Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 79 (2004)

Artikel: Une version feuilletée du théorème de translation de Brouwer
Autor: Calvez, Patrice Le
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59506

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 79 (2004) 229–259
0010-2571/04/020229-31
DOI 10.1007/s00014-003-0745-9

© 2004 Birkhäuser Verlag, Basel

Commentarii Mathematici Helvetici

Une version feuilletée du théorème de translation de Brouwer

Patrice Le Calvez

Abstract. The Brouwer's plane translation theorem asserts that for a fixed point free orientation preserving homeomorphism f of the plane, every point belongs to a proper topological imbedding C of $\mathbf{R}$, disjoint from its image and separating $f(C)$ and $f^{-1}(C)$. Such a curve is called a Brouwer line. We prove that we can construct a foliation of the plane by Brouwer lines.

Mathematics Subject Classification (2000). 37E30, 37E35.

Mots clés. Homéomorphisme du plan, droite de Brouwer, feuilletage.

0. Notations

On munit le plan $\mathbf{R}^2$ de son orientation et de sa structure euclidienne usuelle. On note R_θ la rotation d'angle θ. On note $u \wedge v$ le déterminant, dans la base canonique, de deux vecteurs u et v de $\mathbf{R}^2$.

On appelera *disque* de $\mathbf{R}^2$ toute partie homéomorphe à $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{R}^2 \mid \|z\| \leq 1\}$.

On appelera *droite* de $\mathbf{R}^2$ tout plongement topologique propre de $\mathbf{R}$, ou plus précisément toute classe d'équivalence d'un tel plongement par reparamétrage strictement croissant. Une droite Γ est alors déterminée par son image et une orientation. Grâce au théorème de Schoenflies, on peut construire un homéomorphisme h de $\mathbf{R}^2$ préservant l'orientation tel que $h \circ \Gamma(t) = (0, t)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$. La partie fermée $h^{-1}([0, +\infty[\times \mathbf{R})$ est alors indépendante de h, on dit que c'est la partie *à droite* de Γ et on la note $D(\Gamma)$. De même, on note $G(\Gamma) = h^{-1}(]-\infty, 0] \times \mathbf{R})$ la partie *à gauche* de Γ. Remarquons que $D(\Gamma) \setminus \Gamma$ et $G(\Gamma) \setminus \Gamma$ sont les composantes connexes de $\mathbf{R} \setminus \Gamma$ (on identifiera souvent une droite et son image quand il n'y aura pas d'ambiguité liée à l'orientation).

On dira que deux droites Γ et Γ' *n'ont pas d'intersection transverse* si $\Gamma \subset D(\Gamma')$ ou $\Gamma \subset G(\Gamma')$. Il est facile de voir que cette relation est symétrique. Plus précisément, Γ et Γ' n'ont pas d'intersection transverse si et seulement si l'une des quatre propriétés suivantes est vérifiée :

- $D(\Gamma) \subset D(\Gamma')$ (et alors $G(\Gamma') \subset G(\Gamma)$) ;
- $D(\Gamma') \subset D(\Gamma)$ (et alors $G(\Gamma) \subset G(\Gamma')$) ;

- $D(\Gamma) \cup D(\Gamma') = \mathbf{R}^2$ (et alors $G(\Gamma) \cap G(\Gamma') = \Gamma \cap \Gamma'$) ;
- $G(\Gamma) \cup G(\Gamma') = \mathbf{R}^2$ (et alors $D(\Gamma) \cap D(\Gamma') = \Gamma \cap \Gamma'$).

1. Introduction

Commençons par rappeler le théorème de translation de Brouwer ([B]) :

Théorème 1.1. *Soit f un homéomorphisme de $\mathbf{R}^2$ préservant l'orientation et sans point fixe. Par tout point du plan passe une droite Γ telle que $f(\Gamma) \subset D(\Gamma) \setminus \Gamma$ et $f^{-1}(\Gamma) \subset G(\Gamma) \setminus \Gamma$.*

On appelera *homéomorphisme de Brouwer* un homéomorphisme f vérifiant les hypothèses du théorème et *droite de Brouwer* de f une droite Γ vérifiant la conclusion. En dehors de la version originale de Brouwer, il faut noter la preuve actualisée qu'en donne Guillou [G] (on peut également citer Franks [Fr2] ou Le Calvez, Sauzet [LS]).

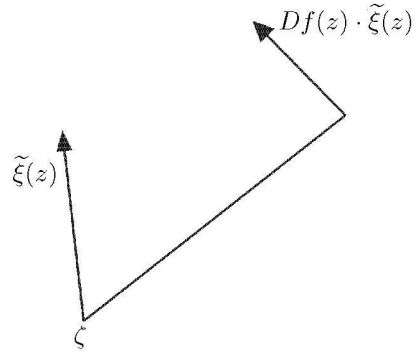
La démonstration du théorème est très simple dans deux cas particuliers.

i) Supposons d'abord que f soit le temps 1 d'un champ de vecteurs ξ de classe C^1. Le champ de vecteurs $\eta = R_{\frac{\pi}{2}} \circ \xi$ est de classe C^1 et sans singularité. Le théorème de Poincaré-Bendinxon nous dit que toute orbite de η est une droite, on constate très facilement que c'est une droite de Brouwer. On peut approximer η par un champ de vecteurs $\widetilde{\eta}$ de classe C^∞ tel que $\xi(z) \wedge \widetilde{\eta}(z) > 0$, pour tout $z \in \mathbf{R}^2$. Toute orbite de $\widetilde{\eta}$ est encore une droite de Brouwer. On obtient un feuilletage de classe C^∞ de $\mathbf{R}^2$ par des droites de Brouwer de f.

ii) Supposons maintenant que f soit C^1-proche de l'identité. Plus précisément supposons que $Df(z)$ n'ait pas de valeur propre réelle négative, si $z \in \mathbf{R}^2$. Considérons alors les champs de vecteurs

$$\xi_1 : z \mapsto \frac{f(z) - z}{\|f(z) - z\|} \text{ et } \xi_2 : z \mapsto -\frac{Df(z)^{-1}.(f(z) - z)}{\|Df(z)^{-1}.(f(z) - z)\|}.$$

Puisque $\xi_1(z) \neq \xi_2(z)$, par hypothèse, et puisque $\mathbf{R}^2$ est simplement connexe, on peut trouver une fonction continue $\theta : \mathbf{R}^2 \to]0, 2\pi[$ telle que $\xi_2(z) = R_{\theta(z)}.\xi_1(z)$ puis définir le champ de vecteurs continu $\xi : z \mapsto R_{\frac{\theta(z)}{2}}.\xi_1(z)$. On a alors $\xi_1(z) \wedge \xi(z) = \xi(z) \wedge \xi_2(z) > 0$. On peut ensuite approximer ξ par un champ de vecteurs $\widetilde{\xi}$ de classe C^∞, tel que $\xi_1(z) \wedge \widetilde{\xi}(z) > 0$ et $\widetilde{\xi}(z) \wedge \xi_2(z) > 0$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que toute orbite de $\widetilde{\xi}$ est une droite de Brouwer. Là encore, on a construit un feuilletage de classe C^∞ par des droites de Brouwer.



Il existe un autre cas, plus difficile, où l'on sait feuilleter le plan par des droites de Brouwer, c'est le cas où f est un difféomorphisme qui commute avec les translations entières (et qui relève donc un difféomorphisme du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ isotope à l'identité). On construit alors un feuilletage de classe C^1, invariant par les translations entières, dont les feuilles sont des droites de Brouwer (voir [LeC]). L'idée de la démonstration provient de la géométrie symplectique. Tout difféomorphisme de $\mathbf{T}^2$ isotope à l'identité peut s'écrire comme la composée de $2n$ difféomorphismes proches en topologie C^1, alternativement du twist de Dehn $F^* : (x,y) \mapsto (x+y,y)$ et de son inverse. Ces difféomorphismes vérifient la propriété essentielle suivante : ils dévient la verticale. Si on fixe un relèvement f de F à $\mathbf{R}^2$, on peut définir naturellement un champ de vecteurs ξ sur la variété $E = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^{2n-2}$, ainsi qu'une fibration $q : E \to \mathbf{T}^2$ envoyant les singularités du champ sur les point fixes de F qui se relèvent en des points fixes de f. Dans le cas particulier où F est le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne, le champ ξ est le champ de gradient d'une fonction H. Cette fonction est une fonction génératrice de F. Dans le cas général, si on suppose que f n'a pas de point fixe, on peut montrer que l'ensemble des points $x \in E$ dont l'orbite par le flot de ξ est bornée, est une variété invariante M, de classe C^1, telle que $q_{|M} : M \to \mathbf{T}^2$ est un difféomorphisme. Le feuilletage en droites de Brouwer de f, quand on le projette dans le tore $\mathbf{T}^2$, n'est rien d'autre que l'image par $q_{|M}$ du feuilletage de M en courbes intégrales de ξ.

La question se pose naturellement de savoir si on peut feuilleter le plan par des droites de Brouwer, pour un homéomorphisme de Brouwer f quelquonque. Nous répondrons positivement dans ce travail à cette question.

Théorème 1.2. *Si f est un homéomorphisme de Brouwer, il existe un feuilletage topologique formé de droites de Brouwer de f.*

Le théorème de translation de Brouwer est appliqué assez fréquemment dans l'étude de la dynamique de difféomorphismes ou d'homéomorphismes de surfaces. L'énoncé précédent dit en particulier que l'on peut choisir continûment une droite de Brouwer par tout point du plan et on peut espérer des applications futures de

ce résultat. Remarquons le point suivant qui indique que la dynamique du feuilletage est en quelque sorte transverse à celle de l'homéomorphisme. Pour tout point $z \in \mathbf{R}^2$, on peut trouver un arc γ_z joignant z à $f(z)$ et transverse au feuilletage. La concaténation des arcs $\gamma_{f^n(z)}$ définit une droite (elle n'a pas de point d'accumulation) transverse au feuilletage qui contient l'orbite de z. Il est peu probable qu'on puisse trouver une preuve du théorème 1.2 par la méthode employée dans [LeC] expliquée plus haut, même dans le cas des difféomorphismes. En effet, la compacité du tore $\mathbf{T}^2$ est essentielle pour écrire le difféomorphisme comme composée de difféomorphismes déviant la verticale et donc pour construire le champ de vecteurs ξ. La méthode employée ici sera tout à fait différente, n'utilisera pas d'argument de différentiabilité, et ne sera pas troublée par le manque de compacité du plan.

En liaison avec ce qui a été dit plus haut pour les difféomorphismes du tore, on peut se poser la question naturelle suivante :

Si f est un homéomorphisme de Brouwer qui commute avec les éléments d'un groupe discret G d'homéomorphismes de $\mathbf{R}^2$ préservant l'orientation, agissant proprement et librement, peut-on obtenir un feuilletage en droites de Brouwer qui soit invariant sous l'action de G ?

On peut poser le problème dans les termes suivants. Soit F_1 un homéomorphisme d'une surface connexe orientable sans bord M, temps 1 d'une isotopie $(F_t)_{t\in[0,1]}$ issue de l'identité et $(f_t)_{t\in[0,1]}$ l'isotopie relevée au revêtement universel $\widetilde{M}$ qui est issue de l'identité. Supposons que f_1 n'ait pas de point fixe, c'est-à-dire supposons que toute courbe fermée $t \mapsto F_t(z)$ soit non contractile. Le revêtement est alors un plan (du point de vue topologique) et la surface est soit ouverte, soit égale au tore $\mathbf{T}^2$. Peut-on trouver un feuilletage sur M qui se relève sur $\widetilde{M}$ en un feuilletage en droites de Brouwer de f_1. Autrement dit, peut on trouver un feuilletage, tel que pour tout point $z \in M$, il existe un arc transverse au feuilletage qui soit homotope à extrémités fixées à l'arc $t \mapsto F_t(z)$? Un tel résultat permettrait de retrouver rapidement certains résultats sur les homéomorphismes de surfaces (on peut citer le résultat de Franks [Fr3] sur l'existence d'une infinité de points périodiques pour un homéomorphisme de S^2 préservant l'aire et ayant au moins trois points fixes, ou celui de Floer [Flo] et Sikorav [Si] sur l'existence d'au moins trois points fixes pour un difféomorphisme hamiltonien d'une surface de genre $g \geq 1$, ou encore la généralisation de ce résultat aux homéomorphismes, due à Matsumoto [M]). On peut voir cet article comme un premier pas vers la version équivariante.

L'outil principal de la démonstration du théorème 1.2 est la notion de décomposition en briques, libre et maximale, du plan. La notion de décomposition libre a été introduite par Flucher [Flu] pour montrer l'existence d'un deuxième point fixe dans la version topologique du théorème de Conley-Zehnder en dimension deux et utilisée ensuite dans [LS] pour obtenir une démonstration du théorème de translation de Brouwer. La notion de décomposition en briques, libre et maximale a été développée et utilisée par Sauzet dans sa thèse [Sa] et appliquée très récemment par Le Roux [LeR] dans l'étude de la dynamique d'un homéomorphisme du plan

au voisinage d'un point fixe d'indice de Lefschetz $\neq 1$. C'est la donnée d'un graphe localement fini du plan tel que tout sommet est extrémité de trois arêtes, tel que toute cellule fermée délimitée par ce graphe est libre, c'est-à-dire disjointe de son image, enfin tel que la réunion de deux cellules adjacentes n'est jamais libre.

Au paragraphe 2, nous rappelerons les principales propriétés de ces décompositions obtenues par Sauzet, en particulier l'existence d'une décomposition en briques libre et maximale pour un homéomorphisme de Brouwer. Dans le paragraphe 3, nous verrons comment écrire le graphe comme réunion de droites de Brouwer n'ayant pas d'intersections transverses deux à deux. Au paragraphe 4, nous prolongerons notre famille de droites pour construire un "quasi-feuilletage" ayant le graphe comme lieu de singularités. Plus précisément, nous écrirons le plan comme réunion de droites de Brouwer n'ayant pas d'intersections transverses deux à deux. Tout point en dehors du graphe appartient à une unique droite de notre famille et celle-ci définit un feuilletage au voisinage de ce point ; un point du graphe qui n'est pas un sommet appartient éventuellement à plusieurs droites, mais toutes coïncident au voisinage du point avec l'arête contenant ce point et la famille définit un feuilletage dans ce voisinage ; il n'y a pas de feuilletage au voisinage d'un sommet. Au paragraphe 5 nous désingulariserons ce quasi-feuilletage pour obtenir un feuilletage en droites de Brouwer en épaississant convenablement le graphe de la décomposition.

