Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 78 (2003)

Artikel: Laminations minimales résiduellement à 2 bouts
Autor: Blnac, Emmanuel
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58785

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 78 (2003) 845–864
0010-2571/03/040845-20
DOI 10.1007/s00014-003-0778-5

© 2003 Birkhäuser Verlag, Basel

Commentarii Mathematici Helvetici

Laminations minimales résiduellement à 2 bouts

Emmanuel Blanc

Résumé. On décrit toutes les feuilles des laminations minimales dont un ensemble résiduel de feuilles ont 2 bouts.
Abstract. We give a complete description of all the leaves of a minimal foliated space with a residual set of 2-ended leaves.

Mathematics Subject Classification (2000). 37B05, 57R30.

Keywords. Lamination, bout, ensemble résiduel, propriété générique.

Introduction et énoncé des résultats

Une *lamination* est essentiellement une partition d'un espace métrique compact en *feuilles* qui sont des variétés en général non compactes de dimension fixée (une définition précise sera donnée en section 1). Une lamination est *minimale* si toutes ses feuilles sont denses. Les ensembles minimaux des variétés feuilletées compactes sont des exemples naturels de laminations minimales. Le lecteur trouvera d'autres exemples dans [12] et [5]. Un théorème de J. Cantwell et L. Conlon [6], inspiré par un travail antérieur d'É. Ghys [11], montre que les laminations minimales se séparent en 4 classes selon qu'un ensemble résiduel de leurs feuilles ont 0, 1, 2 ou un Cantor de bouts. Rappelons qu'il s'agit là précisément des 4 espaces de bouts possibles pour un groupe de type fini, résultat dû à H. Hopf [15]. Parmis ces groupes, ceux ayant 2 bouts sont très particuliers : il s'agit des extensions finies de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ([15], [9], voir aussi [19]). De manière analogue, É. Ghys a décrit en terme d'extensions compactes de flots mesurés, les laminations dont presque-toutes les feuilles relativement à une mesure transverse invariante ont 2 bouts [11]. Dans cet esprit, ce travail montre que les laminations minimales *résiduellement à 2 bouts*, *ie* celles dont un ensemble résiduel de feuilles ont 2 bouts, sont très particulières.

Les premiers exemples de laminations minimales résiduellement à 2 bouts sont donnés par les orbites des flots minimaux sur les variétés compactes et les ensembles minimaux non triviaux des flots sur les variétés compactes. Dans ces exemples,

toutes les feuilles, homéomorphes à la droite réelle, ont 2 bouts. Il se trouve qu'il existe des exemples de laminations et de feuilletages minimaux résiduellement à 2 bouts mais dont certaines feuilles ont 1 seul bout (voir section 2). L'objet central de cet article est le résultat suivant qui montre que ce phénomène est le seul possible.

Theorème 1. *Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination minimale résiduellement à 2 bouts sur un espace X compact. On a les faits suivants :*
- *toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ ont 1 ou 2 bouts ;*
- *les feuilles à 2 bouts sont les feuilles sans holonomie. Elles sont quasi-isométriques à $\mathbb{Z}$;*
- *les feuilles à 1 bout sont les feuilles avec holonomie. Elles sont quasi-isométriques à $\mathbb{N}$. Leur holonomie est à support compact et isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

D'après É. Ghys [11], si $(X, \mathcal{F})$ est une lamination, ses feuilles génériques relativement à une mesure tranverse invariante ou plus généralement une mesure *harmonique* (voir [10]) ont 0, 1, 2 ou un Cantor de bouts. Le résultat suivant donne un lien entre les travaux d'É. Ghys et ceux de J. Cantwell – L. Conlon [6].

Theorème 2. *Si $(X, \mathcal{F})$ est une lamination minimale résiduellement à 2 bouts et si μ est une mesure harmonique sur $(X, \mathcal{F})$ alors μ-presque toute feuille de $\mathcal{F}$ a 2 bouts.*

Un des intérets de ce résultat tient au fait que l'auteur a construit un exemple de lamination minimale munie d'une mesure transverse invariante μ dont l'ensemble des feuilles à 1 bout est résiduel et l'ensemble des feuilles à 2 bouts est μ-générique [4].

À l'aide de la classification des surfaces, le théorème 1 entraine le résultat suivant qui donne la liste, finie, des surfaces pouvant être uniformément équivalentes (voir section 1 pour une définition) à une feuille d'une lamination minimale résiduellement à 2 bouts Les différentes surfaces apparaissant dans l'énoncé sont décrites par les figures 1 et 2. De plus, les exemples donnés dans la section 2 montrent que toutes ces surfaces peuvent effectivement être réalisées (à uniforme équivalence près) comme feuilles de laminations minimales résiduellement à 2 bouts.

Theorème 3. *Une lamination minimale, par surfaces, résiduellement à 2 bouts, sur un espace compact X, a toutes ses feuilles uniformément équivalentes à l'une des surfaces suivantes :*
- *le cylindre ;*
- *l'échelle de Jacob à 1 ou 2 bouts J_1 ou J_2 ;*
- *l'échelle de Jacob infiniment non orientable à 1 ou 2 bouts J_1' ou J_2' ;*
- *la somme connexe $\mathbb{P}^2 \# (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1)$;*
- *la somme connexe $\mathbb{K}^2 \# J_1$;*
- *la somme connexe $\mathbb{P}^2 \# J_1$.*

Dans [4], l'auteur montre que si une lamination minimale a une feuille quasi-isométrique à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ alors cette lamination est résiduellement à 2 bouts. Le théo-

rème 3 donne ainsi la liste (à uniforme-équivalence près) des surfaces quasi-isométriques à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ et feuilles de laminations minimales. On retrouve ainsi un résultat dû à D. M. Cass [7]. Il avait en effet construit une surface quasi-isométrique à $\mathbb{Z}$ et non uniformément équivalente à une feuille d'une lamination minimale : on part d'un cylindre et on ajoute une infinité d'anses s'accumulant sur les 2 bouts mais de telle sorte que la distance entre 2 anses consécutives soit non bornée. Cette surface, bien que homéomorphe à J_2, n'apparait pas dans la liste précédente. Notons par contre que ce théoréme ne dit rien sur le type d'*homéomorphisme* d'une feuille d'une lamination minimale. L'auteur a en effet montré que toute surface non-compacte est homéomorphe à une feuille d'une certaine lamination minimale ([4] et [3]).

Enfin, on étude les lamimations minimales résiduellement à 2 bouts *transversalement* Cantor : celles dont les transversales sont homéomorphes à l'espace de Cantor. On définit une notion de *suspension* et de *suspension singulière* dans ce cas. Le théorème 1 et l'abondance des transversales fermées permettent d'obtenir l'énoncé suivant :

Theorème 4. *Les laminations minimales résiduellement à 2 bouts tranversalement Cantor sont les extensions compactes des suspensions des actions minimales de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur l'espace de Cantor K.*

Cet article, qui reprend une partie des résultats de la thèse de l'auteur [4], se présente comme suit. La section 1 rappelle la définition de la notion de lamination et les outils de dynamique topologique utiles dans la suite. La section 2 donne des exemples de feuilletages et de laminations résiduellement à 2 bouts dont certaines feuilles ont 1 seul bout. Ces exemples nous permettrons d'introduire les surfaces du théorème 3. La suite de l'article est consacrée aux preuves des différents résultats.

L'auteur tient a remercier D. Gaboriau, É. Ghys, G. Hector et G. Meigniez pour leur nombreux encouragements durant la préparation de ce travail.

