Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 74 (1999)

Artikel: Surfaces à points doubles isolés
Autor: Almeida, Jean d'
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55772

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 74 (1999) 22–26
0010-2571/99/010022-5 $ 1.50+0.20/0

© 1999 Birkhäuser Verlag, Basel

Commentarii Mathematici Helvetici

Surfaces à points doubles isolés

Jean d'Almeida

Abstract. We give a characterization of the generic projection on P^2 of an algebraic surface of P^3 with a finite number of nodes. The construction of an algebraic surface of P^3 with a given number of nodes is thus equivalent to the construction of a plane curve with nodes and cusps in some special position.

Mathematics Subject Classification (1991). 14N05, 14J17, 14H50, 14H20, 14F22, 14B05.

Keywords. Branch curve, nodes, cusps, nodal surface.

Introduction

La détermination du nombre maximum de points doubles d'une surface algébrique de degré fixé de P^3 est un problème classique de géométrie algébrique. Si n est le degré de la surface, on note $\mu(n)$ le nombre recherché. On a $\mu(3) = 4$, $\mu(4) = 16$, $\mu(5) = 31$ [3], $\mu(6) = 65$ [6]. Pour montrer que $\mu(n) = \delta'$, il faut montrer que $\mu(n) \leq \delta'$ puis construire une surface ayant δ' points doubles. Chacune de ces étapes est non triviale. Des majorations du nombre de points doubles sont obtenues dans [2], [7] et [8]. Diverses méthodes sont utilisées pour construire des surfaces ayant un nombre élevé de points doubles [1], [3].

On donne ici une caractérisation de la courbe de ramification d'une projection générique sur P^2 d'une surface algébrique de P^3 ayant pour singularités un nombre fini de points doubles ordinaires. On obtient une méthode uniforme permettant de construire une surface de degré n avec δ' points doubles isolés, $\delta' \leq \mu(n)$, en partant d'une courbe plane ayant certaines propriétés.

Si p est un point double ordinaire de la surface S, on peut choisir des coordonnées locales x, y, z dans un voisinage de p dans P^3 de façon à ce que l'équation de S dans ce voisinage soit de la forme $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + g(x, y, z)$ où la multiplicité de g à l'origine est supérieure ou égale à trois. La désingularisation $\tilde{S}$ d'une surface S de P^3 avec un point double ordinaire isolé est la transformée propre de S dans l'éclaté de P^3 en p. L'image réciproque de p dans $\tilde{S}$ est une courbe lisse rationnelle de self-intersection -2. On notera $h^i(\mathcal{T})$ la dimension du

groupe de cohomologie $H^i(\mathcal{T})$ et P^r l'espace projectif de dimension r sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Théorème 1. *Soit Γ une courbe plane intègre de degré $n(n-1)$, $n \geq 3$, ayant $k = n(n-1)(n-2)$ points de rebroussements ordinaires et $\delta + \delta'$ points doubles ordinaires où $\delta = n(n-1)(n-2)(n-3)/2$ et $\delta' \geq 0$. On suppose qu'il existe deux courbes μ_0 et μ_1 de degrés $(n-1)(n-2)$ et $(n-1)(n-2)+1$ sans composante commune contenant les k points de rebroussement et δ points doubles ordinaires. On suppose que $(n-1)(n-2)$ est le degré minimal d'une courbe contenant les $k+\delta$ points. Alors il existe une surface de degré n de P^3 ayant δ' points doubles ordinaires et un point 0 de P^3 tels que Γ soit la courbe de ramification de la projection de S sur P^2 de centre 0.*

Démonstration. On note $P^3 = \operatorname{Proj} k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ où k est le corps de base, $0 = (0,0,0,1)$ et $P^2 = \operatorname{Proj} k[X_0, X_1, X_2]$. La courbe Γ est définie par le polynôme homogène F de degré $n(n-1)$ en X_0, X_1 et X_2. Considérons l'intersection du cône de sommet 0 et de base Γ et de la surface irréductible d'équation $\mu_1 - X_3\mu_0$. Cette intersection se compose de $\delta + k$ génératrices doubles du cône et d'une courbe C de degré $n(n-1)(n^2-3n+3) - 2\delta - 2k = n(n-1) = \deg \Gamma$. La projection de sommet 0 est birationnelle de C sur Γ. En effet, si (a_0, a_1, a_2) est telle que $F(a_0, a_1, a_2) = 0$ et $\mu_0(a_0, a_1, a_2) \neq 0$, alors (a_0, a_1, a_2, a_3) est l'unique antécédent de (a_0, a_1, a_2) où $a_3 = \mu_1(a_0, a_1, a_2)/\mu_0(a_0, a_1, a_2)$.