Remarquons que deux droites de Brouwer Γ et Γ' n'ont pas d'intersection transverse si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $D(\Gamma) \subset D(\Gamma')$;
- $D(\Gamma') \subset D(\Gamma)$;
- $G(\Gamma) \cap G(\Gamma') = \emptyset$;
- $D(\Gamma) \cap D(\Gamma') = \emptyset$.

2. Décompositions en briques, libres et maximales

On va rappeler dans ce paragraphe les résultats de Sauzet, en esquissant les démonstrations que l'on trouvera de façon plus développées dans [Sa]. On appelera *décomposition en briques* du plan la donnée d'un ensemble stratifié $\Sigma(\mathcal{D})$ de dimension un, appelé *squelette* de la décomposition $\mathcal{D}$, avec une sous-variété de dimension zéro S tel que de tout sommet $s \in S$ sont issues exactement trois arêtes. Les adhérences des composantes connexes de $\mathbf{R}^2 \setminus \Sigma(\mathcal{D})$ sont les *briques* de la décomposition. Une décomposition en briques $\mathcal{D}'$ est une *sous-décomposition* de $\mathcal{D}$ si $\Sigma(\mathcal{D}') \subset \Sigma(\mathcal{D})$. Si f est un homéomorphisme de Brouwer, on peut construire une décomposition libre, c'est-à-dire une décomposition dont toute brique est libre (i.e. disjointe de son image par f). On peut trouver alors une sous-décomposition en briques qui est libre et dont toute sous-décomposition stricte ne l'est pas. Si deux briques de cette sous-décomposition sont adjacentes (i.e. ont une arête

en commun), la réunion des deux briques n'est pas libre. On dira qu'on a une décomposition en briques, libre et maximale. On peut démontrer, mais c'est bien plus difficile car il faut modifier la décomposition initiale, que l'on peut construire une décomposition en briques, libre et maximale, dont toute brique est bornée. Chaque brique est alors un disque. On se fixe dès à présent une décomposition en briques $\mathcal{D}$, libre et maximale, on note B l'ensemble des briques, A l'ensemble des arêtes, et S l'ensemble des sommets. Pour ne pas avoir à séparer différents cas par la suite, nous supposerons de plus que toute brique est bornée.

Définition. On dira qu'une partie X de B est *connexe* si, pour toutes briques $\beta, \beta' \in X$, il existe une suite $(\beta_i)_{0\leq i\leq n}$, où $\beta_0 = \beta$ et $\beta_n = \beta$, telle que β_i et β_{i+1} sont adjacentes si $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

On identifiera par la suite une partie X de B et la partie fermée de $\mathbf{R}^2$, réunion des briques de X. Dans certains cas, il n'y a aura pas d'ambiguité : si on parle de l'intérieur $\mathrm{Int}X$ de X, de sa frontière ∂X ou de son image $f(X)$, alors X est une partie de $\mathbf{R}^2$. En cas d'ambiguité on lèvera celle-ci en écrivant $X \subset B$ ou $X \subset \mathbf{R}^2$. Remarquons que la connexité de $X \subset B$ équivaut à celle de $X \subset \mathbf{R}^2$. Remarquons qu'elle équivaut aussi à celle de $\mathrm{Int}(X)$. Remarquons enfin (c'est encore une propriété des décompositions en briques) que ∂X est une variété topologique de dimension 1 pour tout $X \subset B$.

On définit naturellement une application $\varphi : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$ en posant :

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= \{\beta \in B |\text{ il existe } \beta' \in X \text{ tel que } \beta \cap f(\beta') \neq \emptyset\}\\ &= \{\beta \in B | \beta \cap f(X) \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Remarquons que $\varphi(X)$ est connexe si X est connexe. On a alors le résultat fondamental suivant :

Proposition 2.1. *Pour tout $\beta \in B$, l'ensemble $\bigcup_{n\geq 1} \varphi^n(\{\beta\})$ ne contient pas β.*

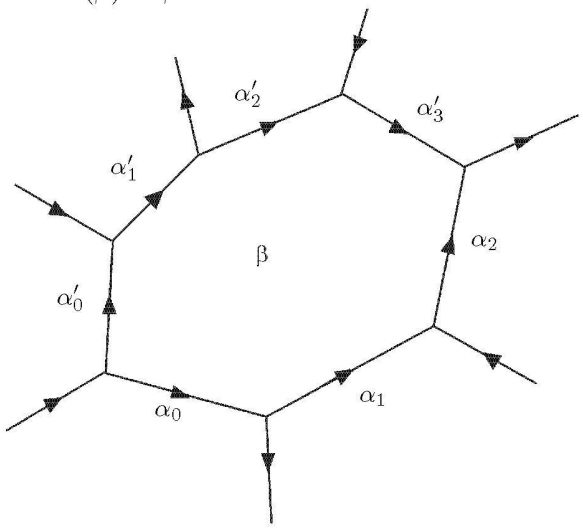
Le classique lemme de Franks [Fr1] nous dit qu'il n'existe pas de suite $(\beta_i)_{0\leq i\leq n}$, $n \geq 1$, de briques dans B, telle que $\beta_0 = \beta_n$ et telle que $f(\mathrm{Int}(\beta_i)) \cap \mathrm{Int}(\beta_{i+1}) \neq \emptyset$, si $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Le résultat précédent, en fait du à Guillou et Le Roux, exprime que le résultat est encore vrai en remplaçant la brique ouverte $\mathrm{Int}(\beta_i)$ par la brique fermée β_i.

La proposition 2.1 nous permet d'orienter naturellement le squelette de la décomposition. Considérons une arête α et notons β_1, β_2 les briques qui contiennent α. Puisque $\beta_1 \cup \beta_2$ n'est pas libre, on peut supposer que $f(\beta_1) \cap \beta_2 \neq \emptyset$, c'est-à-dire $\beta_2 \in \varphi(\{\beta_1\})$. Puisque $\beta_1 \notin \varphi^2(\{\beta_1\})$, on sait que $\beta_1 \notin \varphi(\{\beta_2\})$ et donc que $f(\beta_2) \cap \beta_1 = \emptyset$. On peut donc orienter α pour que β_1 soit la brique adjacente à α située à gauche de α et β_2 celle située à droite. On écrira $\beta_1 = g(\alpha)$ et $\beta_2 = d(\alpha)$. L'orientation de α permet de définir naturellement parmi les extrémités de α (qui sont toujours distinctes) la *source* $s(\alpha) \in S$ et le *but* $b(\alpha) \in S$.

On dira qu'une suite $(\alpha_i)_{i\in I}$ dans A, indexée par un intervalle I de $\mathbf{Z}$, est *admissible* si $b(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ quand i et $i+1$ appartiennent à I. On peut définir naturellement un arc géométrique orienté $\Gamma = \prod_{i\in I} \alpha_i$, par concaténation des arêtes, dont l'orientation coïncide avec celle du squelette (on dira alors que Γ est *bien orienté*). On définit alors le *voisinage à droite* $d(\Gamma) = \{d(\alpha_i) | i \in I\}$ et le voisinage à gauche $g(\Gamma) = \{g(\alpha_i) | i \in I\}$ de Γ. On trouvera dans [Sa] la démonstration du résultat suivant qui utilise la proposition 2.1 :

Proposition 2.2. *La frontière d'une brique β est réunion de deux arcs bien orientés $\Gamma = \prod_{0\le i\le n} \alpha_i$ et $\Gamma' = \prod_{0\le i\le n'} \alpha'_i$ de source $s(\alpha_0) = s(\alpha'_0)$ et de but $b(\alpha_n) = b(\alpha'_{n'})$ communs, tels que $g(\Gamma) = d(\Gamma') = \{\beta\}$. En d'autre termes, il existe toujours une arête α telle que $g(\alpha) = \beta$, une arête α' telle que $d(\alpha') = \beta$ et les arêtes du premier type ne sont pas séparées sur $\partial\beta$ par celles du second type.*

La source commune de α_0 et α'_0 est appelée la source $s(\beta)$ de β, le but commun de α_n et $\alpha'_{n'}$ est le but $b(\beta)$ de β.



Remarquons, grâce à la proposition 2.1, que tout sommet $\sigma \in S$ est source de deux arêtes et but d'une arête, ou alors but de deux arêtes et source d'une arête. Dans le premier cas, il existe $\beta \in B$ tel que $\sigma = s(\beta)$, dans le second cas, il existe $\beta \in B$ tel que $\sigma = b(\beta)$.

On appelera *attracteur* toute partie $X \subset B$ vérifiant $\varphi(X) \subset X$, ce qui est équivalent dans $\mathbf{R}^2$ à l'inclusion $f(X) \subset \mathrm{Int}(X)$. Des relations

$$\varphi\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \varphi(X_i)\,, \quad \varphi\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} \varphi(X_i),$$

vérifiées pour toute famille de parties de B, on déduit que la réunion et l'intersection d'une famille d'attracteurs est un attracteur. Remarquons également que toute composante connexe X_1 d'un attracteur X est également un attracteur. En effet, fixons $\beta \in X_1$. On vient de voir que $\varphi(\beta)$ et β ne sont pas disjoints dans $\mathbf{R}^2$, il en est donc de même de $\varphi(X_1)$ et de X_1. La composante connexe de X qui contient $\varphi(X_1)$ est donc X_1.

On définit de façon analogue une application $\varphi_- : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$ en posant :

$$\begin{aligned}\varphi_-(X) &= \{\beta \in B|\ \text{il existe } \beta' \in X \text{ tel que } \beta \cap f^{-1}(\beta') \neq \emptyset\}\\ &= \{\beta \in B|\beta \cap f^{-1}(X) \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Les relations $\beta' \in \varphi^n(\{\beta\})$ et $\beta \in \varphi_-^n(\{\beta'\})$ sont équivalentes et la proposition 2.1 est vraie en remplaçant φ par φ_-. On définit alors un *répulseur* comme étant une partie positivement invariante par φ_- ; les résultats sur les attracteurs se transposent alors aux répulseurs. Remarquons que $X \subset B$ est un attracteur si et seulement si $B \setminus X$ est un répulseur.

Soit X un attracteur et $\alpha \in A$ une arête contenue dans ∂X. L'une des briques adjacentes à α est dans X et l'autre pas. Puisque $\varphi(X) \subset X$, on sait que $d(\alpha) \in X$ et $g(\alpha) \notin X$. Considérons maintenant une composante connexe Γ de ∂X. Deux cas sont possibles :

i) Γ est une droite bien orientée qui s'écrit $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i$, où $(\alpha_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ est admissible ;

ii) Γ est une courbe fermée simple qui s'écrit $\Gamma = \prod_{0\le i\le n} \alpha_i$, où $(\alpha_i)_{0\le i\le n}$ est admissible et où $b(\alpha_n) = s(\alpha_0)$.

Dans le second cas, on peut trouver une partition $B = X_1 \cup X_2$, où $R^2 \setminus \Gamma = \mathrm{Int}(X_1) \cup \mathrm{Int}(X_2)$, où X_1 contient $d(\Gamma)$ et X_2 contient $g(\Gamma)$. L'ensemble $d(\Gamma) \subset \mathbf{R}^2$ est une union de parties connexes rencontrant la partie connexe Γ, il est donc connexe, plus particulièrement contenu dans une composante connexe X_3 de X et X_2 est une composante connexe de $B \setminus X_3$. Puisque X est un attracteur, il en est de même de X_3. On en déduit que X_2 est un répulseur puis que X_1 est un

attracteur. L'une des parties X_1 ou X_2 étant un disque, le théorème du point fixe de Brouwer nous dit que f a un point fixe, ce qui contredit l'hypothèse. On peut aussi obtenir une contradiction en utilisant le fait que tout attracteur ou répulseur est fini, d'après la proposition 2.1.

On se trouve donc dans le cas **i)**. Pour les mêmes raisons, on peut trouver une partition $B = X_1 \cup X_2$, où $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma = \mathrm{Int}(X_1) \cup \mathrm{Int}(X_2)$, où X_1 est un attracteur qui contient $d(\Gamma)$ et X_2 un répulseur qui contient $g(\Gamma)$. Puisque $d(\Gamma) \subset D(\Gamma)$ et $g(\Gamma) \subset G(\Gamma)$, on en déduit que $X_1 = D(\Gamma)$ et $X_2 = G(\Gamma)$. Ainsi Γ est une droite de Brouwer.

Donnons nous maintenant une droite de Brouwer Γ contenue dans le squelette de $\mathcal{D}$. Cette droite est une concaténation d'arêtes, a priori non nécessairement bien orientées, et les ensembles $D(\Gamma)$ et $G(\Gamma)$ correspondent à deux parties complémentaires de X. Le premier est un attracteur et le second un répulseur et Γ la frontière commune de ces ensembles, on en déduit que Γ est bien orienté et s'écrit $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i$, où $(\alpha_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ est admissible. On appelera *$\mathcal{D}$-droite de Brouwer* toute droite de Brouwer contenue dans le squelette de $\mathcal{D}$.

Toute arête α est contenue dans une $\mathcal{D}$-droite de Brouwer, il suffit en effet de remarquer que $X = \bigcup_{n\geq 0} \varphi^n(\{d(\alpha)\})$ est un attracteur qui contient $d(\alpha)$ et qui ne contient pas $g(\alpha)$, puisque $d(\alpha) \in \varphi(g(\{\alpha\}))$. L'arête α est donc sur la frontière de X et la composante connexe de ∂X qui contient α est une $\mathcal{D}$-droite de Brouwer.