1. Définitions et outils

1.1. Laminations

Une structure de *lamination* (*foliated space* dans la littérature anglophone) $\mathcal{F}$ de classe C^2 et de dimension n sur un espace métrique compact X est définie par la donnée d'un recouvrement de X par un nombre fini d'ouverts précompacts $(U_i)_{i\in I}$ et d'une famille d'homéomorphismes $\phi_i : U_i \to T_i \times \mathbb{D}^n$ où T_i est un espace métrique localement compact et $\mathbb{D}^n$ est le disque unité de $\mathbb{R}^n$ de sorte que les changements de cartes, là où il sont définis, aient la forme :

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : (x, y) \in T_i \times \mathbb{D}^n \mapsto (g_{ji}(x), F_x^{ji}(y)) \in T_j \times \mathbb{D}^n$$

Ici g_{ji} est un homéomorphisme local et F_x^{ji} est un difféomorphisme local de $\mathbb{D}^n$ de classe C^2 dépendant continuement au sens de la topologie C^2 du point x. Les

plaques sont les ensembles $\phi_i^{-1}(\{t\} \times \mathbb{D}^n)$. On demande de plus que l'intersection entre 2 plaques quelconques soit ou vide ou connexe. La feuille L_x de $\mathcal{F}$ qui contient le point x de X est l'ensemble de points de X qu'on peut atteindre depuis x par un chemin continu inclus dans un nombre fini de plaques. Les feuilles sont naturellement des variétés connexes sans bord de dimension n qui forment une partition de X. La réunion, qu'on suppose disjointe, des ensembles $\phi_i^{-1}(T_i \times \{0\})$ est notée $\mathcal{T}$ et appelée *système de transversales*. C'est un espace localement compact, en particulier un espace de Baire. Notons que lorsque les espaces T_i sont des ouverts de $\mathbb{R}^p$, on retrouve la définition classique d'un feuilletage (transversalement de classe C^0 et tangentiellement de classe C^2) de dimension n et codimension q. Une lamination est *minimale* si toutes ses feuilles sont denses.

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter le livre [5]. Il y trouvera en particulier la définition de la notion d'*holonomie*.

On fixera une métrique le long des feuilles de classe C^2, c'est à dire dépendant continuement au sens de la topologie C^2 de la variable transverse. Les feuilles sont alors des variétés riemmaniennes complètes sans bord à géométrie bornée : leurs rayons d'injectivité sont uniformément minorés, leurs courbures sectionnelles uniformément majorées. On note alors $d_{\mathcal{F}}$ la distance induite sur les feuilles et si r est un réel positif, on note $B_{\mathcal{F}}(x, r)$ la boule fermée de centre x de rayon r de la feuille L_x.

Deux variétés riemanniennes sont dites *uniformément-équivalentes*, qu'on abrégera par : U-équivalentes, si elles sont difféomorphes via un difféomorphisme f tel que f et f^{-1} soient lipschitziens. La compacité de l'espace X fait qu'à U-équivalence près, le type des feuilles est indépendant de la métrique $d_{\mathcal{F}}$ choisie. Pour cette raison, les variétés et surfaces que nous considérerons le seront toujours à U-équivalence près.

1.2. Dynamique topologique

Pour une introduction à la théorie des espaces de Baire et à ses liens avec la dynamique topologique, on peut consulter le livre de A. S. Kechris [16]. Nous rappelons juste quelques faits et définitions classiques.

On considère un espace de Baire E (typiquement un espace métrique localement compact). Une partie de E est dite *résiduelle* si elle contient une intersection dénombrable d'ouverts denses. Elle est dite *maigre* si son complèmentaire est résiduel. Les *ensembles de Baire* sont les éléments de la σ-algèbre engendrée par les parties ouvertes et maigres. Un ensemble de Baire B de E est non maigre si et seulement si il existe un ouvert non vide U de E tel que $B \cap U$ soit résiduel dans l'espace de Baire U. De plus, si $(X, \mathcal{F})$ est une lamination minimale, $\mathcal{T}$ un système de transversales et si R est un ensemble de Baire non maigre de $\mathcal{T}$, alors le saturé de R pour $\mathcal{F}$ est résiduel dans X [6]. Inversement la trace sur $\mathcal{T}$ d'un ensemble résiduel de X saturé par $\mathcal{F}$ est résiduelle dans $\mathcal{T}$. Enfin, on utilisera les 2 lemmes suivants.

Lemme 1.1 ([8] et [14]). *La réunion G_0 des feuilles sans holonomie d'une lamination $(X, \mathcal{F})$ est un ensemble résiduel dans X.*

Lemme 1.2 ([2]). *Si $(X, \mathcal{F})$ est une lamination minimale et U un ouvert non vide de T alors il existe un réel R tel que, pour tout x de X, $B_{\mathcal{F}}(x, R) \cap U$ est non vide.*

2. Des laminations minimales résiduellement à 2 bouts

Comme on l'a dit, les premiers exemples de laminations minimales résiduellement à 2 bouts sont les laminations minimales de dimension 1 : *toutes* leurs feuilles ont 2 bouts. Ces laminations ne permettent pas de comprendre comment apparaissent des feuilles à 1 bout dans l'énoncé du théorème 1. Dans cette section, on donne des exemples de feuilletages et de laminations minimaux résiduellement à 2 bouts mais qui ont des feuilles ayant 1 seul bout. Les constructions de cette section sont illustrées par la figure 1.

Le premier exemple se trouve dans le livre de C. Godbillon ([13] p 181). Le tore de Klein $\mathbb{K}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ admet un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. On considére d'autre part 2 symétries s_0 et s_1 du cercle $\mathbb{S}^1$ telles que $r_\alpha = s_1 \circ s_0$ est une rotation irrationnelle de $\mathbb{S}^1$. Elles déterminent une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par isométries sur $\mathbb{S}^1$ et donc un feuilletage suspension $\mathcal{F}_\phi$ sur un fibré en cercles au dessus de $\mathbb{K}^2$. La rotation r_α étant minimale, le feuilletage $\mathcal{F}_\phi$ est minimal. Les feuilles de $\mathcal{F}_\phi$ sont, à U-équivalence près, des cylindres $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ obtenus comme revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{K}^2$, à l'exception de 4 feuilles, correspondant aux points fixes des symétries s_0 et s_1, qui sont (à U-équivalence près) des demi-cylindres non orientables $\mathbb{P}^2 \#(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1)$ obtenus comme revêtement non galoisien de $\mathbb{K}^2$ (voir figure 1). Le feuilletage obtenu est donc résiduellement à 2 bouts mais 4 feuilles ont 1 bout.

De même, la somme connexe $\mathbb{K}^2 \# \mathbb{K}^2$ admet un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par l'échelle de Jacob à 2 bouts J_2. La même construction que précédemment, donne un feuilletage minimal sur un fibré en cercles au dessus de $\mathbb{K}^2 \# \mathbb{K}^2$. Toutes ses feuilles sont des échelles de Jacob à 2 bouts J_2 sauf 4 qui sont des échelles de Jacob à 1 bout non orientables $\mathbb{K}^2 \# J_1$ (voir figure 1).

Toujours par la même construction, en partant d'un revêtement galoisien de $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ par l'échelle de Jacob à 2 bouts J_2, de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on obtient un feuilletage minimal dont toutes les feuilles sont des échelles de Jacob à 2 bouts J_2 sauf 4 feuilles sont des échelles de Jacob à 1 bout J_1 (voir figure 1).