Notons $p = C \to \Gamma$ la projection. Le conducteur de p est $\omega_C \otimes p^*\omega_\Gamma^v$ où ω_c et ω_Γ désignent les faisceaux dualisants. On a $\omega_\Gamma^v = \mathcal{O}_\Gamma(3 - n(n-1))$. La dualité de Serre donne $H^1(\mathcal{O}_C(i)) = H^0(\omega_c(-i))^v$. Il en résulte que le degré minimal d'une courbe plane contenant les $\delta + k$ points est

$$\deg \mu_0 = n(n-1) - 3 - e(C) \text{ où } e(C) = \max\{i / h^1(\mathcal{O}_C(i) \neq 0\}.$$

On en déduit donc que $e(C) = 2n - 5$.

Si C n'est pas tracée sur une surface de degré $n-2$, alors le théorème de spécialité de [5] montre que C est intersection complète de deux surfaces de degrés n et $n-1$. Le genre arithmétique π de C vérifie $2\pi - 2 = n(n-1)(2n-5)$. Son genre géométrique égal à celui de Γ est :

$$[n(n-1)-1][n(n-1)-2]/2 - \delta - k - \delta' = \pi - \delta'.$$

La courbe C a alors δ' points doubles situés au-dessus de δ' points doubles de Γ.

On rappelle que la polaire d'une surface S d'équation G par rapport au point de coordonnées $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est $\Sigma \lambda_i \partial G / \partial X_i$ [4], p. 170. On note S^0 la polaire de S relativement à 0.

Un point lisse Q de S appartient S^0 si et seulement si le plan tangent en Q à S passe par 0. Remarquons que les k points de rebroussement de Γ sont les

images par p de k points de C où la tangente à C passe par 0. Si une surface T de degré $n-2$ contenait C alors la polaire T^0 contiendrait les k points ci-dessus. Or $n(n-1)(n-2) > (n-3)n(n-1)$. Donc, d'après Bezout, T^0 contiendrait C. Ceci est absurde car degré$(C) > \deg T \deg T^0$.

La courbe C est donc intersection complète d'une surface A de degré n et d'une surface B de degré $n-1$. Montrons qu'on peut remplacer A par G avec $G^0 = B$. On en déduira que Γ est la courbe de ramification de la projection de G sur P^2 de centre 0. Il faut montrer que G a δ' points doubles ordinaires se projetant sur les δ' points doubles de Γ non situés sur la courbe μ_0.

Une surface de degré n contenant C a une équation sécrivant

$$G = A + (aX_0 + bX_1 + cX_2 + dX_3)B$$

où a, b, c, d sont des constantes. On a

$$G^0 = A^0 + dB + (aX_0 + bX_1 + cX_2 + dX_3)B^0.$$

La condition $G^0 = \alpha B$ où $\alpha \in k$ (corps de base) s'écrit $A^0 + (d-\alpha)B + (aX_0 + bX_1 + cX_2 + dX_3)B^0 = 0$. Elle est réalisée si et seulement si la surface A^0 contient la courbe $B \cap B^0$ (Noether). Mais A^0 et $B \cap B^0$ ont en commun les k points de C qui ont pour images par p les points de rebroussement de Γ. Mais $k > (n-1)(n-1)(n-2)$ et donc A^0 contient $B \cap B^0$. On a donc trouvé G telle que la projection de centre 0 de G sur P^2 ait Γ pour courbe de ramification. L'équation de la polaire est $\partial G/\partial X_3$. Un point singulier de S appartient à la polaire G^0 et donc à $C = G \cap G^0$. Les singularités de S ne peuvent être situés qu'aux points singuliers de C. Soit Q un point singulier de C. Montrons que Q est aussi singulier sur S. Si Q n'était pas singulier sur S, S et S^0 seraient tangents en Q c'est-à-dire que la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial X_0} & \frac{\partial G}{\partial X_1} & \frac{\partial G}{\partial X_2} & \frac{\partial G}{\partial X_3} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial X_0 \partial X_3} & \frac{\partial^2 G}{\partial X_1 \partial X_3} & \frac{\partial^2 G}{\partial X_2 \partial X_3} & \frac{\partial^2 G}{\partial X_3^2} \end{bmatrix}$$

aurait un rang inférieur ou égal à un en Q. Or, $\partial G/\partial X_3(Q) = 0$ et donc l'un des nombres $\partial G/\partial X_i(Q)$ $(i = 0, 1, 2)$ est non nul. Il en résulte que $\partial^2 G/\partial X_3^2(Q) = 0$ donc Q appartient à la polaire de G^0 par rapport à 0. L'image de Q sur Γ ne serait dans ces conditions pas un point double ordinaire. Un raisonnement analogue montre que Q est un point double ordinaire de la surface G.