Remarquons également qu'un arc $\Gamma = \prod_{i\in I} \alpha_i$, où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une suite admissible indexée par un intervalle de $\mathbf{Z}$, se prolonge en une $\mathcal{D}$-droite de Brouwer si et seulement si, dans B, on a $g(\Gamma) \bigcap \bigcup_{n\geq 0} \varphi^n(d(\Gamma)) = \emptyset$. Cette condition est évidemment nécessaire puisqu'elle est vérifiée si Γ est une droite de Brouwer. Elle est également suffisante puisque l'ensemble $X = \bigcup_{n\geq 0} \varphi^n(d(\Gamma))$ est un attracteur qui est alors disjoint de $g(\Gamma)$ et que l'une des composantes connexes de ∂X contient Γ. On en déduit en particulier, pour une suite admissible $(\alpha_i)_{i\in\mathbf{Z}}$, que l'arc $\Gamma = \prod_{i\in Z} \alpha_i$ est une $\mathcal{D}$-droite de Brouwer si et seulement si, pour tout $n \geq 1$, l'arc $\Gamma_n = \prod_{-n\leq i\leq n} \alpha_i$ se prolonge en une $\mathcal{D}$-droite de Brouwer. On va formaliser cela ci-dessous.

Munissons A de la topologie discrète, puis $A^{\mathbf{Z}}$ de la topologie produit et considérons le décalage

$$\delta : A^{\mathbf{Z}} \to A^{\mathbf{Z}}, \quad (\alpha_i)_{i\in\mathbf{Z}} \mapsto (\alpha_{i+1})_{i\in\mathbf{Z}}.$$

L'ensemble des suites admissibles $(\alpha_i)_{i\in\mathbf{Z}}$, telles que $\prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i$ est une droite de Brouwer, est une partie fermée $\mathcal{A}$ de $A^{\mathbf{Z}}$ invariante par δ. Remarquons que pour tout

$\alpha \in A$, l'ensemble $\mathcal{A}_\alpha$ formé des suites $(\alpha_i)_{i\in\mathbf{Z}} \in \mathcal{A}$ vérifiant $\alpha_0 = \alpha$ est compact. En effet, il existe au plus deux arêtes dont la source ou le but est donné.

Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des $\mathcal{D}$-droites de Brouwer. L'application

$$\Pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\,, \quad (\alpha_i)_{i\in\mathbf{Z}} \mapsto \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i$$

passe au quotient et définit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{A}/\delta$ des orbites de δ contenues dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On peut donc définir une topologie naturelle sur $\mathcal{B}$ en transportant la topologie quotient induite sur $\mathcal{A}/\delta$ par celle de $\mathcal{A}$. Il s'agit d'une topologie en général non séparée dont une base de voisinage est formée des ensembles $\mathcal{B}_\alpha$, $\alpha \in A$, où $\mathcal{B}_\alpha$ désigne l'ensemble des $\mathcal{D}$-droites de Brouwer contenant α. Remarquons que la restriction de Π à $\mathcal{A}_\alpha$ induit un homéomorphisme entre $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{B}_\alpha$. Les ensembles $\mathcal{B}_\alpha$ sont donc ouverts, compacts, mais non nécessairement fermés.

Terminons ce paragraphe par le résultat suivant :

Proposition 2.3. *Si Γ et Γ' sont deux $\mathcal{D}$-droites de Brouwer, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Γ et Γ' ont une intersection transverse ;*

ii) *$d(\Gamma) \cap g(\Gamma') \neq \emptyset$ et $g(\Gamma) \cap d(\Gamma') \neq \emptyset$ dans B.*

Démonstration. Montrons l'implication **i)** $\Rightarrow$ **ii)**. Supposons que Γ rencontre les parties ouvertes $D(\Gamma') \setminus \Gamma'$ et $G(\Gamma') \setminus \Gamma'$ de $\mathbf{R}^2$. Il en est de même de $d(\Gamma)$. Il en est également de même de $\mathrm{Int}(d(\Gamma))$ qui est dense dans $d(\Gamma)$. Puisque $d(\Gamma)$ est connexe, il en est de même de son intérieur. Ainsi Γ' rencontre $\mathrm{Int}(d(\Gamma))$. Par un raisonnement analogue, on en déduit que $\mathrm{Int}(g(\Gamma')) \cap \mathrm{Int}(d(\Gamma)) \neq \emptyset$. En utilisant la densité de $\bigcup_{\beta\in d(\Gamma)} \mathrm{Int}(\beta)$ dans $d(\Gamma)$ et celle de $\bigcup_{\beta\in g(\Gamma')} \mathrm{Int}(\beta)$ dans $g(\Gamma')$, on en déduit d'abord que $\bigcup_{\beta\in d(\Gamma)} \mathrm{Int}(\beta)$ rencontre $\mathrm{Int}(g(\Gamma'))$, puis que $\bigcup_{\beta\in d(\Gamma)} \mathrm{Int}(\beta)$ rencontre $\bigcup_{\beta\in g(\Gamma')} \mathrm{Int}(\beta)$, en d'autre termes que les parties $d(\Gamma)$ et $g(\Gamma')$ de B ont une brique en commun.

Montrons maintenant la réciproque. Supposons que Γ et Γ' n'ont pas d'intersection transverse et étudions les quatre cas énumérés à la fin du paragraphe 1.

Si $D(\Gamma) \subset D(\Gamma')$, on a dans B, l'inclusion $d(\Gamma) \cap g(\Gamma') \subset D(\Gamma) \cap G(\Gamma') = \emptyset$. De même, si $D(\Gamma') \subset D(\Gamma)$, on a $d(\Gamma') \cap g(\Gamma) = \emptyset$.

Si, dans $\mathbf{R}^2$, on a $D(\Gamma) \cap D(\Gamma') = \emptyset$, alors $D(\Gamma) \cup D(\Gamma')$ n'est pas connexe. On en déduit, dans B, que $g(\Gamma) \cap D(\Gamma') = g(\Gamma') \cap D(\Gamma) = \emptyset$. En effet, si $\beta \in g(\Gamma) \cap D(\Gamma')$, on peut écrire dans $\mathbf{R}^2$ (ou dans B) l'ensemble $D(\Gamma) \cup D(\Gamma') = (D(\Gamma) \cup \{\beta\}) \cup D(\Gamma')$ comme réunion de deux parties connexes d'intersection non vide. De même, si $G(\Gamma) \cap G(\Gamma') = \emptyset$, alors $d(\Gamma) \cap G(\Gamma') = d(\Gamma') \cap G(\Gamma) = \emptyset$. $\square$

Corollaire 2.4. *La partie de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ formée de couples de droites de Brouwer n'ayant pas d'intersection transverse est fermée dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Démonstration. Si Γ et Γ' sont deux $\mathcal{D}$-droites de Brouwer qui s'écrivent $\Gamma = \prod_{i \in \mathbf{Z}} \alpha_i$ et $\Gamma' = \prod_{i \in \mathbf{Z}} \alpha'_i$, le fait que Γ et Γ' aient une intersection transverse est caractérisé par l'existence d'entiers i_0, i'_0 tels que $g(\alpha_{i_0}) = d(\alpha'_{i'_0})$ et d'entiers i_1, i'_1 tels que $d(\alpha_{i_1}) = g(\alpha'_{i'_1})$, ce qui est une condition ouverte. □

3. Droites de Brouwer tracées sur le squelette

Le premier résultat de ce paragraphe exprime qu'on peut recouvrir le squelette par des droites de Brouwer n'ayant pas d'intersections transverses entre elles. On indexe les arêtes $(\alpha_i)_{i \geq 0}$ par $\mathbf{N}$.

Proposition 3.1. *On peut construire une suite $(\Gamma_i)_{i \geq 0}$ de $\mathcal{D}$-droites de Brouwer, telle que :*

i) *chaque droite Γ_i contient l'arête α_i ;*

ii) *deux droites Γ_i et Γ_j n'ont pas d'intersection transverse.*

Commençons par démontrer le lemme suivant, par récurrence sur p :

Lemme 3.2. *On peut construire, pour tout $p \geq 0$, une suite $(X_i^p)_{i \geq 0}$ d'attracteurs, telle que :*

i) *la frontière de X_i^p contient α_i ;*

ii) *les attracteurs X_i^p, $0 \leq i \leq p$, sont comparables pour la relation d'inclusion.*

Démonstration. Le résultat est évident pour $p = 0$, il suffit de poser $X_i^0 = \bigcup_{n \geq 0} \varphi^n(d(\alpha_i))$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang p et considérons les $2p+2$ attracteurs suivants, qui sont comparables :

$$X_0^p \cap X_{p+1}^p, \ldots, X_p^p \cap X_{p+1}^p, X_0^p \cup X_{p+1}^p, \ldots, X_p^p \cup X_{p+1}^p.$$

Fixons $i \in \{0, \ldots, p\}$. On sait que $g(\alpha_i) \notin X_i^p$. Si $g(\alpha_i) \notin X_{p+1}^p$, alors $\alpha_i \subset \partial(X_i^p \cup X_{p+1}^p)$, on pose alors $X_i^{p+1} = X_i^p \cup X_{p+1}^p$. Si $g(\alpha_i) \in X_{p+1}^p$, alors $d(\alpha_i) \in X_{p+1}^p$ puisque X_{p+1}^p est un attracteur. On en déduit que $\alpha_i \subset \partial(X_i^p \cap X_{p+1}^p)$, on pose alors $X_i^{p+1} = X_i^p \cap X_{p+1}^p$.

Définissons maintenant X_{p+1}^{p+1}. Pour les mêmes raisons, si $g(\alpha_{p+1}) \notin X_0^p$, alors $\alpha_{p+1} \subset \partial(X_0^p \cup X_{p+1}^p)$ et on pose $X_{p+1}^{p+1} = X_0^p \cup X_{p+1}^p$; si $g(\alpha_{p+1}) \in X_0^p$, alors

$\alpha_{p+1} \subset \partial(X_0^p \cap X_{p+1}^p)$ et on pose $X_{p+1}^{p+1} = X_0^p \cap X_{p+1}^p$. Enfin on garde $X_i^{p+1} = X_i^0$, si $i > p+1$. □

Démonstration de la proposition 3.1. On note Γ_i^p la composante connexe de ∂X_i^p qui contient α_i. On a $g(\Gamma_j^p) \cap d(\Gamma_i^p) = \emptyset$ si $X_i^p \subset X_j^p$, puisque $g(\Gamma_j^p) \cap X_j^p = \emptyset$ et $d(\Gamma_i^p) \subset X_i^p$. La proposition 2.3 implique donc que Γ_i^p et Γ_j^p n'ont pas d'intersection transverse si $i \leq p$ et $j \leq p$. On définit maintenant une suite $(\Gamma^p)_{p\geq 0}$ à valeurs dans $\prod_{i\geq 0} \mathcal{B}_{\alpha_i}$, muni de la topologie produit, en posant $\Gamma^p = (\Gamma_i^p)_{i\geq 0}$. Elle admet une valeur d'adhérence $\Gamma = (\Gamma_i)_{i\geq 0}$, puisque chaque $\mathcal{B}_{\alpha_i}$ est compact. Le corollaire 2.4 permet d'affirmer que la suite $(\Gamma_i)_{i\geq 0}$ vérifie la conclusion de la proposition.□

On note $\widetilde{\mathcal{B}}$ l'adhérence dans $\mathcal{B}$ de l'ensemble des Γ_i, $i \geq 0$. D'après le corollaire 2.4, il est formé de $\mathcal{D}$-droites de Brouwer n'ayant pas d'intersections transverses entre elles. Les ensembles $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha = \widetilde{\mathcal{B}} \cap \mathcal{B}_\alpha$, $\alpha \in A$, ne sont pas nécessairement fermés, il sont par contre compacts et ouverts et définissent une base de la topologie de $\widetilde{\mathcal{B}}$. Le reste du paragraphe 3 est consacré à l'étude de cet espace et du lien entre la topologie et un ordre naturel qu'on va définir ci-dessous.

On munit $\widetilde{\mathcal{B}}$ de l'ordre suivant :

$$\Gamma \leq \Gamma' \Leftrightarrow D(\Gamma) \subset D(\Gamma').$$

Cet ordre n'est pas nécessairement total, mais restreint à chaque $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ il le devient. En effet, si Γ et Γ' appartiennent à $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$, les ensembles $D(\Gamma) \cap D(\Gamma')$ et $G(\Gamma) \cap G(\Gamma')$ ne sont pas vides puisqu'il contiennent respectivement $d(\alpha)$ et $g(\alpha)$. Puisque Γ et Γ' n'ont pas d'intersection transverse, l'une des inclusions $D(\Gamma) \subset D(\Gamma')$ ou $D(\Gamma') \subset D(\Gamma)$ est vérifiée. Remarquons que $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ est un intervalle de $\widetilde{\mathcal{B}}$. En effet, si $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$, $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ et $\Gamma'' \in \widetilde{\mathcal{B}}$ vérifient $\Gamma \leq \Gamma'' \leq \Gamma'$, alors $D(\Gamma) \subset D(\Gamma'')$ et $G(\Gamma') \subset G(\Gamma'')$. On en déduit que $d(\alpha) \in D(\Gamma'')$ et $g(\alpha) \in G(\Gamma'')$ et donc que Γ'' contient α.