Enfin, en substituant dans les exemples précédents, à un voisinage tubulaire d'un cercle transverse feuilleté trivialement par disques, un produit $(\mathbb{T}^2)^\bullet \times \mathbb{S}^1$ (resp. $(\mathbb{P}^2)^\bullet \times \mathbb{S}^1$) feuilleté horizontalement, où $(\mathbb{T}^2)^\bullet$ (resp. $(\mathbb{P}^2)^\bullet$) désigne un tore (resp. un plan projectif) privé d'un disque, on obtient un feuilletage minimal dont les feuilles résiduelles sont, toujours à U-équivalence près, des échelles de Jacob

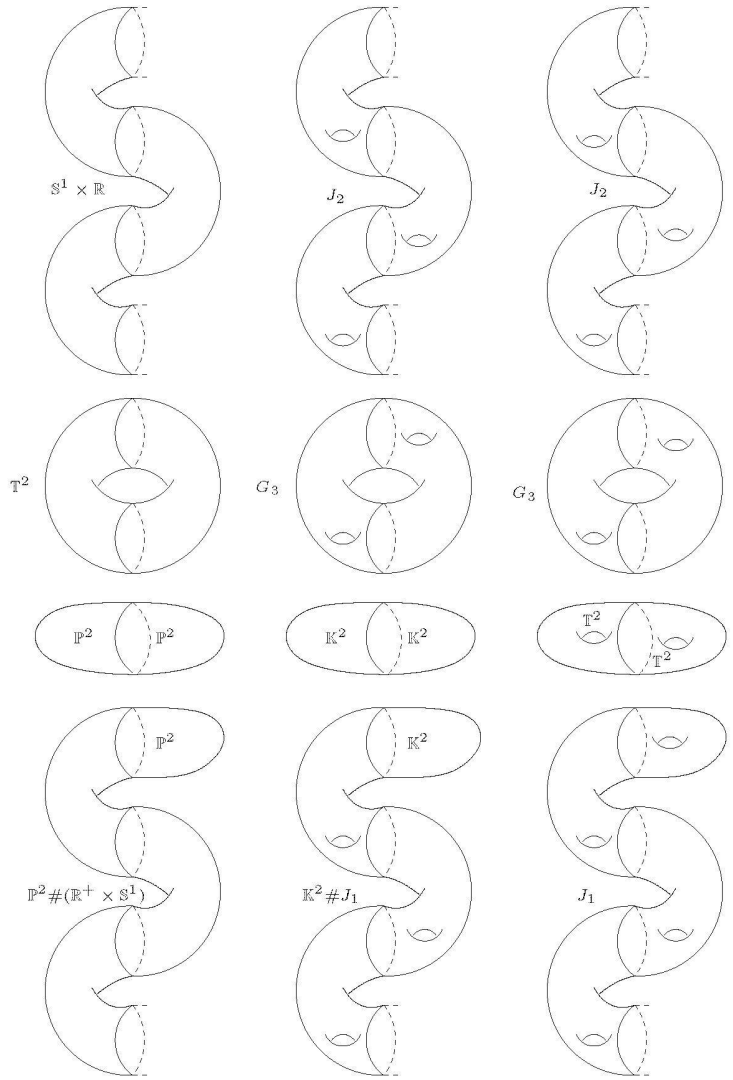

Fig. 1. Feuilles résiduelles et spéciales

à 2 bouts J_2 (resp. des échelles de Jacob infiniment non orientable J_2') et ayant 4 feuilles U-équivalentes à l'échelle de Jacob à 1 bout non orientable $\mathbb{P}^2\#J_1$ (resp. l'échelle de Jacob infiniment non orientable à 1 bout J_1'). Les surfaces J_2', $\mathbb{P}^2\#J_1$ et J_1' ont été représentées sur la figure 2 où les plans projectifs ajoutés par sommes connexes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{P}^2\#(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1)$ pour obtenir J_2' et J_1' sont isométriques

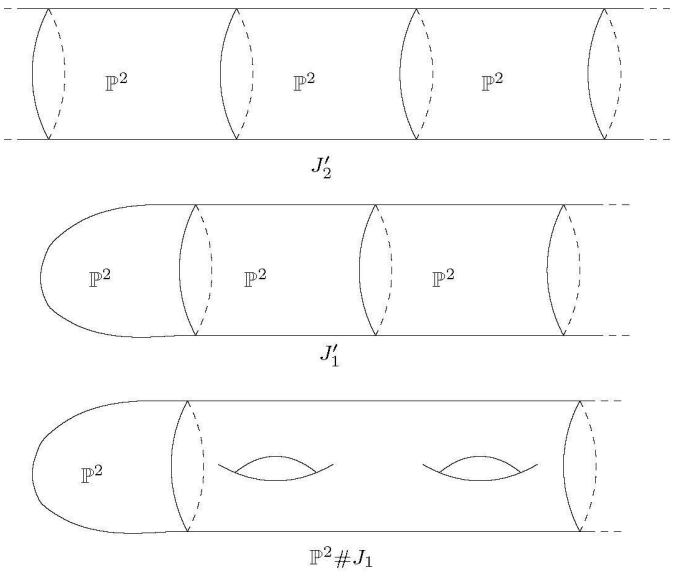

Fig. 2. Les surfaces J_2', J_1' et $\mathbb{P}^2\#J_1$

entre eux. On prendra garde au fait que les surfaces $\mathbb{P}^2\#J_1$ et $\mathbb{K}^2\#J_1$ ne sont pas homéomorphes.

Les différents feuilletages précédemment construits n'ont que 4 feuilles à 1 bout. L'exemple suivant est une lamination minimale résiduellement à 2 bouts ayant une infinité non dénombrable de feuilles à 1 bout. Son espace transverse est de dimension infinie.

Exemple 2.1. Il existe une lamination minimale résiduellement à 2 bouts sur un espace compact ayant une infinité non dénombrable de feuilles à 1 bout.

Construction

L'idée est de construire une action minimale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur l'espace compact $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ ayant une infinité d'orbites à 1 bout.

Une simple application du théorème de Baire montre qu'il existe un élément α dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ tel que la translation R_α par $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ dans le groupe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ soit un homéomorphisme minimal de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$. Considérons alors les deux symétries :

$$S_0 \ : \begin{cases} (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \\ (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \mapsto (-x_0, -x_1, \dots, -x_n, \dots) \end{cases}$$

$$S_1 \ : \begin{cases} (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \\ (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \mapsto (-x_0 + \alpha_0, -x_1 + \alpha_1, \dots, -x_n + \alpha_n, \dots) \end{cases}$$

Les symétries S_0 et S_1 engendrent un groupe G d'homéomorphismes de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et dont l'action est minimale car il contient $R_\alpha = S_1 \circ S_0$. De manière analogue aux exemples précédents, les orbites de G ont résiduellement 2 bouts et il y des orbites à 1 bout correspondant aux points fixes de S_0 et S_1. L'ensemble non dénombrable $\{0, \frac{1}{2}\}^{\mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ est formé de points fixes de S_0 situés sur des orbites disjointes de G. L'action de G a donc un nombre non dénombrable d'orbites à 1 bout. La suspension de cette action au dessus de la bouteille de Klein fournit l'exemple cherché. □

3. Preuves des théorèmes 1, 2 et 3

Cette section qui constitue le cœur de cet article est consacrée à la preuve du théorème 1 et à celles de ses corollaires (théorèmes 2 et 3).

3.1. Preuve du théorème 1

Le point de départ de la preuve est le lemme suivant qui est l'analogue du "Lemme de l'hypersurface" d'É. Ghys dans le cadre mesurable [11]. Il montre que si un ensemble résiduel de feuilles ont 2 bouts (ou plus) alors il existe une hypersurface dans une feuille sans holonomie qui, relevée aux feuilles voisines, disconnecte "presque toujours" la feuille qui la contient en deux composantes connexes non bornée. Ce lemme est implicite dans le travail de J. Cantwell et L. Conlon [6]. On peut également retranscrire sa preuve de celle d'É. Ghys dans le cas mesurable [11]. Nous en donnons ici une preuve directe.