Proposition 2. *Soit S une surface de degré n de P^3 ayant pour singularités δ' points doubles ordinaires.*

Soit 0 un point générique de P^3. On note Γ la courbe de ramification de la projection de S sur un plan à partir de 0. Alors $\deg \Gamma = n(n-1)$ *et Γ a k points de rebroussement ordinaires et $\delta + \delta'$ points doubles ordinaires avec*

$$\delta = n(n-1)(n-2)(n-3)/2 \text{ et } k = n(n-1)(n-2).$$

Il existe deux courbes de degrés $(n-1)(n-2)$ *et* $(n-1)(n-2)+1$ *sans composante commune passant par les points de rebroussement et* δ *points doubles ordinaires de* Γ.

Démonstration. La courbe Γ est l'image de la courbe $S \cap S^0$ où S^0 est la polaire par rapport à 0. Le nombre de points de rebroussement de Γ est obtenu en considérant $S \cap S^0 \cap (S^0)^0$.

Le genre géométrique de Γ est égal à $\pi - \delta'$ où π est le genre arithmétique de $S \cap S^0$. Le nombre de points doubles ordinaires de Γ en résulte immédiatement. On effectue la construction monoidale de Cayley [5]. On note (h_0) la sous-variété dont l'idéal est le conducteur de la restriction de la projection de centre 0 à $S \cap S^0$. On note I le plus grand idéal gradué de $k[X_0, X_1, X_2]$ définissant (h_0) et μ_0 un élément homogène de degré minimum de I. Si F est l'équation de Γ, $I/(F)$ est muni d'une structure de $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$-module. On peut donc choisir pour tout entier $i \geq 1$, un élément μ_i homogène de I de degré égal à $\deg(\mu_0) + i$ dont la classe modulo I est le produit de la classe de μ_0 par X_3^i. En particulier, le monoïde d'équation $\mu_1 - X_3\mu_0$ contient $C = S \cap S^0$. Il reste à montrer que μ_0 et μ_1 n'ont pas de composante commune. Si c'était le cas, on aurait $\mu_1 - X_3\mu_0 = D(v_1 - X_3 v_0)$. Or, la courbe C ne peut être contenue dans le cône d'équation $D = 0$ car $\deg D < \deg \Gamma$. La courbe C est donc tracée sur la surface d'équation $v_1 - X_3 v_0$. On vérifie que ceci implique que la courbe plane d'équation $v_0 = 0$ contient les $k + \delta$ points singuliers. Ceci contredit le caractère minimal de μ_0.

Remarques. On a ainsi ramené la construction d'une surface de degré n avec δ' points doubles ordinaires à la construction d'une courbe plane de degré $n(n-1)$ ayant certaines propriétés.

Ceci permet une approche du problème de la détermination du nombre $\mu(n)$ représentant le maximum de points doubles d'une surface normale de degré n de P^3. En considérant le nombre de points d'inflexion et le nombre de bitangentes de la courbe de ramification, on obtient la borne de Stagnaro-Basset

$$\mu(n) \leq \frac{1}{2}\left[n(n-1)^2 - 5 - \sqrt{n(n-1)(3n-14)+25}\right] \qquad n \geq 6.$$

En considérant les points de rebroussement, on peut établir que $\mu(4) \leq 16$, $\mu(5) \leq 31$, $\mu(6) \leq 66$.

La borne de Basset n'est pas optimale. Celle de Miyaoka est meilleure. En fait, pour avoir la majoration de Basset-Stagnaro, on utilise seulement le fait que la courbe de ramification a un degré donné et des points doubles ordinaires et de rebroussement en nombre donné. Il faut, pour avoir la majoration exacte, déterminer les contraintes dues au fait que les points de rebroussement et un certain nombre de points doubles ordinaires sont situés sur deux courbes de degrés anormalement bas.

References

[1] W. Barth, Two projective surfaces with many nodes, *Journal of Algebraic Geometry* **5** (1996), 173-186.
[2] A. Basset, The maximum number of double points on a surface, *Nature* **73** (1906), 246.
[3] A. Beauville, Sur le nombre maximum de points doub les d'une surface dans P^3, *Journées de Géométrie Algébrique d'Angers*, 207-215, Sijthoff & Nordhoff, 1980.
[4] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer Verlag, 1984.
[5] L. Gruson and C. Peskine, *Genre des courbes de l'espace projectif*, Lecture Notes in Math. **687**, 1978.
[6] D. Jaffe and D. Ruberman, A sextic surface cannot have 66 notes, *Journal of Algebraic Geometry* **6** (1997), 151-168.
[7] Y. Miyaoka, The maximal number of quotient singularities on surface with given numerical invariants, *Math. Ann.* **268** (1984), 159-171.
[8] E. Stagnaro, On the Basset limitations for the maximum number of isolated singularities on an algebraic surface, *Proc. of the Trento Conference*, 291-304, Decker, 1983.

Jean d'Almeida
U.F.R. de Mathématiques
URA au CNRS 751, Bât. M2
Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

(Received: November 9, 1996)