Proposition 3.3. *La topologie de $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ est la topologie de l'ordre.*

Démonstration. Il suffit d'exhiber une application continue strictement croissante de $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ dans $\mathbf{R}$. À toute droite $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i$, où $\alpha_0 = \alpha$, on associe la suite $(\rho_i)_{i\in\mathbf{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ en posant $\rho_i = 1$ si $i \geq 0$ et s'il existe $\alpha' \in A$, tel que $s(\alpha') = b(\alpha_i)$ et $g(\alpha') = d(\alpha_{i+1})$, ou alors si $i < 0$ et s'il existe $\alpha' \in A$, tel que $b(\alpha') = s(\alpha_{i+1})$ et $g(\alpha') = d(\alpha_i)$; en posant $\rho_i = 0$ dans tous les autres cas. On considère alors le réel $\sum_{i\in\mathbf{Z}} \frac{\rho_i}{4^{|i|}}$. On obtient ainsi une application continue de $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ dans $\mathbf{R}$. Le fait qu'elle soit injective et croissante provient du fait que deux courbes dans $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ n'ont pas d'intersection transverse. □

Remarques. i) On peut définir, pour toute arête α, les droites

$$\Gamma_\alpha^- = \min \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha \text{ et } \Gamma_\alpha^+ = \max \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha.$$

ii) Pour toute suite $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ de $\widetilde{\mathcal{B}}$ convergeant vers $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{B}}$, on peut trouver un voisinage $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ de Γ qui contient tous les Γ_n, pour n assez grand. On peut donc comparer Γ_n et Γ. On dira que Γ_n *tend vers* Γ *par valeurs supérieures* (resp. *inférieures*) si $\Gamma_n > \Gamma$ (resp. $\Gamma_n < \Gamma$)) pour n assez grand. On dira que $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{B}}$ est *isolée à droite* (resp. *à gauche*) s'il n'existe aucune suite $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers Γ par valeurs supérieures (resp. inférieures).

Proposition 3.4. *Les droites isolées à droite (resp. à gauche) sont les droites* Γ_α^+ *(resp.* Γ_α^-*),* $\alpha \in A$.

Démonstration. Il est clair que si $\alpha \in A$, alors Γ_α^+ est isolée à droite puisque $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ est un voisinage de Γ_α^+. Pour prouver la proposition, il suffit de montrer que si $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i$ n'est pas de la forme Γ_α^+, $\alpha \in A$, on a :

Lemme 3.5. *Pour tout intervalle fini* I *de* $\mathbf{Z}$*, il existe* $\Gamma' \in \widetilde{\mathcal{B}}$ *vérifiant* $\Gamma' > \Gamma$ *et contenant* $\prod_{\alpha\in I} \alpha_i$.

Démonstration. On fait une récurrence sur le cardinal p de I. Le résultat est vrai pour $p = 1$, puisque $\Gamma \neq \Gamma_{\alpha_i}^+$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Le résultat est également vrai pour $p = 2$. En effet, fixons $i \in \mathbf{Z}$ puis choisissons $\Gamma_i > \Gamma$ contenant α_i et $\Gamma_{i+1} > \Gamma$ contenant α_{i+1}. Le sommet $\sigma = b(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ est extrémité d'une troisième arête α. Si σ est le but de α, la droite Γ_i contient nécessairement α_{i+1} puisque l'arête qui suit α_i sur Γ_i ne peut pas être α. De même si σ est la source de α, la droite Γ_{i+1} contient α_i.

Supposons maintenant le lemme démontré pour $p \geq 2$ et vérifions le pour $p+1$. On écrit $I = \{i, i+1, \ldots, i+p\}$. On peut trouver $\Gamma_i > \Gamma$ contenant $\prod_{i\leq j<i+p} \alpha_j$ et $\Gamma_{i+1} > \Gamma$ contenant $\prod_{i<j\leq i+p} \alpha_j$. Puisque Γ_i et Γ_{i+1} contiennent l'arc $\prod_{i<j<i+p} \alpha_j$ (qui est non vide !), ces arcs sont comparables et le plus petit d'entre eux contient $\prod_{i\leq j\leq i+p} \alpha_j$. □

Proposition 3.6. *On a les propriétés suivantes pour deux arêtes* α *et* α' *:*

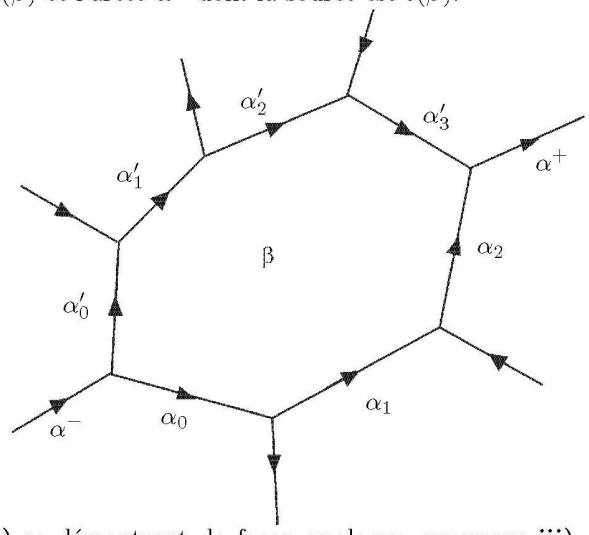
i) *si* $g(\alpha) = g(\alpha')$*, alors* $\Gamma_\alpha^+ = \Gamma_{\alpha'}^+$ *;*

ii) *si* $d(\alpha) = d(\alpha')$*, alors* $\Gamma_\alpha^- = \Gamma_{\alpha'}^-$ *;*

iii) *si* $g(\alpha) = d(\alpha')$*, alors* $\Gamma_\alpha^+ < \Gamma_{\alpha'}^-$ *et* $]\Gamma_\alpha^+, \Gamma_{\alpha'}^-[= \emptyset$.

Démonstration. Prouvons l'assertion **i)**. Considérons une brique β. On rappele que la frontière de β est formée de deux arcs bien orientés $\prod_{0\leq i\leq n} \alpha_i$ et $\prod_{0\leq i\leq n'} \alpha'_i$, où $d(\alpha_i) = g(\alpha_i) = \beta$, et où $s(\alpha_0) = s(\alpha'_0) = s(\beta)$ et $b(\alpha_n) = b(\alpha'_{n'}) = b(\beta)$.

Le répulseur $X = \bigcap_{0\leq i\leq n} G(\Gamma^+_{\alpha_i})$ contient β et ne contient aucune brique $d(\alpha_i)$, sa frontière contient donc l'arc $\prod_{0\leq i\leq n} \alpha_i$. La composante connexe Γ de ∂X qui contient $\prod_{0\leq i\leq n} \alpha_i$ est comparable à chaque $\Gamma^+_{\alpha_i}$ puisqu'elle contient α_i et on a $\Gamma \leq \Gamma^+_{\alpha_i}$ par maximalité de $\Gamma^+_{\alpha_i}$ dans $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha_i}$. De plus, on a $g(\Gamma) \subset X \subset G(\Gamma^+_{\alpha_i})$. On en déduit que $\Gamma^+_{\alpha_i} \leq \Gamma$. Remarquons que la droite $\Gamma = \Gamma^+_{\alpha_i}$ contient l'arête α^- dont le but est $s(\beta)$ et l'arête α^+ dont la source est $b(\beta)$.



L'assertion **ii)** se démontrant de façon analogue, prouvons **iii)**. Remarquons que les droites $\Gamma^+_{\alpha_0}$ et $\Gamma^-_{\alpha'_0}$ sont comparables puisqu'elles contiennent toutes deux α^-. Comme $\beta \in D(\Gamma^-_{\alpha'_0}) \setminus D(\Gamma^+_{\alpha_0})$, on en déduit que $\Gamma^+_{\alpha_0} < \Gamma^-_{\alpha'_0}$. Toute droite $\Gamma \in [\Gamma^+_{\alpha_0}, \Gamma^-_{\alpha'_0}]$ contient α^- : si $\beta \in D(\Gamma)$, alors Γ contient α'_0 et donc $\Gamma = \Gamma^-_{\alpha'_0}$; si $\beta \in G(\Gamma)$, alors Γ contient α_0 et donc $\Gamma = \Gamma^+_{\alpha_0}$. □

La proposition nous dit en particulier que l'on peut indexer les droites Γ^+_α et Γ^-_α, pas seulement par les arêtes, mais également par les briques. On posera :

$$\Gamma^+_\beta = \Gamma^-_\alpha \text{ si } d(\alpha) = \beta\,, \quad \Gamma^-_\beta = \Gamma^+_\alpha \text{ si } g(\alpha) = \beta.$$

L'assertion **iii)** nous dit que $\Gamma^-_\beta < \Gamma^+_\beta$ et que $]\Gamma^-_\beta, \Gamma^+_\beta[= \emptyset$.

On va conclure ce paragraphe en étudiant la relation d'équivalence naturelle-

ment définie sur l'ensemble de briques :

$$\beta \sim \beta' \Leftrightarrow \Gamma^+_\beta = \Gamma^+_{\beta'} \text{ et } \Gamma^-_\beta = \Gamma^-_{\beta'}.$$

Remarquons que deux briques adjacentes ne sont pas équivalentes. En effet, pour toute arête $\alpha \in A$, on a :

$$\Gamma^+_{g(\alpha)} > \Gamma^-_{g(\alpha)} = \Gamma^+_\alpha \geq \Gamma^-_\alpha = \Gamma^+_{d(\alpha)}.$$

Proposition 3.7. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\beta \sim \beta'$;

ii) $\beta' \in d(\Gamma^+_\beta) \cap g(\Gamma^-_\beta)$;

iii) $\beta' \in D(\Gamma^+_\beta) \cap G(\Gamma^-_\beta)$.

Démonstration. Puisque toute brique $\beta' \sim \beta$ appartient à $d(\Gamma^+_{\beta'}) \cap g(\Gamma^-_{\beta'})$, l'implication **i)** $\Rightarrow$ **ii)** est vérifiée. Pour montrer l'implication réciproque, remarquons que si $\beta' \in d(\Gamma^+_\beta)$, alors $\Gamma^+_{\beta'}$ et Γ^+_β ont au moins une arête commune α telle que $d(\alpha) = \beta'$. On en déduit que Γ^+_β et $\Gamma^+_{\beta'}$ sont comparables et comme $\Gamma^+_{\beta'} = \Gamma^-_\alpha$, on a $\Gamma^+_{\beta'} \leq \Gamma^+_\beta$. De même, si $\beta' \in g(\Gamma^-_\beta)$, on a $\Gamma^-_\beta \leq \Gamma^-_{\beta'}$. Ainsi si la condition **ii)** est vérifiée, on obtient

$$\Gamma^-_\beta \leq \Gamma^-_{\beta'} < \Gamma^+_{\beta'} \leq \Gamma^+_\beta,$$

et comme l'intervalle $]\Gamma^-_\beta, \Gamma^+_\beta[$ est vide, on a

$$\Gamma^-_\beta = \Gamma^-_{\beta'} \text{ et } \Gamma^+_{\beta'} = \Gamma^+_\beta.$$

Pour montrer l'équivalence entre **ii)** et **iii)**, il faut montrer l'égalité

$$D(\Gamma^+_\beta) \cap G(\Gamma^-_\beta) = d(\Gamma^+_\beta) \cap g(\Gamma^-_\beta),$$

pour toute brique $\beta \in B$. Il suffit bien sûr de montrer l'inclusion

$$D(\Gamma^+_\beta) \cap G(\Gamma^-_\beta) \subset d(\Gamma^+_\beta) \cap g(\Gamma^-_\beta).$$

Une brique adjacente à β n'appartient pas à $D(\Gamma^+_\beta) \cap G(\Gamma^-_\beta)$. En effet, pour toute arête α telle que $d(\alpha) = \beta$ (resp. $g(\alpha) = \beta$), on a $g(\alpha) \notin D(\Gamma^+_\beta)$ (resp. $d(\alpha) \notin G(\Gamma^-_\beta)$). On en déduit que la composante connexe, dans B, de $D(\Gamma^+_\beta) \cap G(\Gamma^-_\beta)$ qui contient β se réduit à β. On en déduit immédiatement que la composante connexe, dans B, de $D(\Gamma^+_\beta) \cap G(\Gamma^-_\beta)$ qui contient une brique β' équivalente à β' se réduit à β'. Ainsi, d'après l'équivalence **i)** $\Leftrightarrow$ **ii)**, on sait que toute composante connexe de $D(\Gamma^+_\beta) \cap G(\Gamma^-_\beta)$ qui contient une brique de $d(\Gamma^+_\beta) \cap g(\Gamma^-_\beta)$ se réduit à cette brique. Il ne reste plus qu'à montrer que toute composante connexe X de $D(\Gamma^+_\beta) \cap G(\Gamma^-_\beta)$ contient une brique de $d(\Gamma^+_\beta) \cap g(\Gamma^-_\beta)$.

L'ensemble $G(\Gamma^-_\beta)$ est connexe et contient $G(\Gamma^+_\beta)$. On peut donc trouver une suite $(\beta_i)_{0 \leq i \leq p}$ de briques de $G(\Gamma^-_\beta)$ telle que :

- $\beta_0 \in X$;
- β_{i+1} est adjacente à β_i, si $i \in \{0, \dots, p-1\}$;
- $\beta_p \in G(\Gamma^+_\beta)$.

Quitte à racourcir la suite, on peut supposer que $\beta_i \in D(\Gamma^+_\beta)$ si $i < p$. Les β_i, $i < p$, sont dans X et on a $\beta_{p-1} \in d(\Gamma^+_\beta) \cap G(\Gamma^-_\beta)$. L'arête α^+, dont la source est le but de β, appartient à Γ^-_β et à Γ^+_β, ainsi $d(\alpha^+) \in d(\Gamma^+_\beta) \cap D(\Gamma^-_\beta)$. L'ensemble connexe $d(\Gamma^+_\beta)$ n'est donc pas contenu dans $G(\Gamma^-_\beta)$. On peut donc construire une suite $(\beta'_i)_{0 \leq i \leq p'}$ de briques de $d(\Gamma^+_\beta)$ telle que :

- $\beta'_0 = \beta_{p-1}$;
- β'_{i+1} est adjacente à β'_i, si $i \in \{0, \dots, p'-1\}$;
- $\beta'_{p'} \in D(\Gamma^-_\beta)$;
- $\beta'_i \in G(\Gamma^-_\beta)$, si $i < p'$.