Lemme 3.1. *Si $(X, \mathcal{F})$ est une lamination minimale résiduellement à 2 bouts et $\mathcal{T}$ est un système de transversales alors il existe une hypersurface connexe compacte pointée $(\Sigma, *)$, de dimension 1 de moins que les feuilles, et un plongement $\Phi : U \times \Sigma$ où U est un ouvert non vide de $\mathcal{T}$ tel que :*

- *pour tout point x de U, $\Sigma_x = \Phi(\{x\} \times \Sigma)$ est une hypersurface de L_x ;*
- *pour tout point x de U, $\Phi(x, *) = x$;*
- *pour tout point x dans un ensemble G' résiduel dans U et saturé pour $\mathcal{F}$ dans U, L_x a 2 bouts et Σ_x disconnecte L_x en 2 composantes connexes non bornées.*

Notez que quand on dit "saturé pour $\mathcal{F}$ dans U", on entend : "saturé pour la relation d'équivalence induite par $\mathcal{F}$ sur U".

Preuve. Soit donc $(X, \mathcal{F})$ une lamination minimale résiduellement à 2 bouts sur un espace compact et $\mathcal{T}$ un système de transversales.

Soit G l'ensemble des points x de $\mathcal{T}$ tels que L_x a 2 bouts et est sans holonomie. D'après l'hypothèse et le lemme 1.1, G est résiduel dans $\mathcal{T}$. Pour tout point x de G, il existe un entier M_x tel que $L_x - B_{\mathcal{F}}(x, M_x)$ a 2 composantes connexes non

bornées. Autrement dit :

$$G = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} G_M$$

où G_M est l'ensemble (de Baire) des points x de G tels que $L_x - B_{\mathcal{F}}(x, M)$ a 2 composantes connexes non bornées. L'ensemble G étant résiduel dans $\mathcal{T}$, il existe un entier M et un ouvert non vide U de $\mathcal{T}$ tel que l'ensemble $G_M \cap U$ est résiduel dans U (cf. section 1.2).

On fixe alors $*$ un point de $G_M \cap U$ et D_* un domaine compact de L_*, contenant $B_{\mathcal{F}}(*, M)$ dans son intérieur et dont le bord a 2 composantes connexes Σ_1 et Σ_2. Un tel domaine existe car L_* n'a que 2 bouts. D'après le théorème de stabilité de Reeb (voir par exemple [5]), quitte à réduire l'ouvert U, il existe un plongement $\Phi : U \times D_*$ dans X, tel que, pour tout $x \in U$, $\Phi_x = \Phi/\{x\} \times D_*$ est un plongement de D_* dans L_x dépendant continuement de x pour la topologie C^2. Quitte à réduire à nouveau l'ouvert U, on peut de plus supposer que, pour tout x de U, $D_x = \Phi(\{x\} \times D_*)$ contient $B_{\mathcal{F}}(x, M)$ dans son intérieur. Soit alors Σ une hypersurface connexe de D_*, passant par $*$ et cobordante à Σ_1 et notons, si $x \in U$, $\Sigma_x = \Phi(\{x\} \times \Sigma)$. Supposons que x soit un point de l'ensemble $G_M \cap U$ résiduel dans U. Le complémentaire de $B_{\mathcal{F}}(x, M)$ dans L_x a 2 composantes connexes non bornées. Il en est de même pour $L_x - D_x$. Par suite, toujours sous l'hypothèse $x \in G_M \cap U$, Σ_x disconnecte L_x en 2 composantes connexes non bornées. Notre lemme est démontré à ceci près que l'ensemble $G_M \cap U$ n'est pas nécessairement saturé. Remarquons alors que l'ensemble des points y de $G_M \cap U$ qui ne vérifient pas le point précédent est maigre dans $\mathcal{T}$. Il en est de même de son saturé par $\mathcal{F}$ dans U. Le complémentaire noté G' de cet ensemble dans $G_M \cap U$ satisfait les propriétés demandées. □

Nous passons maintenant à la preuve du théorème 1 proprement dite.

On part des conclusions du lemme 3.1 dont on reprend les notations : pour tout point x de G', L_x a 2 bouts et Σ_x disconnecte L_x en 2 composantes connexes non bornées.

Pour toute feuille L de $\mathcal{F}$, soit Φ_L la trace de $\Phi(U \times \Sigma)$ sur L. C'est la réunion dénombrable des hypersurfaces Σ_x pour x parcourant $L \cap U$. Pour simplifier, si $L = L_x$, on note $\Phi_x = \Phi_{L_x}$. Notons de plus R un réel associé par le lemme 1.2 à l'ouvert U : tout point de X est à $d_{\mathcal{F}}$-distance au plus R de $U \cap L_x$.

Fixons maintenant une feuille L quelconque et considérons une composante connexe C de $L - \Phi_L$. À partir d'ici, la preuve se décompose en 2 parties : décrire la topologie de C, puis, en "recollant les morceaux", en déduire la topologie de L.

La topologie de C

Une hypersurface Σ_x de Φ_L incluse dans $\overline{C}$ vérifie un des 2 faits suivants : c'est une composante connexe du bord du domaine $\overline{C}$ ou elle est incluse dans $\mathrm{Int}(\overline{C})$ (la

topologie considérée ici est celle de L). Commençons par montrer que ce dernier cas ne se présente jamais.

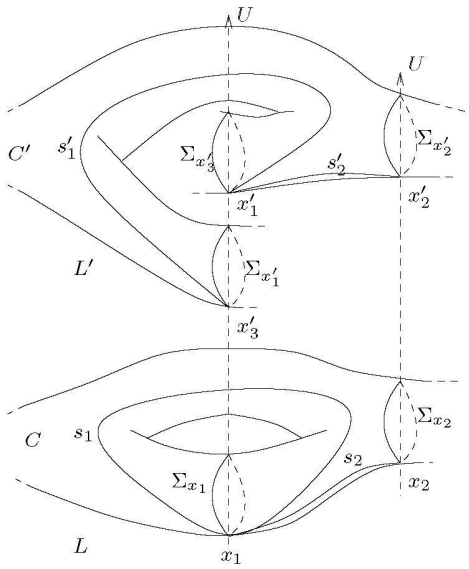

Fig. 3. $\Sigma_{x_1} \subset \mathrm{Int}(\overline{C})$

Supposons donc que Σ_{x_1}, une des hypersurfaces de Φ_L, soit incluse dans $\mathrm{Int}(\overline{C})$ (voir la figure 3). Il existe alors une courbe $s_1 : [0,1] \to \overline{C}$ telle que $s_1(]0,1[) \subset C$ $s_1(0) = s_1(1) = x_1$ et qui forme un lacet dual à Σ_{x_1} dans $\overline{C}$. D'autre part, si $\overline{C}$ ne rencontre U qu'au point x_1, on a : $\Phi_L = \Sigma_{x_1}$ et donc $\overline{C}$ est la feuille L. Ceci est en contradiction avec le fait que L est dense et donc intersecte une infinité de fois U. Il existe donc un point x_2 de U distinct de x_1 tel que $\Sigma_{x_2} \subset \overline{C}$. Soit alors $s_2 : [0,1] \to \overline{C}$ une courbe s_1 de L telle que $s_2(]0,1[) \subset C$, $s_2(0) = x_1$ et $s_2(1) = x_2$. La courbe s_1 a nécessairement de l'holonomie. Sinon en la relevant aux feuilles voisines, on obtient une contradiction avec le fait que, si x est dans G', Σ_x disconnecte L_x. On peut donc trouver x'_1 un point de G', C' une composante connexe de $L_{x'_1} - \Phi_{x'_1}$ et 2 courbes $s'_1 : [0,1] \to \overline{C'}$ et $s'_2 : [0,1] \to \overline{C'}$ telles que $s'_1(]0,1[) \subset C'$, $s'_2(]0,1[) \subset C'$, $s'_1(0) = s'_2(0) = x'_1$, $s'_1(1) = x'_3$, $s'_2(1) = x'_2$ et x'_1, x'_2 et x'_3 sont trois points distincts de $\overline{C'} \cap U$. Le bord de C' a donc au moins 3 composantes connexes. Comme x'_1, x'_2 et x'_3 sont trois points distincts de G', les hypersurfaces $\Sigma_{x'_1}$, $\Sigma_{x'_2}$, et $\Sigma_{x'_3}$ disconnectent chacune L' en deux composantes connexes non bornées. Remarquons qu'alors $L' - C'$ a au moins trois composantes connexes non bornées. On obtient une contradiction avec le fait que $L_{x'_1}$ n'a que 2 bouts.

