v^k, |u_n|^2)_{C^{(k)}} \tag{11}$$

$$+ \sum_{i, K^i \subset \text{épais}} (v^i, |\nabla u_n|^2 - \lambda_n(\varepsilon)|u_n|^2)_{K^i} + (\nabla u_n, D^i \nabla u_n) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}. \tag{12}$$

où il est entendu que la somme sur les k représente la somme sur les parties minces, et la somme sur les i la somme sur les polygones de la partie épaisse.

1. *Le terme* $\frac{1}{\varepsilon}(\sum_k \|\nabla u_n\|^2_{2,\bar{C}^{(k)}} - \lambda_n(\varepsilon))$ On déduit de la section 2 qu'il existe une fonction $h_n \in E_h$ et une constante C telles que

$$|\lambda_n(\varepsilon) - \|\nabla h_n\|^2| \leq C\varepsilon^2.$$

Maintenant, par les estimations sur les fonctions harmoniques radiales, lemme 2.1

$$\sum_k \|\nabla h_n\|^2_{C^{(k)}\setminus\bar{C}^{(k)}} \leq \mathrm{C}\frac{\varepsilon}{|\log\varepsilon|}$$

Par conséquent, comme $\|\nabla h_n\|^2_{M\setminus\cup_k C^{(k)}} = 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon}|\lambda_n - \sum_k \|\nabla h_n\|^2_{\bar{C}^{(k)}}| \leq \mathrm{C}\frac{1}{|\log\varepsilon|}.$$

2. *Le terme* $(v^k - \frac{1}{\varepsilon}, |\nabla u_n|^2)_{\bar{C}^{(k)}})$ Par le lemme 2.2, on obtient

$$(v^k - \frac{1}{\varepsilon}, |\nabla u_n|^2)_{\bar{C}^{(k)}}) \leq \mathrm{C}\frac{\varepsilon}{|\log\varepsilon|}.$$

3. *Le terme* $(v^k, |\nabla u_n|^2)_{C^{(k)}\setminus\bar{C}^{(k)}}$ Du lemme 2.2 on tire:

$$(v^k, |\nabla u_n|^2)_{C^{(k)}\setminus\bar{C}^{(k)}} \leq \mathrm{C}\frac{1}{|\log\varepsilon|}.$$

4. *Le terme* $\lambda_n(v^k, |u_n|^2)_{C^{(k)}}$ À nouveau, $\|u_n - h_n\|^2_{H^1} \leq \mathrm{C}\varepsilon^2$ implique que

$$|\|u_n\|^2_2 - \|h_n\|^2_2| \leq \mathrm{C}\varepsilon,$$

et on peut estimer $\lambda_n(v^k, |h_n|^2)_{C^{(k)}}$ en utilisant le lemme 2.2.

5. *Le terme* $(v^i, |\nabla u_n|^2 - \lambda_n |u_n|^2)_{K^i}$ Par notre choix de construction, v^i est borné sur la partie épaisse, cf. 1.2, et donc ce terme est borné par $\mathrm{C}\varepsilon$.
6. *Le terme* $(\nabla u_n, D\nabla u_n)$ On sépare ce terme en deux parties, l'intégrale sur le cylindre, où D est la projection sur la partie non-radiale à $O(\frac{1}{\varepsilon|\log\varepsilon|})$ près, et ces termes non-radiaux sont d'ordre ε^2, d'où

$$(\nabla u_n, D^k \nabla u_n)_{C^{(k)}} \leq \mathrm{C}\frac{1}{|\log\varepsilon|},$$

et l'intégrale sur la partie épaisse qui est d'ordre ε^2.
7. *Les termes* $\Gamma(\cdot)$ La norme C^∞ de ∇u_n sur la partie épaisse peut être contrôlée par sa norme L^2 comme dans [DR86]. La variation de la géométrie a été estimée dans le lemme 1.2. Ces termes ont une contribution négligeable par rapport à $1/|\log\varepsilon|$, et un choix judicieux de constante permettra d'en tenir compte.

Ces estimations démontrent

Proposition 3.1. *La fonction $\eta(\varepsilon)$ satisfait*

$$|\eta(\varepsilon)| \leq C\frac{1}{|\log\varepsilon|},$$

pour une constante C ne dépendant que de la situation initiale.

Comme $\lambda_n(\varepsilon)/\varepsilon$ peut aussi être contrôlé en utilisant le lemme des petites valeurs propres, [CCdV88, Bur90], la démonstration est terminée.

Remerciements

Je tiens à remercier les nombreuses personnes avec qui j'ai pu discuter de cet article, en particulier P. Buser et J. Dodziuk, et tout particulièrement B. Colbois pour sa lecture très attentive. Je tiens de même à remercier le referee pour avoir signalé une importante erreur de la première version, et pour ses remarques très constructives.

Bibliographie

[Abi80] W. Abikoff, *The real analytic theory of Teichmüller space*, Springer Lecture Notes in Mathematics **820**, 1980.

[Bat97] Ph. Batchelor, *Dérivées des valeurs propres du laplacien sur des variétés qui dégénèrent*, PhD thesis, ETHZ, 1997.

[BC90] P. Buser and G. Courtois, Finite parts of the spectrum of a riemann surface, *Math. Ann.* **287** (1990), 523–530.

[Bur90] M. Burger, Small Eigenvalues of Riemann Surfaces and Graphs, *Math. Z.* **205** (1990), 395–420.

[Bus92] P. Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Birkhäuser Verlag, 1992.

[Cha84] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, 1984.

[Col85] B. Colbois, Petites valeurs propres sur une surface de Riemann compacte et graphes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), 927–930.

[DR86] J. Dodziuk and B. Randol, Lower bounds for λ_1 on a finite-volume hyperbolic manifold, *J. of Differ. Geom.* **24** (1986), 133–139.

[CC89] B. Colbois et G. Courtois, Les valeurs propres inférieures à 1/4 des surfaces de Riemann de petit rayon d'injectivité, *Comment. Math. Helv.* **64** (1989), 349–362.

[CCdV88] B. Colbois et Y. Colin de Verdière, Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante, *Comment. Math. Helv* **63** (1988), 194–208.

[SWY80] R. Schoen, S. Wolpert and S.-T. Yau, Geometric bounds on the low eigenvalues of a compact surface. In: *Geometry of the Laplace operator, Proc. Sympos. Pure Math.* **36** (1980), 279–285.

[SZ91] J. Sokolowski and J.-P. Zolésio, *Introduction to shape optimization*, Springer Verlag, 1991.

[Wol92a] S. Wolpert, Spectral limits for hyperbolic surfaces, I. *Invent. Math.* **108** (1992), 67–89.

[Wol92b] S. Wolpert, Spectral limits for hyperbolic surfaces, II. *Invent. Math.* **108** (1992), 90–129.

Ph. Batchelor
D-Math, ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich
e-mail: chelor@math.ethz.ch

(Received: December 21, 1995)