Les briques β'_i, $i < p'$, appartiennent à X et on a $\beta'_{p'-1} \in d(\Gamma^+_\beta) \cap g(\Gamma^-_\beta)$. $\square$

Soit $\beta \in B$ et $\alpha \in A$ une arête de Γ^+_β. Deux cas sont possibles :

i) la brique $d(\alpha)$ appartient à $g(\Gamma^-_\beta)$, elle est équivalente à β ;

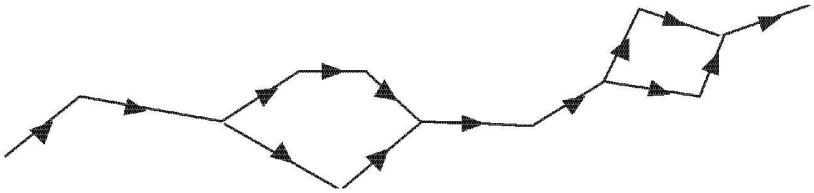
ii) la brique $d(\alpha)$ appartient à $d(\Gamma^-_\beta)$, l'arête α appartient également à Γ^-_β et $g(\alpha) \in g(\Gamma^-_\beta) \cap g(\Gamma^+_\beta)$.

La réunion des arêtes communes à Γ^-_β et Γ^+_β et des briques équivalentes à β est une partie fermée C_β du plan, appelée *chaîne d'équivalence*, ne dépendant que de la classe d'équivalence de β. On a :

$$C_\beta = D(\Gamma^+_\beta) \setminus \mathrm{Int}(D(\Gamma^-_\beta)) = G(\Gamma^-_\beta) \setminus \mathrm{Int}(G(\Gamma^+_\beta)).$$

Les briques équivalentes à β ne sont jamais adjacentes, elles sont séparées par des arêtes communes à Γ^-_β et Γ^+_β. Puisque les ensembles précédents ne dépendent que des classes d'équivalence, on notera $\widehat{\beta}$ les classes d'équivalence, et on posera $C_{\widehat{\beta}} = C_\beta$, si $\beta \in \widehat{\beta}$. De même on écrira $\Gamma^-_{\widehat{\beta}} = \Gamma^-_\beta$ et $\Gamma^+_{\widehat{\beta}} = \Gamma^+_\beta$.

On note E la réunion disjointe de A et B. Une chaîne d'équivalence s'écrit alors $\prod_{i \in \mathbf{Z}} \varepsilon_i$, où la famille $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ à valeurs dans E est telle que $b(\varepsilon_i) = s(\varepsilon_{i+1})$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Les ε_i qui sont des briques sont les éléments de la classe d'équivalence, les arcs $\prod_{i \in I} \varepsilon_i$ définis entre deux briques successives sont les composantes connexes de $\Gamma^-_{\widehat{\beta}} \cap \Gamma^+_{\widehat{\beta}}$.



4. Construction d'un quasi-feuilletage

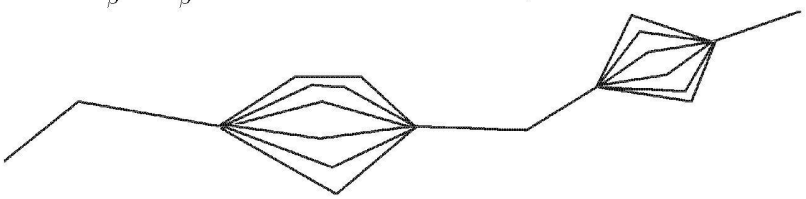
On commence par feuilleter chaque brique $\beta \in B$ par une famille continue d'arcs orientés $(\gamma_\beta^t)_{t\in[-1,1]}$ issus de la source de β et aboutissant au but de β. Si D est le disque fermé unité de $\mathbf{R}^2$, on choisit un homéomorphisme $h : \beta \to D$ préservant l'orientation qui envoie $s(\beta)$ sur $(-1,0)$ et $b(\beta)$ sur $(1,0)$. Remarquons que chaque arête α telle que $d(\alpha) = \beta$ est envoyée dans le demi-plan d'équation $y \geq 0$ et chaque arête α telle que $g(\alpha) = \beta$ dans le demi-plan d'équation $y \leq 0$. On note alors γ_β^t l'arc défini sur $[-1,1]$ par :

$$\gamma_\beta^t(s) = h^{-1}\left((s, t\sqrt{1-s^2})\right).$$

Fixons maintenant une classe d'équivalence $\widehat{\beta}$. Chaque ensemble

$$\Gamma_{\widehat{\beta}}^t = \left(\Gamma_{\widehat{\beta}}^- \cap \Gamma_{\widehat{\beta}}^+\right) \bigcup_{\beta\in\widehat{\beta}} \gamma_\beta^t$$

définit naturellement une droite dont l'orientation coincide avec celle des arêtes communes à $\Gamma_{\widehat{\beta}}^-$ et $\Gamma_{\widehat{\beta}}^+$ ainsi qu'avec celle des arcs γ_β^t.



Ces droites n'ont pas d'intersections transverses entre-elles. En effet $D(\Gamma_{\widehat{\beta}}^t) \subset D(\Gamma_{\widehat{\beta}}^{t'})$ si $t \leq t'$. Dans le cas où $f(D(\Gamma_{\widehat{\beta}}^+)) \subset \mathrm{Int}(D(\Gamma_{\widehat{\beta}}^-))$, ce sont des droites de Brouwer. Nous allons voir – c'est le point principal de ce paragraphe – que l'on peut, par un reparamétrage en t de chaque famille $(\gamma_\beta^t)_{t\in[-1,1]}$, obtenir une famille $(\Gamma_{\widehat{\beta}}^t)_{t\in[-1,1]}$ de droites de Brouwer, même si la relation $f(D(\Gamma_{\widehat{\beta}}^+)) \subset \mathrm{Int}(D(\Gamma_{\widehat{\beta}}^-))$ n'est pas vérifiée.

On commence par établir le lemme très simple suivant :

Lemme 4.1. *Soit X un ensemble ordonné fini ou dénombrable. Il existe alors une*

famille $(\mu_x)_{x\in X}$ *d'homéomorphismes croissants de* $[-1,1]$ *tels que :*

$$x < x' \Rightarrow \mu_x(1/3) < \mu_{x'}(-1/3).$$

Il suffit de prouver :

Sous-lemme 4.2. *Soit* X *un ensemble ordonné,* $Y \subset X$ *une partie finie de* X *et* $(\mu_x)_{x\in Y}$ *une famille d'homéomorphismes croissants de* $[-1,1]$*, tels que :*

$$x < x' \Rightarrow \mu_x(1/3) < \mu_{x'}(-1/3).$$

Pour tout $x_0 \notin Y$*, il existe un homéomorphisme croissant* μ_{x_0} *de* $[-1,1]$ *tel que, pour tous* x *et* x' *dans* $Y \cup \{x_0\}$*, on a :*

$$x < x' \Rightarrow \mu_x(1/3) < \mu_{x'}(-1/3).$$

Démonstration. On note

$$Y^- = \{x \in Y | x < x_0\} \text{ et } Y^+ = \{x \in Y | x > x_0\}$$

et on envisage tous les cas possibles :

i) si $Y^- = Y^+ = \emptyset$, on choisit μ_{x_0} arbitraire ;

ii) si $Y^- = \emptyset$ et $Y^+ \neq \emptyset$, on choisit μ_{x_0} tel que $\mu_{x_0}(1/3) < \min_{x\in Y^+} \mu_x(-1/3)$;

iii) si $Y^- \neq \emptyset$ et $Y^+ = \emptyset$, on choisit μ_{x_0} tel que $\max_{x\in Y^-} \mu_x(1/3) < \mu_{x_0}(-1/3)$;

iv) si $Y^- \neq \emptyset$ et $Y^+ \neq \emptyset$, on choisit μ_{x_0} tel que

$$\max_{x\in Y^-} \mu_x(1/3) < \mu_{x_0}(-1/3) < \mu_{x_0}(1/3) < \min_{x\in Y^+} \mu_x(-1/3).$$

Il n'y a pas d'obstruction à la construction de μ_{x_0} dans le cas **iv)**. En effet, il existe $x^- \in Y^-$ et $x^+ \in Y^+$ tel que

$$\max_{x\in Y^-} \mu_x(1/3) = \mu_{x^-}(1/3) \text{ et } \min_{x\in Y^+} \mu_x(-1/3) = \mu_{x^+}(-1/3).$$

Puisque $x_0 < x^+$ et $x^- < x_0$, on sait que $x^- < x^+$ et que $\mu_{x^-}(1/3) < \mu_{x^+}(-1/3)$. □

Démonstration du lemme 4.1. Puisque $f(\Gamma^-_{\widehat{\beta}}) \subset \mathrm{Int}((D(\Gamma^-_{\widehat{\beta}}))$ et $f(\Gamma^+_{\widehat{\beta}}) \subset \mathrm{Int}(D(\Gamma^+_{\widehat{\beta}}))$, on peut toujours reparamétrer chaque famille $(\gamma^t_\beta)_{t\in[-1,1]}$, $\beta \in \widehat{\beta}$, par un homéomorphisme $\nu_\beta : [-1,1] \to [-1,1]$ de telle façon que

$$t \in [-1,-1/3] \Rightarrow f(\gamma^t_\beta) \subset \mathrm{Int}((D(\Gamma^-_{\widehat{\beta}}))$$

et

$$t \in [1/3,1] \Rightarrow \gamma^t_\beta \subset \mathrm{Int}(G(f(\Gamma^+_{\widehat{\beta}}))).$$

La relation suivante

$$\beta \preceq \beta' \Leftrightarrow \beta \in \bigcup_{n\geq 0} \varphi^n(\{\beta'\}),$$

définie sur B, est un ordre, le caractère anti-symétrique provenant de la proposition 2.1. On peut construire une famille d'homéomorphismes $\mu_\beta : [-1,1] \to [-1,1]$, $\beta \in \widetilde{\beta}$, vérifiant la conclusion du lemme 4.1 pour l'ordre restreint à $\widehat{\beta}$. Il reste à vérifier que chaque droite

$$\Gamma^t = \left(\Gamma^-_{\widehat{\beta}} \cap \Gamma^+_{\widehat{\beta}}\right) \bigcup_{\beta\in\widehat{\beta}} \gamma_\beta^{\mu_\beta^{-1}(t)}$$

est une droite de Brouwer.

Puisque $f(\Gamma^t) \cap D(\Gamma^t) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(\Gamma^t) \cap G(\Gamma^t) \neq \emptyset$, il suffit de montrer que $f(\Gamma^t) \cap \Gamma^t = \emptyset$. Si ce dernier ensemble n'est pas vide, il existe $\beta \in \widehat{\beta}$, $\beta' \in \widehat{\beta}$ et $t \in [-1,1]$ tels que

$$f(\gamma_\beta^{\mu_\beta^{-1}(t)}) \cap \gamma_{\beta'}^{\mu_{\beta'}^{-1}(t)} \neq \emptyset.$$

On en déduit $\mu_\beta^{-1}(t) > -1/3$ et $\mu_{\beta'}^{-1}(t) < 1/3$, c'est-à-dire $\mu_\beta(-1/3) < t < \mu_{\beta'}(1/3)$. On sait d'autre part que $f(\beta) \cap \beta' \neq \emptyset$ et donc que $\beta' \prec \beta$. Ceci contredit la propriété de la famille $(\mu_\beta)_{\beta\in\widehat{\beta}}$ donnée par le lemme 4.1. □

Nous supposerons dorénavant notre famille $(\gamma^t_\beta)_{\beta\in B, t\in[-1,1]}$ reparamétrée pour que chaque $\Gamma^t_{\widehat{\beta}}$ soit une droite de Brouwer.

Proposition 4.3. *Deux droites $\Gamma^t_{\widehat{\beta}}$ et $\Gamma^{t'}_{\widehat{\beta'}}$ n'ont pas d'intersection transverse.*

Démonstration. Supposons d'abord que, dans B, on $D(\Gamma^-_{\widehat{\beta}}) \cap D(\Gamma^-_{\widehat{\beta'}}) = \emptyset$. On a vu dans la démonstration de la proposition 2.3 que cette relation était encore vraie dans $\mathbf{R}^2$ et que $g(\Gamma^-_{\widehat{\beta}}) \cap D(\Gamma^-_{\widehat{\beta'}}) = \emptyset$ dans B. On en déduit que dans B, on a

$$D(\Gamma^+_{\widehat{\beta}}) \cap D(\Gamma^-_{\widehat{\beta'}}) \subset \left(D(\Gamma^-_{\widehat{\beta}}) \cup g(\Gamma^-_{\widehat{\beta}})\right) \cap D(\Gamma^-_{\widehat{\beta'}}) = \emptyset.$$

On en déduit, toujours par le même raisonnement que $D(\Gamma^+_{\widehat{\beta}}) \cap D(\Gamma^+_{\widehat{\beta'}}) = \emptyset$ dans B et dans $\mathbf{R}^2$. Ainsi, $\Gamma^t_{\widehat{\beta}}$ et $\Gamma^{t'}_{\widehat{\beta'}}$ n'ont pas d'intersection transverse puisque $D(\Gamma^t_{\widehat{\beta}}) \cap D(\Gamma^{t'}_{\widehat{\beta'}}) = \emptyset$. La proposition 4.3 est encore vérifiée, pour les mêmes raisons, si $G(\Gamma^+_{\widehat{\beta}}) \cap G(\Gamma^+_{\widehat{\beta'}}) = \emptyset$.

L'une des égalités $D(\Gamma^-_{\widehat{\beta}}) \cap D(\Gamma^-_{\widehat{\beta'}}) = \emptyset$ ou $G(\Gamma^+_{\widehat{\beta}}) \cap G(\Gamma^+_{\widehat{\beta'}}) = \emptyset$ est vérifiée dès que l'une des deux droites $\Gamma^-_{\widehat{\beta}}$, $\Gamma^+_{\widehat{\beta}}$ n'est pas comparable à l'une des deux droites $\Gamma^-_{\widehat{\beta'}}$, $\Gamma^+_{\widehat{\beta'}}$. Il reste donc à montrer la proposition dans le cas où les quatres droites

$\Gamma^-_{\widehat{\beta}}$, $\Gamma^+_{\widehat{\beta}}$, $\Gamma^-_{\widehat{\beta}'}$ et $\Gamma^+_{\widehat{\beta}'}$ sont comparables. Puisque $]\Gamma^-_{\widehat{\beta}}, \Gamma^+_{\widehat{\beta}}[=]\Gamma^-_{\widehat{\beta}'}, \Gamma^+_{\widehat{\beta}'}[= \emptyset$, il y a trois cas à envisager :

i) $\widehat{\beta} = \widehat{\beta}'$;

ii) $\Gamma^-_{\widehat{\beta}} < \Gamma^+_{\widehat{\beta}} \leq \Gamma^-_{\widehat{\beta}'} < \Gamma^+_{\widehat{\beta}'}$;

iii) $\Gamma^-_{\widehat{\beta}'} < \Gamma^+_{\widehat{\beta}'} \leq \Gamma^-_{\widehat{\beta}} < \Gamma^+_{\widehat{\beta}}$.