Un raisonnement en tout point analogue montre que le bord de C est constitué d'au plus 2 hypersurfaces Σ_x. S'il en a au moins 3, on peut trouver un Y (réunion de 3 segments issus du même point) dans $\overline{C}$ qui les relie. En le relevant dans une feuille L_x voisine avec x un point de G', on trouve une composante connexe C' de

$L_x - \Phi_x$ dont le bord a, au moins, 3 composantes connexes. Ceci a été exclu. Le bord de C a donc une ou deux composantes connexes compactes qui le séparent chacune d'autres composantes connexes de $L - \Phi_L$.

Rapellons que tout point de L est à $d_{\mathcal{F}}$-distance au plus R de U. D'après ce qui précède, $\overline{C}$ rencontre U en au plus 2 points. Les $d_{\mathcal{F}}$-boules centrées en ces 2 points recouvrent C. Il s'en suit que que le diamètre de $\overline{C}$ est majoré par $4R$ et que $\overline{C}$ est compact.

Montrons que si ∂C a 2 composantes connexes Σ_{x_1} et Σ_{x_2}, alors C n'a pas d'holonomie. S'il en a, considérons une courbe fermée $s : [0,1] \to \overline{C}$ telle que $s(1) = s(0) \in x_1$, $s(1/2) = x_2$ et qui a de l'holonomie. Relevée dans un voisinage, la courbe s donne, dans une feuille $L_{x'_1}$ avec x'_1 un point de G', une courbe $s' : [0,1] \to L_{x'_1}$ qui n'est plus fermée, qui est incluse dans l'adhérence d'une composante connexe C' de $L_{x'_1} - \Phi_{x'_1}$ et qui connecte 3 composantes connexes distinctes $\Sigma_{x'_1}$ $\Sigma_{x'_2}$ et $\Sigma_{x'_3}$ de $\partial C'$. On obtient la même contradiction que précédement (voir figure 4).

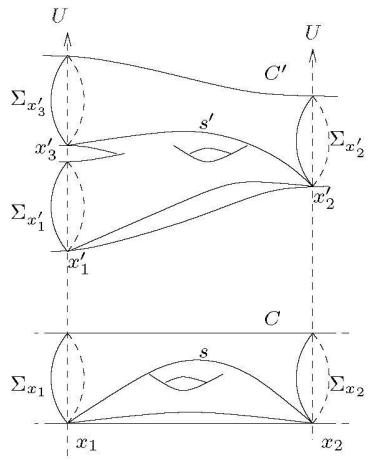

Fig. 4. Pourquoi C n'a pas d'holonomie

De manière analogue, si le bord de C est connexe, le domaine $\overline{C}$ est compact et a de l'holonomie. Sinon, par stabilité de Reeb, on trouve un point x' de G' tel qu'une des composantes connexes de $L_{x'} - \Sigma_{x'}$ est homéomorphe à C et est donc bornée. De plus, cette holonomie est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ car sinon on trouve une courbe s de $\overline{C}$ qui se relève au voisinage en une courbe s' d'une feuille $L_{x'}$ avec x' un point de G', incluse dans l'adhérence d'une composante connexe C' de $L_{x'} - \Phi_{x'}$ et qui connecte 3 composantes connexes distinctes de $\partial C'$. On obtient à nouveau la même contradiction (voir figure 5).

Les conclusions en ce qui concerne la topologie de C sont donc les suivantes : pour toute composante connexe C de $L - \Phi_L$, ∂C a donc une ou deux composantes connexes. S'il en a deux, C n'a pas d'holonomie. S'il n'en a qu'une, C a une holonomie d'ordre 2. De plus $\overline{C}$ est compact et son diamètre a été majoré par $4R$.

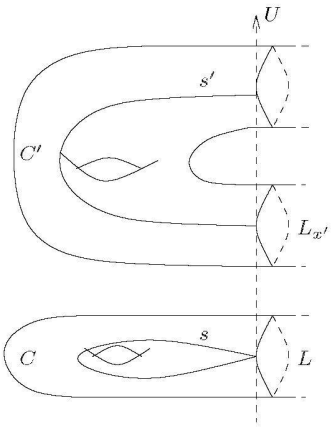

Fig. 5. L'holonomie de C est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

La topologie de L

À partir de la description obtenue des composantes connexes C, on peut maintenant décrire la topologie de la feuille L.

La feuille L est une variété non compacte sans bord obtenue en recollant le long de leurs bords des domaines compacts (les adhérences des composantes connexes C) dont le bord a une ou deux composantes connexes. Il n'y a que 2 graphes infinis dont tous les sommets sont de valence 1 ou 2 : les graphes de Cayley de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. De la même manière, il y a seulement deux possibilités pour L (voir figure 6) :

–le bord de tous les domaines C a deux composantes et L a 2 bouts ;

–un et un seul domaine a un bord connexe et L a 1 bout.

Dans le premier cas, $L - \Phi_L$ n'a pas d'holonomie. Φ_L n'en a pas non plus. Le groupe $\pi_1(L)$ étant engendré par les groupes $\pi_1(L - \Phi_L)$ et $\pi_1(\Phi_L)$, L n'a pas d'holonomie. On peut, moyennant le choix d'un des bouts e de L, totalement ordonner les hypersurfaces Σ_x de Φ_L en posant $\Sigma_x < \Sigma_{x'}$ si et seulement si $\Sigma_{x'}$ sépare e et Σ_x. On obtient un ordre isomorphe à celui de $\mathbb{Z}$. Cet ordre, une fois choisie une origine, détermine une unique bijection croissante entre $\mathbb{Z}$ et Φ_L.

Dans le second cas, une et une seule composante connexe notée C_0 de $L - \Phi_L$ a un bord connexe. C_0 a une holonomie isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les autres composantes de $L - \Phi_L$ n'ont pas d'holonomie, donc en fait $L - C_0$ n'a pas d'holonomie. On peut, cette fois-ci canoniquement, totalement ordonner les hypersurfaces Σ_y de Φ_L en posant : $\Sigma_x < \Sigma_{x'}$ si et seulement si Σ_x est dans la composante connexe bornée de $L - \Sigma_{x'}$. L'ordre obtenu est isomorphe à celui de $\mathbb{N}$ et détermine une unique bijection croissante entre $\mathbb{N}$ et Φ_L.

Le fait que tout point de L soit à $d_{\mathcal{F}}$-distance au plus R de Φ_L entraine que les bijections définies entre Φ_L et $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ selon le cas induisent des quasi-isométries entre L et $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ selon le cas. $\square$

La géométrie des feuilles est suggérée par la figure 6.

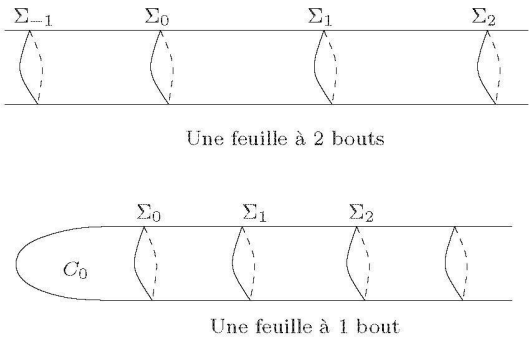

Fig. 6.