On a vu plus haut que la proposition était vraie dans le premier cas, il est en de même dans le second cas puisque

$$D(\Gamma^t_{\widehat{\beta}}) \subset D(\Gamma^+_{\widehat{\beta}}) \subset D(\Gamma^-_{\widehat{\beta}'}) \subset D(\Gamma^{t'}_{\widehat{\beta}'}),$$

ainsi bien sûr que dans le troisième. □

La famille $(\Gamma^t_{\widehat{\beta}})_{\widehat{\beta},t}$ est formée de droites de Brouwer n'ayant pas d'intersections transverses entre elles qui recouvrent le plan. Tout point $z \notin \Sigma(\mathcal{D})$ appartient à une unique droite et la famille définit un feuilletage au voisinage de z. Un point $z \in \Sigma(\mathcal{D})$ qui n'est pas un sommet peut appartenir à plusieurs droites, mais toutes ces droites coïncident au voisinage de z avec l'unique arête contenant z, la famille définit encore un feuilletage au voisinage de z.

5. Construction d'un feuilletage en droites de Brouwer

Si on se donne un feuilletage en droites du plan, on a un ordre naturellement défini sur l'ensemble des feuilles, analogue à l'ordre défini sur $\widetilde{\mathcal{B}}$ dans le paragraphe 3, à savoir

$$\Gamma \leq \Gamma' \Leftrightarrow D(\Gamma) \subset D(\Gamma'),$$

ainsi qu'une topologie, quotient de la topologie usuelle. L'espace des feuilles est alors séparé si et seulement si l'ordre est total. Par contre toute droite admet un voisinage compact totalement ordonné. Nous allons construire un feuilletage en droites de Brouwer, contenant une partie fermée isomorphe (du point de vue topologique et du point de vue de l'ordre) à $\widetilde{\mathcal{B}}$. Nous construirons pour cela une décomposition en brique plus fine que la décomposition initale (libre mais pas maximale) obtenue en épaississant le squelette initial.

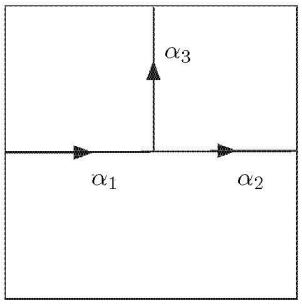
Définition. On dira qu'une arête $\alpha \in A$ est *singulière* si $\Gamma^-_\alpha = \Gamma^+_\alpha$, autrement dit si $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ se réduit à une unique droite ; dans le cas contraire on dira qu'elle est *régulière*.

On choisit pour toute arête α un voisinage connexe, simplement connexe et libre $U_\alpha \subset \mathbf{R}^2$ de α, tel que $f(U_\alpha) \subset D(\Gamma^-_\alpha)$ et $f^{-1}(U_\alpha) \subset G(\Gamma^+_\alpha)$. Ainsi, pour toute $\mathcal{D}$-droite de Brouwer $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$, on aura $f(U_\alpha) \subset D(\Gamma)$ et $f^{-1}(U_\alpha) \subset G(\Gamma)$. On choisit ensuite pour tout sommet $\sigma \in S$, un voisinage U_σ de σ, connexe et

simplement connexe, inclus dans $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap U_{\alpha_3}$, où α_1, α_2 et α_3 sont les arêtes d'extrémité σ et ne rencontrant aucune brique qui ne soit adjacente à σ et aucune arête autre que α_1, α_2 et α_3.

Supposons que $\sigma = b(\alpha_1) = s(\alpha_2) = s(\alpha_3)$. Quitte à conjuguer f par un homéomorphisme préservant l'orientation, on peut supposer que σ est l'origine $(0,0)$, que le carré $K_\sigma = [-1,1]^2$ est inclus dans U_σ, et que l'on a

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cap [-1,1]^2 &= [-1,0] \times \{0\},\\
\alpha_2 \cap [-1,1]^2 &= [0,1] \times \{0\},\\
\alpha_3 \cap [-1,1]^2 &= \{0\} \times [0,1].
\end{aligned}$$

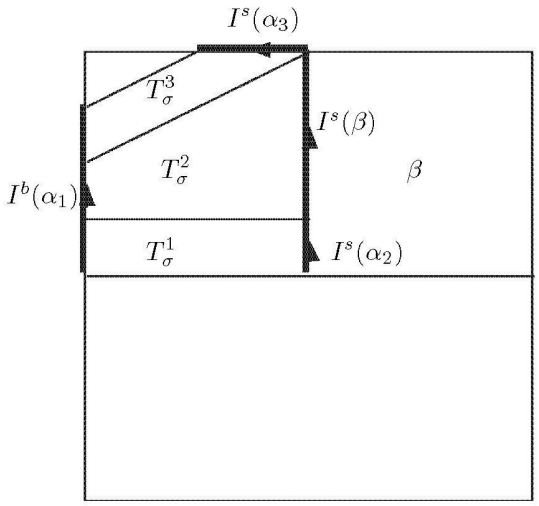


L'arête α_1 est régulière puisqu'il existe une droite dans $\widetilde{\mathcal{B}}$ contenant $\alpha_1\alpha_2$ et une autre droite contenant $\alpha_1\alpha_3$. Remarquons également que σ est la source de $\beta = g(\alpha_2) = d(\alpha_3)$.

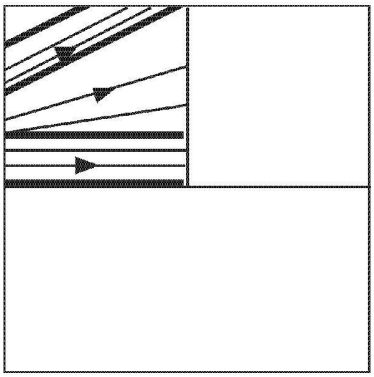
Supposons que α_2 et α_3 sont toutes deux régulières. On définit trois quadrilatères T_σ^1, T_σ^2 et T_σ^3 de la façon suivante :

- les sommets de T_σ^1 sont $(-1,0)$, $(0,0)$, $(0,1/4)$ et $(-1,1/4)$;
- les sommets de T_σ^2 sont $(-1,1/4)$, $(0,1/4)$, $(0,1)$ et $(-1,1/2)$;
- les sommets de T_σ^3 sont $(-1,1/2)$, $(0,1)$, $(-1/2,1)$ et $(-1,3/4)$.

Le segment $\{-1\} \times [0,3/4]$, noté $I^b(\alpha_1)$ et orienté suivant les y croissants, est le *segment d'arrivée* de α_1 ; le segment $\{0\} \times [0,1/4]$, noté $I^s(\alpha_2)$ et orienté également suivant les y croissants, est le *segment de départ* de α_2 ; le segment $[-1/2,0] \times \{1\}$, noté $I^b(\alpha_3)$ et orienté suivant les x décroissants, est le segment de départ de α_3 ; le segment $\{0\} \times [1/4,1]$, noté $I^s(\beta)$ et orienté suivant les y croissants, est le segment d'arrivée de β ; enfin, le segment $\{-1\} \times [1/4,1/2]$ est le *centre* de $I^b(\alpha_1)$.

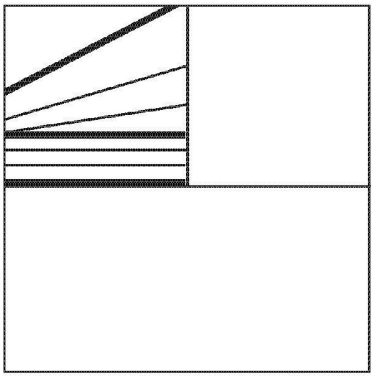


On va feuilleter les triangles T^1_σ par des arcs, orientés suivant les x croissants, de la façon suivante. On feuillete T^1_σ par des segments horizontaux, T^3_σ par des segments parallèles aux bords obliques, enfin T^2_σ par les segments joignants $t \in \{-1\} \times [1/4, 1/2]$ à $\lambda_\sigma(t) \in I^s(\beta)$, où λ_σ est un homéomorphisme croissant entre le centre de $I^b(\alpha_1)$ et le segment d'arrivée de β. On appelera λ_σ un *homéomorphisme de liaison* (on fera varier λ_σ plus tard). Utilisant la démonstration de la proposition 3.3, on peut construire, pour $i \in \{2, 3\}$, une partie fermée $\widetilde{B}^s_{\alpha_i}$ de $I^s(\alpha_i)$, contenant les deux extrémités de $I^s(\alpha_i)$ et isomorphe (en tant qu'espace topologique ordonné) à $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha_i}$. Si on transporte chacun de ces ensembles sur $I^b(\alpha_1)$ par les feuilletages définis sur T^1_σ et T^3_σ, on obtient deux parties dont la réunion est isomorphe à $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha_1}$ et notée $\widetilde{\mathcal{B}}^b_{\alpha_1}$.



Supposons maintenant que α_2 est régulière et α_3 singulière. On ne définit dans ce cas, que deux quadrilatères T^1_σ et T^2_σ, le segment d'arrivée de α_1 devient $I^b(\alpha_1) =$

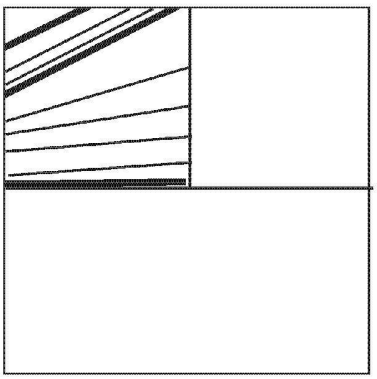
$\{-1\} \times [0, 1/2]$, toujours orienté suivant les y croissants, les segments de départ de α_2 et β sont inchangés, le segment de départ de α_3 se réduit au point $(0, 1)$, le *point de départ* de α_3. Le feuilletage défini sur T_σ^1 est identique, de même celui sur T_σ^2 est défini par un homéomorphisme de liaison λ_σ. L'ensemble $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\alpha_3}$ se réduit au point de départ de α_3. On considère là-encore un ensemble $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\alpha_2}$ de $I^s(\alpha_2)$ contenant les extrémités de $I^s(\alpha_2)$ et isomorphe à $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha_2}$. Cet ensemble transporté sur $I^b(\alpha_1)$ par le feuilletage de T_σ^1 donne, quand on lui ajoute le point $(-1, 1/2)$, un ensemble $\widetilde{\mathcal{B}}^b_{\alpha_1}$ isomorphe à $\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha_1}$.



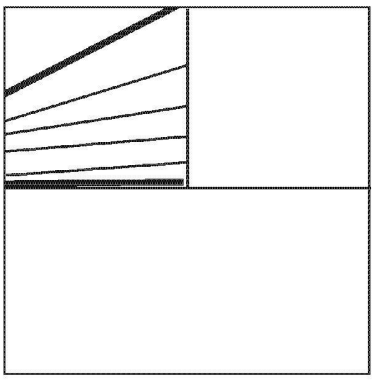
Dans le cas où α_2 est régulière et α_3 singulière, le quadrilatère T_σ^3 reste inchangé, le quadrilatère T_σ^2 est délimité par les points $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(-1, 1/2)$, on a

$$\begin{aligned} I^b(\alpha_1) &= \{-1\} \times [0, 3/4], \\ I^s(\beta) &= \{0\} \times [0, 1], \\ I^s(\alpha_3) &= [-1/2, 0] \times \{1\}. \end{aligned}$$

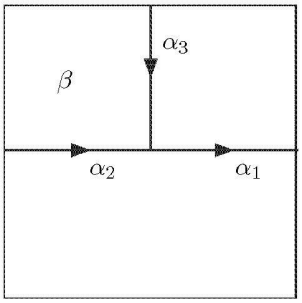
Le point de départ de α_2 est le point $(0, 0)$. Le feuilletage sur T_σ^3 reste inchangé, il transporte $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\alpha_3}$ sur un ensemble qui donne $\widetilde{\mathcal{B}}^b_{\alpha_1}$ quand on lui ajoute $(-1, 0)$.

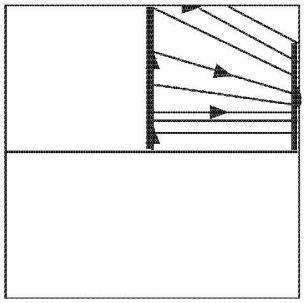


Enfin, si α_1 et α_2 sont toutes deux singulières, on ne définit que le quadrilatère T^2_σ, délimité là-encore par $(-1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$ et $(-1,1/2)$ et feuilleté par un homéomorphisme de liaison λ_σ. Les ensembles $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\alpha_2}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\alpha_3}$ se réduisent respectivement à $(0,0)$ et à $(0,1)$. On a $\widetilde{\mathcal{B}}^b_{\alpha_1} = \{(-1,0),(-1,1/2)\}$, il n'y a que deux droites dans $\widetilde{B}$ qui contiennent α_1.



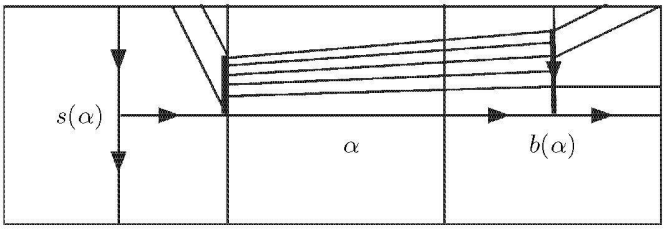
Supposons maintenant que $\sigma = s(\alpha_1) = b(\alpha_2) = b(\alpha_3)$. On va construire des objets analogues dans cette situation. On part de la situation précédente et on effectue une symétrie par rapport à l'axe vertical. On change alors l'orientation des arêtes, on change également l'orientation des feuilles du feuilletage qui sont donc orientées toujours suivant les x croissants, on ne change pas l'orientation des segments de départ et d'arrivée mais on transforme les segments de départ en segments d'arrivée et vice-versa. Tout segment de départ ou d'arrivée d'une arête est située, là-encore, sur la brique adjacente à gauche de l'arête et son extrémité inférieure est sur cette arête.





Considérons maintenant une arête régulière α. Quitte à conjuguer f par un homéomorphisme préservant l'orientation, on peut supposer que α est le segment orienté joignant $(-2,0)$ à $(2,0)$ et que le rectangle $[-3,3]\times[-1,1]$ est contenu dans U_α. On peut supposer également que le carré $[1,3]\times[-1,1]$ centré en $b(\alpha)$ est un translaté du carré $K_{b(\alpha)}$ décrit plus haut, dans le cas où $b(\alpha)$ est la source de deux autres arêtes ou dans le cas où il existe une autre arête α' de but $b(\alpha)$ telle que

$d(\alpha') = g(\alpha)$, et que c'est l'image de $K_{b(\alpha)}$ par une rotation d'angle $\pi/2$ puis par une translation dans le cas où $g(\alpha') = d(\alpha)$. On supposera également que le carré $[-3,-1] \times [-1,1]$ est l'image de $K_{s(\alpha)}$ par une translation, dans le cas où $s(\alpha)$ est le but de deux autres arêtes ou la source d'une arête α' telle que $d(\alpha') = g(\alpha)$, et l'image de $K_{s(\alpha)}$ par une rotation d'angle $-\pi/2$ puis par une translation dans le cas où $s(\alpha)$ est source d'une arête a' telle que $g(\alpha') = d(\alpha)$.



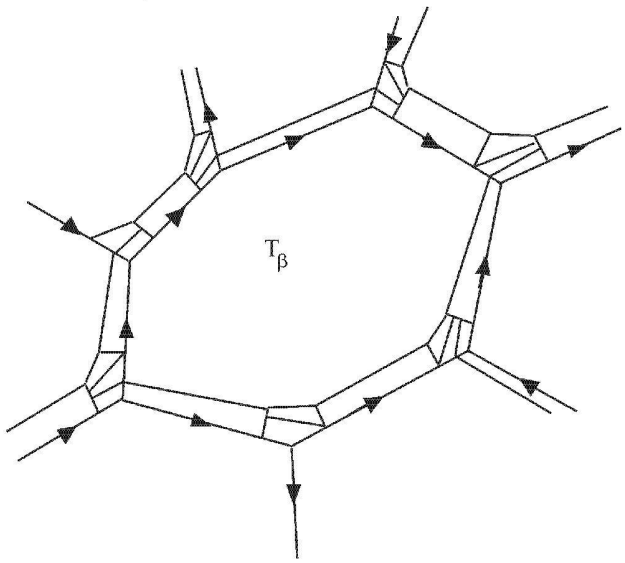
On considère alors le quadrilatère T_α dont les cotés respectifs sont $I^s(\alpha)$, $I^b(\alpha)$, le segment (contenu dans α) joignant les extrémités inférieures de $I^s(\alpha)$ et $I^b(\alpha)$ et le segment joignant les extrémités supérieures. Ce quadrilatère est contenu dans $g(\alpha)$. Quitte à indexer A par $\mathbf{N}$, on peut constuire ces quadrilatères par récurrence pour qu'ils soient disjoints deux à deux. On considère alors un homéomorphisme ψ_α strictement croissant envoyant $\widetilde{\mathcal{B}}^s_\alpha$ sur $\widetilde{\mathcal{B}}^b_\alpha$, on le prolonge en un homéomorphisme croissant entre $I^s(\alpha)$ et $I^b(\alpha)$ et on considère le feuilletage par des segments, orientés suivant les x croissants, joignant t à son image.

Rappelons que E est la réunion disjointe de A et B. Toute feuille de T_α se prolonge, arrivée en $I^b(\alpha)$, en une unique feuille contenue dans un des quadrilatères $T^i_{b(\alpha)}$ qui aboutit à un point de $I^s(\varepsilon)$, où $s(\varepsilon) = b(\alpha)$. On obtient une famille continue d'arcs orientés, indexés par $t \in I^s(\alpha)$, qui induit un homéomorphisme ψ_α entre $I^s(\alpha)$ et $\displaystyle\bigcup_{\{\varepsilon \in E \mid s(\varepsilon) = b(\alpha)\}} I^s(\varepsilon)$.

La réunion des frontières des quadrilatères T^i_σ et T_α ainsi que des arêtes singulières définit une décomposition en briques dont le squelette contient $\Sigma(\mathcal{D})$. Les T^i_σ et les T_α sont des briques de cette décomposition. Comme nous allons le voir immédiatement toute autre brique est contenue dans une brique $\beta \in B$ et toute brique $\beta \in B$ contient une unique brique de la nouvelle décomposition qu'on notera T_β.

Considérons donc une brique $\beta \in B$. La frontière de β est réunion de deux arcs $\displaystyle\prod_{0 \le i \le n} \alpha_i$ et $\displaystyle\prod_{0 \le i \le n'} \alpha'_i$, où $g(\alpha_i) = d(\alpha'_i) = \beta$, où $s(\alpha_0) = s(\alpha'_0) = s(\beta)$ et $b(\alpha_n) = b(\alpha'_n) = b(\beta)$. Les quadrilatères $T_{\alpha'_i}$, $T^j_{s(\alpha'_i)}$, $T^j_{b(\alpha'_i)}$, $0 \le i \le n$ sont tous disjoints de $\mathrm{Int}(\beta)$. Les quadrilatères $T_{\alpha'_i}$, $0 \le i \le n$ sont contenus dans β ainsi que les quadrilatères $T^j_{s(\alpha'_i)}$, $1 \le i \le n$; plus précisément, la réunion de ces quadrilatètes est un disque dont la frontière est formée de $I^s(\alpha_0) \subset \alpha'_0$, de $I^b(\alpha_n) \subset \alpha'_{n'}$,

de l'arc $\prod_{0\le i\le n} \alpha_i$, enfin de l'arc $\Big(\prod_{0\le i\le n} \gamma_{\alpha_i}^{\max I^s(\alpha_i)}\Big)\gamma$ où γ est la feuille de T_{α_n} joignant $\max I^s(\alpha_n)$ à $\max I^b(\alpha_n)$. Il existe alors une unique brique T_β de la nouvelle décomposition qui est contenue dans β, c'est un disque dont la frontière est réunion de $\Big(\prod_{0\le i\le n} \gamma_{\alpha_i}^{\max I^s(\alpha_i)}\Big)\gamma$ et du segment contenu dans $\prod_{0\le i'\le n'} \alpha'_i$ qui joint les deux extrémités de $\Big(\prod_{0\le i\le n} \gamma_{\alpha_i}^{\max I^s(\alpha_i)}\Big)\gamma$. Cette frontière contient les segments de départ et d'arrivée de β.



On peut trouver un homéomorphisme h préservant l'orientation envoyant T_β sur $[-1,1]^2$ et les segments $I^s(\beta)$ et $I^b(\beta)$ respectivement sur $\{-1\}\times[-1,1]$ et $\{1\}\times[-1,1]$. On considère alors le feuilletage orienté, image par h^{-1} du feuilletage horizontal orienté suivant les x croissants. Chaque feuille issue de $t\in I^s(\beta)$ se prolonge quand elle arrive sur $I^b(\beta)$ en une unique feuille de $T^2_{b(\beta)}$ aboutissant en un point $\psi_\beta(t)$ du centre de $I^s(\alpha^+)$, où α^+ est l'unique arête dont la source est le but de β (c'est également l'unique élément de E ayant cette propriété). Remarquons que

$$\gamma_\beta^{\min I^s(\beta)} = \prod_{0\le i\le n} \gamma_{\alpha_i}^{\max I^s(\alpha_i)} \text{ et } \gamma_\beta^{\max I^s(\beta)} = \prod_{0\le i\le n'} \gamma_{\alpha'_i}^{\min I^s(\alpha'_i)}.$$

On dira qu'une suite

$$(\varepsilon_i, t_i)_{i\in\mathbf{Z}} \in E^{\mathbf{Z}} \times \prod_{i\in\mathbf{Z}} I^s(\varepsilon_i)$$

est *admissible* si $b(\varepsilon_i) = s(\varepsilon_{i+1})$ et $t_{i+1} = \psi_{\varepsilon_i}(t_i)$, pour tout $i\in\mathbf{Z}$. On vient de

définir un feuilletage orienté $\mathcal{F}$ sur le plan dont les feuilles sont les droites de la forme $\prod_{i\in\mathbf{Z}} \gamma_{\varepsilon_i}^{t_i}$, où $(\varepsilon_i, t_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ est admissible.

Le résultat suivant est évident

Proposition 5.1. *Soit* $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \gamma_{\varepsilon_i}^{t_i}$ *et* $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \gamma_{\varepsilon'_i}^{t'_i}$ *deux feuilles de* $\mathcal{F}$. *S'il existe* $i \in \mathbf{Z}$ *et* $i' \in \mathbf{Z}$ *tel que* $\varepsilon_i = \varepsilon'_{i'}$, *alors les deux feuilles sont comparables et on a* $\Gamma \leq \Gamma'$ *si et seulement si* $t_i \leq t'_{i'}$.

Etudions plus précisément les feuilles de $\mathcal{F}$.

Proposition 5.2. *Soit* $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \gamma_{\varepsilon_i}^{t_i}$ *une feuille de* $\mathcal{F}$. *Plusieurs cas sont possibles :*

i) *Tous les* ε_i *sont des arêtes, la droite* $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \varepsilon_i$ *appartient à* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *et chaque* t_i *est l'élément de* $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\varepsilon_i}$ *qui correspond à* Γ.

ii) *Il existe* $i_0 \in \mathbf{Z}$ *tel que* ε_{i_0} *est une brique et tel que* t_{i_0} *est dans l'intérieur de* $I^s(\varepsilon_{i_0})$. *Les* ε_i *qui sont des briques sont exactement les briques équivalentes à* ε_i *et* t_i *est alors dans l'intérieur de* $I^s(\varepsilon_i)$. *Si* $\widehat{\beta}$ *est la classe d'équivalence ainsi définie, alors* $\prod_{i\in\mathbf{Z}} \varepsilon_i$ *est la chaîne d'équivalence de* $\widehat{\beta}$.

iii) *Il existe* $i_0 \in \mathbf{Z}$ *tel que* ε_{i_0} *est une brique et tel que* $t_{i_0} = \max I^s(\varepsilon_{i_0})$. *Si* $\Gamma^+_{\varepsilon_{i_0}} = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i$, *on peut également écrire* $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \gamma_{\alpha_i}^{t'_i}$, *où* $t'_i \in \widetilde{\mathcal{B}}^s_{a_i}$ *correspond à* $\Gamma^+_{\varepsilon_{i_0}}$.

iv) *Il existe* $i_0 \in \mathbf{Z}$ *tel que* ε_{i_0} *est une brique et tel que* $t_{i_0} = \min I^s(\varepsilon_{i_0})$. *Si* $\Gamma^-_{\varepsilon_{i_0}} = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i$, *on peut également écrire* $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \gamma_{\alpha_i}^{t'_i}$, *où* $t'_i \in \widetilde{\mathcal{B}}^s_{a_i}$ *correspond à* $\Gamma^-_{\varepsilon_{i_0}}$.

Démonstration. Démontrons **i)**. Soit $(\varepsilon_i, t_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ une suite admissible, où chaque ε_i est une arête. Nous allons montrer que chaque t_i appartient à $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\varepsilon_i}$, (si la propriété est vraie pour un entier i, elle est vraie pour tous puisque $\psi_{\varepsilon_i}(\widetilde{\mathcal{B}}^s(\varepsilon_i)) \cap I^s_{\varepsilon_{i+1}} = \widetilde{\mathcal{B}}^s_{\varepsilon_{i+1}}$). Il existera alors une droite $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i \in \widetilde{\mathcal{B}}$ tel que t_i correspond à Γ. En particulier on aura $\varepsilon_i = \alpha_i$.

Supposons donc qu'aucun t_i n'est dans $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\varepsilon_i}$, notons t_0^+ le plus petit élément de $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\varepsilon_0}$ supérieur à t_0 et t_0^- le plus grand élément de $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\varepsilon_0}$ inférieur à t_0. Le point t_0^+ correspond à une droite $\Gamma^+ = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i^+ \in \widetilde{\mathcal{B}}$ et t_0^- à une droite $\Gamma^- = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i^-$. Comme ces droites sont différentes, on peut supposer par exemple qu'il existe $i \geq 0$ tel que $\alpha_i^+ \neq \alpha_i^-$; on note i_0 le plus petit entier vérifiant cette relation et α_i la valeur commune de α_i^+ et α_i^- pour $i \in \{0, \ldots, i_0 - 1\}$. Remarquons que

$i_0 \geq 1$ et que $d(\alpha_{i_0}^+) = g(\alpha_{i_0}^-)$. Si $t_i^+ \in \widetilde{\mathcal{B}}^s_{\alpha_i}$ (resp. $t_i^- \in \widetilde{\mathcal{B}}^s_{\alpha_i}$) correspond à Γ^+ (resp. Γ^-), alors l'image par ψ_{α_i} du segment $[t_i^-, t_i^+] \subset I^s(\alpha_i)$ est égal au segment $[t_{i+1}^-, t_{i+1}^+] \subset I^s(\alpha_{i+1})$, si $i \in \{0, \dots, i_0 - 2\}$. On a donc $\varepsilon_i = \alpha_i$ et $t_i \in [t_i^-, t_i^+]$, pour tout $i \in \{0, \dots, i_0 - 1\}$. On en déduit également que $]t_i^-, t_i^+[$ ne contient aucun élément de $\widetilde{\mathcal{B}}^s_{\alpha_i}$, c'est-à-dire que l'intervalle $]\Gamma^-, \Gamma^+[$ de $\widetilde{\mathcal{B}}$ est vide. La droite $\Gamma^-_{\alpha_{i_0^+}}$ est inférieure à Γ^+ et doit contenir α_{i_0-1}, elle est donc strictement supérieure à Γ^-. Ainsi on a $\Gamma^-_{\alpha_{i_0^+}} = \Gamma^+$ et de même $\Gamma^+_{\alpha_{i_0^-}} = \Gamma^-$. On en déduit que l'image par $\psi_{\alpha_{i_0-1}}$ de l'intervalle $]t_{i_0-1}^-, t_{i_0-1}^+[$ est contenue dans l'intérieur de $I^s(\beta)$, où $\beta = d(a_{i_0}^+) = g(a_{i_0}^-)$. On en déduit ensuite que ε_{i_0} n'est pas une arête, c'est la brique β.