Le théorème 1 appelle quelques remarques.

Une variété de classe C^2 à géométrie bornée quasi-isométrique à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ est à croissance linéaire. Le théorème 1 montre donc que toutes les feuilles d'une lamination minimale résiduellement à 2 bouts sont à croissance linéaire. Il peut donc être vu comme un analogue topologique d'un résultat de F. Paulin ([18], voir aussi [17]), démontré dans le cadre d'une relation d'équivalence munie d'une mesure invariante $(\mathcal{R}, \mu)$ et dont les classes sont des graphes : si μ-presque toutes les classes d'une telle relation d'équivalence sont des graphes à 2 bouts, alors μ-presque toutes ses classes sont à croissance linéaire.

Notons aussi le corollaire suivant.

Corollaire 3.1. *Si toutes les feuilles d'une lamination $\mathcal{F}$ minimale sur un espace compact ont 2 bouts alors $\mathcal{F}$ est sans holonomie.*

3.2. Feuilles génériques au sens d'une mesure, théorème 2

À l'aide d'un résultat d'É. Ghys ([11], Proposition Fondamentale), le théorème 2 s'obtient comme un corollaire du théorème 1.

Preuve du théorème 2. Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination minimale résiduellement à 2 bouts sur un espace compact, μ une mesure harmonique sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{T}$ un système de transversales. La mesure μ permet de définir naturellement une classe de mesure $[\mu]$ quasi-invariante par holonomie sur $\mathcal{T}$ (voir [11]).

Reprenons les notations du lemme 3.1 : on a une variété compacte connexe pointée de dimension un de moins que les feuilles $(\Sigma, *)$ et un plongement $\Phi : U \times \Sigma$ où U est un ouvert de $\mathcal{T}$ tel que $\Phi(x, *) = x$ et $\Sigma_x = \Phi(\{x\} \times \Sigma)$ disconnecte presque-sûrement au sens de Baire la feuille L_x. Le théorème 1 (en fait, sa preuve) montre que pour toute feuille L de $\mathcal{F}$, L a 1 ou 2 bouts et L a 1 bout si et seulement si L contient un point x_0 de U, qui est alors unique, tel que Σ_{x_0} borde

une composante connexe bornée C_0 de $L - \Phi_L$. La réunion des tels points x_0 est un borélien de $\mathcal{T}$ qui intersecte de façon compacte ou vide toute feuille de $\mathcal{F}$. La proposition fondamentale d'É. Ghys nous dit qu'il est de $[\mu]$-mesure nulle. La description locale des mesures harmoniques, due à L. Garnett [10], montre que le saturé de ce borélien par $\mathcal{F}$ qui est l'ensemble des feuilles à 1 bout de $\mathcal{F}$, est de μ-mesure nulle. Par suite, μ-presque toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ ont 2 bouts. □

3.3. Le cas des laminations par surfaces, théorème 3

On considère ici une lamination minimale résiduellement à 2 bouts par surfaces $(X, \mathcal{F})$. Rappelons que, d'après [6], la réunion des feuilles qui sont sans holonomie et homéomorphes à des cylindres, des échelles de Jacob à 2 bouts ou des échelles de Jacob à 2 bouts infiniment non orientables est un ensemble résiduel de X. Ces feuilles seront appelées les feuilles *résiduelles* de $\mathcal{F}$.

Preuve du théorème 3. On reprend les notations de la preuve du théorème 1 et du lemme 3.1 : on a, dans chaque feuille L, une réunion Φ_L d'hypersurfaces (ici des cercles). Le diamètre des composantes connexes de $L - \Phi_L$ est uniformément majoré. Soit C une de ces composantes. Son bord est constitué de 1 ou 2 cercles. S'il est constitué d'un seul cercle, C a une holonomie isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. S'il est constitué de 2 cercles, C est sans holonomie.

Commençons par le cas le plus simple : celui où les feuilles résiduelles sont homéomorphes à des cylindres. Considérons une feuille L ayant 2 bouts. Elle est sans holonomie (Théorème 1) et est donc homéomorphe à un cylindre. En effet, une éventuelle anse (ou un plan projectif) dans cette feuille se relèverait dans un voisinage et apparaîtrait par minimalité dans toute feuille de $\mathcal{F}$. La feuille L est quasi-isométrique à $\mathbb{Z}$, homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et à géométrie bornée. Elle donc U-équivalente au cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ muni de sa métrique standard. Soit maintenant L' une feuille ayant 1 bout. Elle est obtenue en recollant le long d'un cercle une composante bornée C_0 avec un domaine qui par le même argument que pour L est U-équivalent à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$. La compacité de $\overline{C_0}$ fait qu'il ne reste plus qu'à déterminer sa topologie. Son holonomie étant d'ordre 2, $\overline{C_0}$ se relève dans les feuilles résiduelles, qui sont des cylindres, en des domaines $\widetilde{C_0}$ qui sont des revêtements d'indice 2 de $\overline{C_0}$ et dont le bord est constitué de 2 cercles (voir figure 5). Ces domaines sont donc homéomorphes à $[0,1] \times \mathbb{S}^1$. La considération de la caractéristique d'Euler montre que $\overline{C_0}$ est un ruban de Moëbius. La feuille L' est U-équivalente à $\mathbb{P}^2 \# (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1)$.

Passons maintenant au cas où les feuilles résiduelles sont homéomorphes à l'échelle de Jacob à 2 bouts. Considérons une anse (homéomorphe à un tore privé d'un disque noté $\mathbb{T}^{2\bullet}$) dans une telle feuille. Par stabilité de Reeb, cette anse admet dans X un voisinage homéomorphe à $U \times \mathbb{T}^{2\bullet}$ feuilleté trivialement où U est un ouvert de $\mathcal{T}$. Le lemme 1.2 donne un majorant uniforme à la $d_{\mathcal{F}}$-distance entre tout point de X et ce voisinage. Cette remarque associée au fait que les

feuilles à 2 bouts sont à géométrie bornée et quasi-isométriques à $\mathbb{Z}$ montre que toutes les feuilles à 2 bouts sont U-équivalentes à J_2. Considérons maintenant une feuille à 1 bout L'. Elle est obtenue en recollant une surface compacte $\overline{C_0}$ dont le bord est un cercle et une surface non compacte qui, pour les mêmes raisons que précédemment, est U-équivalente à J_1 privée d'un disque. La classification des surfaces non nécessairement orientables (voir par exemple [1]) montre que, selon la topologie de C_0, L' est U-équivalente à J_1, $\mathbb{P}^2\#J_1$ ou $\mathbb{K}^2\#J_1$. Dans le cas où les feuilles résiduelles sont homéomorphes à des échelles de Jacob non orientables à 2 bouts, un raisonnement très analogue montre que les feuilles à 2 bouts sont U-équivalentes à J_2' et les feuilles à 1 bout U-équivalentes à J_1'. □

Il est sans doute utile de rassembler les résultats de cette section dans un tableau. Il décrit suivant le type des feuilles résiduelles d'une lamination minimale résiduellement à 2 bouts, le type des feuilles spéciales possibles. Notons que nous avons montré dans la section 2 que tous ces types étaient effectivement réalisés.

Feuilles résiduelles	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$	J_2	J_2'
Feuilles spéciales	$\mathbb{P}^2\#(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1)$	J_1 $\mathbb{P}^2\#J_1$ $\mathbb{K}^2\#J_1$	J_1'

Notons pour conclure cette section que dans les laminations de dimension 3 ou plus, une telle classification est impossible. É. Ghys a par exemple construit une lamination minimale dont toutes les feuilles ont 2 bouts et telle que 2 feuilles quelconques distinctes ne sont pas homéomorphes [11].

4. Laminations à 2 bouts et suspensions, théorème 4

Au vu du théorème 1, il est naturel d'essayer de comparer les laminations minimales résiduellement à 2 bouts, et les laminations minimales de dimension 1, ces dernières vérifiant trivialement les conclusions du théorème 1 : leurs feuilles sont isométriques à $\mathbb{R}$ et n'ont pas d'holonomie. Le résultat modèle dans cette direction est dû à É. Ghys ([11] Théorème C p. 390) : si $(X, \mathcal{F})$ est une lamination munie d'une mesure transverse invariante dont presque toutes les feuilles ont 2 bouts alors $(X, \mathcal{F})$ est une *extension compacte mesurable d'une lamination de dimension* 1.

Pour des raisons techniques, on se restreint aux laminations minimales *transversalement Cantor*, c'est à dire celles dont les transversales T_i sont homéomorphes à l'espace de Cantor K. La lamination possède alors de nombreuses transversales à la fois ouvertes et fermées. Rappelons que dans K tout point a une base de voisinages homéomorphes à K.

En s'inspirant du travail d'É. Ghys [11], on donne la définition suivante d'*extension compacte de lamination.*

Definition 4.1. La lamination $(X, \mathcal{F})$ est une extension compacte de la lamination $(Y, \mathcal{G})$ s'il existe une application continue $\pi : X \to Y$, surjective, à fibres compactes, telle que, pour toute feuille L de $\mathcal{G}$, $\pi^{-1}(L)$ est une feuille de $\mathcal{F}$ sur laquelle π induit une quasi-isométrie avec L.

Notre but est de montrer qu'une lamination minimale transversalement Cantor résiduellement à 2 bouts est une extension compacte d'une suspension d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Avant d'aborder ce cas, rappelons celui plus classique de $\mathbb{Z}$. Soit ϕ un homéomorphisme minimal de K. Il induit une action de $\mathbb{Z}$ minimale sur K. On considère alors $K \times [0,1]$ muni de la lamination horizontale, et on identifie tout point $(x,1)$ avec $(\phi(x),0)$. L'espace Y obtenu est séparé et muni naturellement d'une lamination minimale $\mathcal{G}$ de dimension 1 orientable, dont les feuilles peuvent être vues comme des segments recollés à leurs extrémités. La lamination $\mathcal{G}$ est la *suspension de l'action de* $\mathbb{Z}$ donnée par ϕ (voir figure 7).

Étudions maintenant le cas de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit ϕ_0 et ϕ_1 deux homéomorphismes sans point fixe de K tels que $\phi_0^2 = \phi_1^2 = \mathrm{Id}_K$ engendrant une action minimale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur K. L'espace $K \times [0,1]$ est muni de la lamination horizontale, et on identifie tout point $(x,0)$ avec $(\phi_0(x),0)$ et tout point $(x,1)$ avec $(\phi_1(x),1)$. L'espace Y' obtenu est séparé, compact et muni naturellement d'une lamination minimale $\mathcal{G}'$ de classe C^0, de dimension 1, en général non orientable, dont on peut voir les feuilles comme des segments recollés à leurs extrémités. L'espace $(Y', \mathcal{G}')$ est la *suspension de l'action de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ associée aux générateurs ϕ_0 et ϕ_1 (voir figure 8).

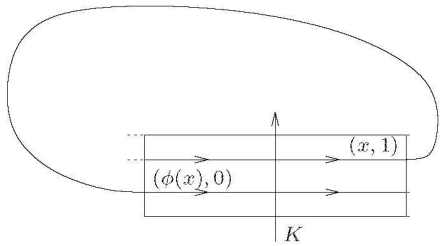

Fig. 7. Une suspension de $\mathbb{Z}$

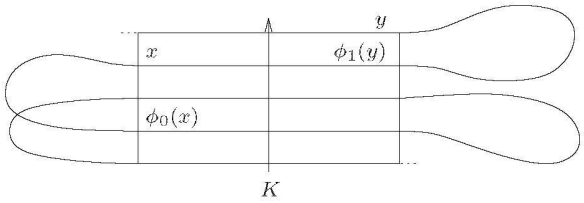

Fig. 8. Une suspension de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

En fait, le cas de $\mathbb{Z}$ se ramène à celui de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En effet, soit ϕ un homéomorphisme minimal de K, et K' l'union disjointe de 2 copies de K notées respectivement K_0 et K_1. L'identité et l'homéomorphisme ϕ de K déterminent 2

involutions de K' envoyant K_0 et K_1 l'un sur l'autre. La suspension de l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ associée est homéomorphe à la suspension de ϕ.

Les laminations construites précédemment sont sans holonomie et toutes leurs feuilles ont 2 bouts, correspondant respectivement aux 2 bouts de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Elles ne peuvent donc rendre compte du comportement dynamique des laminations résiduellement à 2 bouts dont certaines feuilles ont 1 bout. Pour cette raison, dans la construction de Y', on s'intéresse aussi au cas où les homéomorphismes ϕ_0 et ϕ_1 ont un ensemble non vide de points fixes mais dont l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ associée est toujours minimale. Il n'est pas difficile de voir que cette hypothèse entraîne que l'ensemble des points fixes de ϕ_0 et ϕ_1 est maigre. L'espace Y' obtenu par la même construction que précédemment est séparé et muni d'une lamination $\mathcal{G}'$ *singulière* de dimension 1 ; les points singuliers de la lamination correspondant aux points fixes de ϕ_0 et ϕ_1. Le type des singularités est le suivant. Certains ouverts de carte sont homéomorphes à $K\times]-1,+1[$ muni de la lamination horizontale, où l'on identifie les points $(x,-\alpha)$ et $(\phi(x),\alpha)$ avec ϕ un homéomorphisme d'ordre 2 ayant un ensemble maigre non vide de points fixes. Nous dirons que $(Y',\mathcal{G}')$ est une *suspension singulière de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir la figure 9). La géométrie des feuilles régulières et singulières est sugérée par la figure 9. Elles vérifient les conclusions du théorème 1 : elles sont quasi-isométriques à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$. Chaque feuille à 1 bout, homéomorphe à $\mathbb{R}^+$, a une holonomie isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ due à la singularité associée.

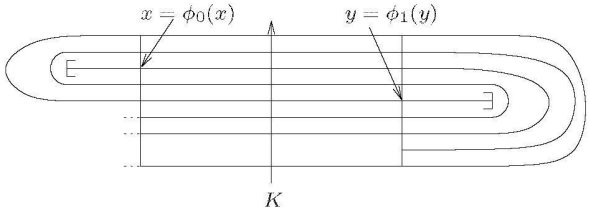

Fig. 9. Une suspension singulière de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

On connait des actions minimales de $\mathbb{Z}$ sur K : les *modifications de Denjoy* des rotations irrationnelles du cercle. Dans la section 2, on a défini une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^1$ engendrée par 2 symétries s_0 et s_1. La modification de Denjoy appliquée à cette action fournit une action minimale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur K et donc une suspension de cette action telle que définie précédemment. Plus précisément, la modification de Denjoy consiste à "ouvrir" des orbites de l'action. Si on ouvre les orbites des points fixes de s_0 et s_1, on obtient une action sans point fixe et donc une suspension régulière. Si on ouvre une orbite sans point fixe, on obtient une action avec points fixes et donc une suspension singulière.

On peut maintenant prouver le théorème 4.