Démontrons **ii)**. Soit $(\varepsilon_i, t_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ une suite admissible, où ε_0 est une brique et où t_0 est dans l'intérieur de $I^s(\varepsilon_0)$. Notons $\prod_{i \in \mathbf{Z}} \varepsilon'_i$ la chaîne d'équivalence de ε_0, où $\varepsilon'_0 = \varepsilon_0$. On sait déjà que l'unique arête dont le but est la source de ε_0 est $\varepsilon_{-1} = \varepsilon'_{-1}$ et que l'unique arête dont la source est le but de ε_0 est $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1$. Écrivons $\Gamma^-_{\varepsilon_0} = \prod_{i \in \mathbf{Z}} \alpha_i^- \in \widetilde{\mathcal{B}}$ et $\Gamma^+_{\varepsilon_0} = \prod_{i \in \mathbf{Z}} \alpha_i^+$, où $\alpha_{-1}^- = \alpha_{-1}^+ = \varepsilon'_{-1}$. Notons $t_i^- \in \widetilde{\mathcal{B}}^s_{a_i^-}$ le point correspondant à $\Gamma^-_{\varepsilon_0}$ et $t_i^+ \in \widetilde{\mathcal{B}}^s_{a_i^+}$ le point correspondant à $\Gamma^+_{\varepsilon_0}$. S'il y a n^- arêtes dont ε_0 est la brique adjacente à gauche et n^+ arêtes dont ε_0 est la brique adjacente à droite, on aura $\alpha_{n^-}^- = \alpha_{n^+}^+ = \varepsilon'_1$. Supposons qu'il existe une brique dans la suite $(\varepsilon'_i)_{i \geq 1}$ et notons ε'_{i_0} la première qui apparaît. On a $\alpha_{i+n^-}^- = \alpha_{i+n^+}^+ = \varepsilon'_{i+1}$, pour tout $i \in \{0, \dots, i_0 - 2\}$ et $g(a_{i_0-1+n^-}^-) = d(a_{i_0-1+n^+}^+) = \varepsilon'_{i_0}$. L'image par $\psi_{\varepsilon'_{i+1}}$ de $[t_{i+n^-}^-, t_{i+n^+}^+] \subset I^s(\varepsilon'_{i+1})$ est égal à $[t_{i+1+n^-}^-, t_{i+1+n^+}^+] \subset I^d(\varepsilon'_{i+2})$, pour tout $i \in \{0, \dots, i_0 - 3\}$, et l'image par $\psi_{\varepsilon_{i_0-1}}$ de $]t_{i_0-2+n^-}^-, t_{i_0-2+n^+}^+[\subset I^s(\varepsilon'_{i_0-1})$ est égale à $]t_{i_0-1+n^-}^-, t_{i_0-1+n^+}^+[\subset \mathrm{Int}(I^s(\varepsilon'_{i_0}))$ Le point t_1 appartenant à $]t_{n^-}^-, t_{n^+}^+[$, on en déduit que $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, i_0\}$ et que t_{i_0} est dans l'intérieur de ε_{i_0}. L'assertion **ii)** en découle immédiatement.

Les propriétés **iii)** et **iv)** sont évidentes. □

Étudions maintenant les feuilles de $\mathcal{F}$ vérifiant l'assertion **i)** de la proposition précédente :

Proposition 5.3. *L'application Θ, qui à une droite $\Gamma = \prod_{i \in \mathbf{Z}} \alpha_i \in \widetilde{\mathcal{B}}$ associe la feuille $\Theta(\Gamma) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} \gamma_{\alpha_i}^{t_i(\Gamma)}$ de $\mathcal{F}$, où $t_i(\Gamma) \in \widetilde{\mathcal{B}}^s_{\alpha_i}$ correspond à Γ, est un homéomorphisme strictement croissant de $\widetilde{\mathcal{B}}$ sur son image. De plus, chaque courbe $\Theta(\Gamma)$ est une droite de Brouwer.*

Démonstration. Le fait que l'application Θ soit injective, continue est que l'inverse

soit continue est évident. Montrons la croissance de Θ. Pour cela remarquons que l'on a la propriété suivante : pour toute courbe $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i \in \widetilde{\mathcal{B}}$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$ et pour tout $t \in [\min I^s(\alpha_i), t_i(\Gamma)]$, l'arc $\gamma^t_{\alpha_i}$ est contenu dans $g(\Gamma)$. En particulier, on a

$$D(\Gamma) \subset D(\Theta(\Gamma)) \subset D(\Gamma) \cup g(\Gamma).$$

On a également

$$D(\Theta(\Gamma)) \subset D(\Gamma) \bigcup_{i\in\mathbf{Z}} U_{\alpha_i}.$$

Supposons que $\Gamma' = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \alpha'_i \in \widetilde{\mathcal{B}}$ soit strictement supérieur à Γ. Si les droites Γ et Γ' n'ont pas d'arête en commun, alors on a

$$D(\Theta(\Gamma)) \subset D(\Gamma) \cup g(\Gamma) \subset D(\Gamma') \subset D(\Theta(\Gamma')).$$

Si Γ et Γ' ont une arête commune $\alpha_i = \alpha'_{i'}$, alors $t_i(\Gamma) < t_{i'}(\Gamma')$ et donc $D(\Theta(\Gamma)) \subset D(\Theta(\Gamma'))$.

Pour montrer que $\Theta(\Gamma)$ est une droite de Brouwer, on utilise les propriétés des voisinages U_{α_i} énoncées au début du paragraphe. On a :

$$\begin{aligned} f(D(\Theta(\Gamma))) &\subset f(D(\Gamma)) \bigcup_{i\in\mathbf{Z}} f(U_{\alpha_i}) \\ &\subset \mathrm{Int}(D(\Gamma)) \bigcup_{i\in\mathbf{Z}} \mathrm{Int}(D(\Gamma^-_{\alpha_i})) \\ &\subset \mathrm{Int}(D(\Gamma)) \\ &\subset \mathrm{Int}(D(\Theta(\Gamma))). \end{aligned}$$

□

Il reste à démontrer, comme dans le paragraphe précédent :

Proposition 5.4. *On peut choisir les homéomorphismes de liaison λ_σ, $\sigma \in S$, pour que toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ soient des droites de Brouwer.*

Démonstration. Pour toute brique $\beta \in B$, on va reparamétrer le feuilletage défini sur T_β, non plus seulement par $t \in I^s(\beta)$, mais également par $t' \in [-1, 1]$ en considérant un homéomorphisme croissant h_β de $[-1, 1]$ dans $I^s(\beta)$, obtenant ainsi une famille $(\gamma'^{t'}_\beta)_{t'\in[-1,1]}$ de sous-arcs de $\gamma^{h(t')}_\beta$.

Considérons une feuille $\Gamma = \prod_{i\in\mathbf{Z}} \gamma^{t_i}_{\varepsilon_i}$ de $\mathcal{F}$ rencontrant l'intérieur d'une brique T_β, et notons $\widehat{\beta}$ la classe d'équivalence de β. Si ε_i est une brique, alors Γ contient l'arc $\gamma'^{t'_i}_{\varepsilon_i}$, où $t_i = h_{\varepsilon_i}(t'_i)$. Remarquons que Γ est disjointe de $\Gamma^-_{\widehat{\beta}}$ et plus précisément que $D(\Gamma^-_{\widehat{\beta}}) \subset \mathrm{Int}(D(\Gamma))$.

Si $\beta_0 = \varepsilon_{i_0}$ et $\beta_1 = \varepsilon_{i_1}$ sont deux briques successives dans la chaîne d'équivalence $\prod_{i\in\mathbf{Z}} \varepsilon_i$ de $\widehat{\beta}$, les arcs ${\gamma'}_{\beta_0}^{t'_{i_0}}$ et ${\gamma'}_{\beta_1}^{t'_{i_1}}$ sont séparés sur Γ par un arc γ inclus à la fois dans $\bigcup_{i_0<i<i_1} U_{\varepsilon_i}$ et dans le voisinage à gauche $g\Big(\prod_{i_0<i<i_1} \varepsilon_i\Big)$. La première inclusion nous dit que $f(\gamma)$ est inclus dans $\mathrm{Int}(D(\Gamma^-_{\widehat{\beta}}))$ et donc dans $D(\Gamma)\setminus\Gamma$. La seconde inclusion nous dit que γ est inclus dans $G(\Gamma^+_{\widehat{\beta}})$ et que $f^{-1}(\gamma)$ est donc contenu dans $\mathrm{Int}(G(\Gamma^+_{\widehat{\beta}}))$. L'image inverse ne rencontre donc aucune brique $\beta\in\widehat{\beta}$, comme elle ne rencontre aucun voisinage U_α, où α est une arête contenue dans la chaîne d'équivalence, $f^{-1}(\gamma)$ est inclus dans $G(\Gamma)\setminus\Gamma$. De même, on peut choisir les homéomorphismes h_β pour que $f({\gamma'}_\beta^{t'})\subset \mathrm{Int}(D(\Gamma^-_{\widehat{\beta}}))$ si $t'\le -1/3$ et $f^{-1}({\gamma'}_\beta^{t'})\subset \mathrm{Int}(G(\Gamma^+_{\widehat{\beta}}))$ si $t'\ge 1/3$.

Il reste à montrer que l'on peut choisir les homéomorphismes de liaisons $\lambda_{b(\beta)}$, $\beta\in\widehat{\beta}$ pour que Γ soit une droite de Brouwer. D'après ce qui précède, il suffit que Γ soit libre. On rappelle que l'on a défini un ordre sur $\widehat{\beta}$ dans le paragraphe 4 et que l'on peut construire une famille d'homéomorphismes $\mu_\beta : [-1,1]\to[-1,1]$, $\beta\in\widetilde{\beta}$, vérifiant la conclusion du lemme 4.1 pour cet ordre. On peut alors choisir les homéomorphismes de liaison $\lambda_{b(\beta)}$, $\beta\in\widehat{\beta}$, pour que toute feuille $\Gamma=\prod_{i\in\mathbf{Z}}\gamma_{\varepsilon_i}^{t_i}$ de $\mathcal{F}$ rencontrant l'intérieur d'une brique T_β, $\beta\in\widehat{\beta}$, et vérifiant donc l'assertion **ii)** de la proposition 5.2, contienne, pour un certain $t'\in[-1,1]$ tous les arcs ${\gamma'}_\beta^{\mu_\beta^{-1}(t')}$, $\beta\in\widehat{\beta}$. D'après ce qui précède, si Γ rencontre son image, il existe $\beta\in\widehat{\beta}$, $\beta'\in\widehat{\beta}$ et $t'\in[-1,1]$ tels que

$$f(\gamma_\beta^{\mu_\beta^{-1}(t)})\cap\gamma_{\beta'}^{\mu_{\beta'}^{-1}(t)}\neq\emptyset.$$

On obtient une contradiction identique à celle obtenue au paragraphe 4. □

Références

[B] L. E. J. Brouwer, Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Ann.* **72** (1912), 37–54.

[Flu] M. Flucher, Fixed points of measure preserving torus homeomrphism, *Manuscripta Math.* **68** (1990), 271–293.

[Flo] A. Floer, Proof of the Arnold conjectures for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds, *Duke Math. J.* **51** (1986), 1–32.

[Fr1] J. Franks, Generalizations of the Poincaré–Birkhoff theorem, *Annals of Math.* **128** (1988), 139–151.

[Fr2] J. Franks, A new proof of the Brouwer plane translation theorem, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **12** (1992), 217–226.

[Fr3] J. Franks, Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero, *New-York J. Math.* **2** (1996), 1–19.

[G] L. Guillou, Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré–Birkhoff, *Topology* **33** (1994), 331–351.

[LeC] P. Le Calvez, Propriétés dynamiques de l'anneau et du tore, *Astérisque, Soc. Math. France* **204** (1991).

[LS] P. Le Calvez et A. Sauzet, Une démonstration dynamique du théorème de translation de Brouwer, *Expo. Math.* **14** (1996), 277–287.

[LeR] F. Le Roux, Dynamique des homéomorphismes de surfaces, versions topologiques des théorèmes de la fleur de Leau–Fatou et de la variété stable, Prépublication, Université Paris-Sud, 2001.

[M] S. Matsumoto, Arnold conjecture for surface homeomorphisms, Proceedings of the French-Japanese Conference "Hyperspace Topologies and Applications" (La Bussière, 1997), *Topology. Appl.* **104** (2000), 191–214.

[Sa] A. Sauzet, Application des décompositions libres à l'étude des homéomorphismes de surface, *Thèse de l'Université Paris 13*, (2001).

[Si] J.-C. Sikorav, Points fixes d'une application symplectique homologue à l'identité, *J. Diff. Geom*, **22** (1985), 49–79.

Patrice Le Calvez
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications
CNRS-UMR 7539
Institut Galilée
Université Paris 13/CNRS
99, Av. J.-B. Clément
93430 Villetaneuse
France
e-mail : lecalvez@math.univ-paris13.fr

(Received: November 20, 2001)

To access this journal online:
http://www.birkhauser.ch