Preuve du théorème 4. Commençons par la partie facile du théorème. Si la lamination minimale $\mathcal{F}$ est une extension compacte de la suspension d'une action minimale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont quasi-isométriques à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$. Les

feuilles quasi-isométriques à $\mathbb{N}$ correspondent aux points fixes de l'action. Elles forment un ensemble maigre et les feuilles quasi-isométriques à $\mathbb{Z}$ forment un ensemble résiduel. La lamination est résiduellement à 2 bouts.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ soit une lamination minimale résiduellement à 2 bouts sur un espace compact et reprenons les conclusions et notations du lemme 3.1, à ceci près qu'on choisit un ouvert transverse qui est un Cantor. On note donc ce dernier K et non plus U. Le plongement Φ se prolonge en un plongement $\Psi : K \times [0,1] \times \Sigma \to X$ qui coïncide avec Φ sur $K \times \{0\} \times \Sigma$ et envoie $\{x\} \times [0,1] \times \Sigma$ dans L_x. Si L est une feuille, on note Ψ_L la réunion des domaines $\Psi(\{x\} \times [0,1] \times \Sigma)$ pour x parcourant $L \cap K$. Dans X, considérons la relation d'équivalence qui, d'une part, identifie chacun des ensembles $\Psi(\{x\} \times \{t\} \times \Sigma)$ où $t \in]0,1[$ à un point et qui, d'autre part, dans chaque feuille L de $\mathcal{F}$, identifie chacune des adhérences des composantes connexes de $L - \Psi_L$ à un point. L'espace quotient obtenu est homéomorphe et identifié à $K \times [0,1]/\sim$ où les classes de la relation d'équivalence $\sim$ sont des paires de points ou des singletons de $K \times \{0,1\}$ selon que le bord de la composante connexe de $L - \Psi_L$ associée a deux ou une seule composante connexe. Soit alors ϕ l'involution telle que, pour tout $x \in K \times \{0,1\}$, $\{x, \phi(x)\}$ est la classe de x pour $\sim$. L'application ϕ est un homéomorphisme. L'ensemble des points x tels que $x = \phi(x)$ est maigre car son saturé est l'ensemble des feuilles à 1 bout de $\mathcal{F}$.

Nous ne sommes pas loin de la conclusion : l'espace $K \times [0,1]/\sim$ est muni naturellement de la lamination $\mathcal{G}$ de dimension 1, éventuellement singulière, induite par la lamination horizontale. Les singularités correspondent aux points fixes de ϕ. On a une application quotient $\pi : X \to K \times [0,1]/\sim$ à fibres compactes, qui envoie la lamination $\mathcal{F}$ sur la lamination $\mathcal{G}$ et qui, le diamètre les écrasements étant uniformément borné d'après le lemme 1.2, est une quasi-isométrie en restriction aux feuilles. De plus, $\mathcal{F}$ étant minimale, $\mathcal{G}$ est minimale. Il ne reste donc plus qu'à montrer que l'on peut se ramener au cas d'une suspension d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans le cas où ϕ envoie $K \times \{0\}$ sur $K \times \{1\}$, on a terminé. En effet, ϕ définit, via l'identité naturelle entre $K \times \{0\}$ et $K \times \{1\}$, un homéomorphisme toujours noté ϕ de K dont $\mathcal{G}$ est la suspension. Comme $\mathcal{G}$ est minimale, ϕ est un homéomorphisme minimal et $\mathcal{F}$ est une extension compacte de la suspension d'une action minimale de $\mathbb{Z}$. On se ramène au cas de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par la construction donnée en introduction. Dans ce cas, l'action n'a pas de point fixe et la lamination $\mathcal{G}$ obtenue est régulière.

Dans le cas contraire, soit x un point de K tel que $\phi((x,1))$ est un point de $K \times \{1\}$ différent de $(x,1)$. L'homéomorphisme ϕ envoie alors un voisinage $K_0 \times \{1\}$ de $(x,1)$ sur un voisinage $K_1 \times \{1\}$ de $\phi((x,1))$ où K_0 et K_1 sont deux ensembles de Cantor disjoints de K. On considère alors $K' = K_0 \cup K_1$ et on reprend la construction précédente en remplaçant K par K' et en "primant" les notations. L'application ϕ' obtenue ainsi coïncide avec ϕ sur $K' \times \{1\}$. L'homéomorphisme ϕ' envoie donc $K' \times \{1\}$ sur lui même et, par suite $K' \times \{0\}$ sur lui même. On pose :

$\phi_0 = \phi'_{K'\times\{0\}}$ et $\phi_1 = \phi'_{K'\times\{1\}}$. Les applications ϕ_0 et ϕ_1 sont des involutions de K'. La lamination $\mathcal{G}'$ est la suspension de l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendrée par ϕ_0 et ϕ_1. Comme dans le cas précédent, $\mathcal{F}$ est une extension compacte par l'application π' de la suspension d'une action minimale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans ce cas, la lamination obtenue est singulière si et seulement si $\mathcal{F}$ a des feuilles ayant 1 bout. □

Pour conclure, considérons une lamination minimale $(X, \mathcal{F})$ transversalement Cantor dont toutes les feuilles ont 2 bouts. Le cas où $(X, \mathcal{F})$ est une extension compacte d'une action minimale de $\mathbb{Z}$ sur K peut être caractérisé comme suit. Reprenons les notations de la preuve du théorème 4. Soit x un point de K, le plongement Ψ détermine un choix parmis les 2 bouts de L_x. On note $\mathcal{E}_{x,+}(L_x)$ le bout qui est séparé de $\Psi(\{x\}\times]0,1[\times\Sigma)$ par $\Psi(\{x\} \times \{1\} \times \Sigma)$. Les méthodes utilisées dans cette section montrent sans difficulté que la lamination $(X, \mathcal{F})$ est une extension compacte d'une action minimale de $\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe un tel plongement Ψ tel que si x et y sont deux points quelconques de K tels que $y \in L_x$ alors $\mathcal{E}_{x,+}(L_x) = \mathcal{E}_{y,+}(L_x)$.

Références

[1] M. Berger and B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses Universitaires de France, Paris, second edition, 1992.

[2] G. D. Birkhoff, *Collected mathematical papers* (in three volumes). Vol. I, Dover Publications Inc., New York, 1968.

[3] E. Blanc, Every surface is a minimal leaf (travail en préparation).

[4] E. Blanc, *Propriétés génériques des laminations*, PhD thesis, Université Lyon-1, 2001.

[5] A. Candel and L. Conlon, *Foliations, I*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[6] J. Cantwell and L. Conlon, Generic leaves, *Comment. Math. Helv.* **73** (1998), 306–336.

[7] D. M. Cass, Minimal leaves in foliations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **287** (1985), 201–213.

[8] D. B. A. Epstein, K. C. Millett and D. Tischler, Leaves without holonomy, *J. London Math. Soc. (2)* **16** (1977), 548–552.

[9] H. Freudental, Über die Enden diskreter Räume und Gruppen, *Comment. Math. Helv.* **17** (1945), 1–38.

[10] L. Garnett, Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion, *J. Funct. Anal.* **51** (1983), 285–311.

[11] É. Ghys, Topologie des feuilles génériques, *Ann. of Math. (2)* **141** (1995), 387–422.

[12] É. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann, *Panoramas & Synthèses* **8** (2000), 49–95.

[13] C. Godbillon, *Feuilletages*, Études géométriques, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.

[14] G. Hector, Feuilletages en cylindres, in : *Geometry and topology*, 252–270, Lecture Notes in Math. 597, Springer, Berlin, 1977.

[15] H. Hopf, Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen, *Comment. Math. Helv.* **16** (1944), 81–100.

[16] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[17] G. Levitt, On the cost of generating an equivalence relation, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **15** (1995), 1173–1181.

[18] F. Paulin, Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes, *Markov Process. Related Fields*, **5** (1999), 163–200.

[19] P. Scott, and T. Wall, Topological methods in group theory, in : *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, 137–203, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.

Emmanuel Blanc
UMPA ENS-Lyon
46, allée d'Italie
F–69364 Lyon cedex 07
France

(Received: September 5, 2002)

To access this journal online:
http://www.birkhauser.ch