Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 88 (2013)

Artikel: Acyclicité géométrique de Beris
Autor: Andreatta, Fabrizio / Olivier, Brinon
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515662

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 88 (2013), 965–1022
DOI 10.4171/CMH/309

Commentarii Mathematici Helvetici
© Swiss Mathematical Society

Acyclicité géométrique de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$

Fabrizio Andreatta and Olivier Brinon

Résumé. Dans cet article, on prouve que l'anneau de périodes cristallines $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ qui définit la notion de représentation cristalline dans le cas relatif est géométriquement acyclique. On démontre en fait une version relative de cette acyclicité.

Classification mathématique par sujets (2010). 11S15, 11S25, 14F30.

Mots-clefs. Ramification et théorie des extensions, cohomologie galoisienne, cohomologie p-adique, cohomologie cristalline.

Soit K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, à corps résiduel k parfait de caractéristique p. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, on fixe une clôture algébrique $\bar{K}$ de K et on pose $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

Soit X un schéma propre et lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Notons X_k sa fibre spéciale, X_K sa fibre générique et $X_{\bar{K}}$ sa fibre générique géométrique. Soient $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) := \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)[t^{-1}]$ les anneaux de périodes cristallines de $\mathcal{O}_K$ définis par Fontaine dans [12] ; ils sont munis d'une filtration décroissante séparée et exhaustive, d'une action de $\mathcal{G}_K$ et d'un endomorphisme de Frobenius. Fontaine a conjecturé dans [10], et Faltings a prouvé dans [8], l'existence d'un isomorphisme de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$-modules

$$\mathrm{H}^n_{\text{ét}}\big(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) \cong \mathrm{H}^n_{\mathrm{cris}}\big(X_k/\mathrm{W}(k)\big) \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) \qquad (C_{\mathrm{cris}})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, fonctoriel en X et compatible aux filtrations, aux actions de $\mathcal{G}_K$ et aux Frobenius. Dans [3] une nouvelle preuve est donnée, plus proche du point de vue initial de Fontaine et Messing dans [13]. Supposons X défini sur $\mathrm{W}(k)$. On remplace le site syntomique-étale de *loc. cit.* par un nouveau site $\mathcal{X}$, introduit par Faltings dans [9] (voir [5] pour une discussion sur la définition correcte du site). Soit $\widehat{X}$ la complétion formelle de X le long de X_k. Alors les objets de $\mathcal{X}$ sont les couples (U, W), où $U \to \widehat{X}$ est p-adiquement formellement étale et $W \to U^{\mathrm{rig}}_{\bar{K}}$ est un recouvrement fini étale, au-dessus de $\bar{K}$, de la fibre rigide analytique U^{rig} de U. Soit $v : \widehat{X}^{\text{ét}} \to \mathcal{X}$ le foncteur $U \mapsto \big(U, U^{\mathrm{rig}}_{\bar{K}}\big)$ où $\widehat{X}^{\text{ét}}$ est le site étale de $\widehat{X}$. On peut prouver qu'il induit un morphisme de sites. L'un des points clef de [3] est la construction d'un faisceau « continu » $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) \otimes_{\mathrm{W}(k)} v^*(\mathcal{O}_{\widehat{X}^{\text{ét}}})$-modules sur $\mathcal{X}$, muni

d'une filtration, d'une action de $\mathcal{G}_K$, d'un opérateur de Frobenius (localement sur $\widehat{X}$) et d'une connexion intégrable

$$\nabla\colon \mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{v^*(\mathcal{O}_{\widehat{X}^{\text{ét}}})} v^*\big(\Omega^1_{\widehat{X}^{\text{ét}}/\,\mathrm{W}(k)}\big)$$

tels que

(1) le complexe de de Rham

$$\mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{v^*(\mathcal{O}_{\widehat{X}^{\text{ét}}})} v^*\big(\Omega^1_{\widehat{X}^{\text{ét}}/\,\mathrm{W}(k)}\big) \to \mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{v^*(\mathcal{O}_{\widehat{X}^{\text{ét}}})} v^*\big(\Omega^2_{\widehat{X}^{\text{ét}}/\,\mathrm{W}(k)}\big) \to \cdots$$

défini par ∇ est exact ;

(2) pour tout $j \in \mathbb{N}$, le faisceau $\mathrm{R}^q\, v_*\big(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{v^*(\mathcal{O}_{\widehat{X}^{\text{ét}}})} v^*\big(\Omega^j_{\widehat{X}^{\text{ét}}/\,\mathrm{W}(k)}\big)\big)$ est tué par une puissance de t si $q \geq 1$, et coïncide avec $\Omega^j_{\widehat{X}^{\text{ét}}/\,\mathrm{W}(k)} \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$ quand on inverse t pour $q = 0$;

(3) si $\mathbb{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ désigne le noyau de ∇, alors $\mathrm{H}^n_{\text{ét}}\big(\mathcal{X}, \mathbb{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}\big) \otimes_{\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$ coïncide avec $\mathrm{H}^n_{\text{ét}}\big(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$.

Grâce à (1) et (3), on peut calculer $\mathrm{H}^n_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$ comme la cohomologie du complexe $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{v^*(\mathcal{O}_{\widehat{X}^{\text{ét}}})} v^*\big(\Omega^\bullet_{\widehat{X}^{\text{ét}}/\,\mathrm{W}(k)}\big)$ après inversion de t. Remarquons que $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}, _) = \mathrm{H}^0\big(\widehat{X}^{\text{ét}}, v_*(_)\big)$. En utilisant la suite spectrale associée et (2), la cohomologie de $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{v^*(\mathcal{O}_{\widehat{X}^{\text{ét}}})} v^*\big(\Omega^\bullet_{\widehat{X}^{\text{ét}}/\,\mathrm{W}(k)}\big)$ coïncide avec la cohomologie du complexe

$$\Omega^\bullet_{\widehat{X}^{\text{ét}}/\,\mathrm{W}(k)} \widehat{\otimes}_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$$

sur $\widehat{X}^{\text{ét}}$, qui coïncide avec

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{cris}}\big(X_k/\,\mathrm{W}(k)\big)\widehat{\otimes}_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K).$$

On prouve que toutes ces identifications préservent les filtrations, les actions de Galois et des Frobenius. Cela démontre C_{cris}.

La preuve de (1) est formelle. La preuve de (3) s'appuie sur des résultats de Faltings (*cf.* [9]) et un théorème de type GAGA ; contrairement au site syntomique-étale, celui de Faltings est adapté à la comparaison avec la cohomologie étale. Le point délicat est la comparaison avec la cohomologie cristalline *i.e.* la preuve de (2). C'est une conséquence du présent travail[1]. En effet, dans [3] on prouve le fait suivant. Soit $U = \mathrm{Spf}(R_U)$ un ouvert étale de $\widehat{X}$ assez petit. Soit E_U une clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(R_U)$ contenant $\overline{K}$. Notons $\overline{R}_U$ la réunion des sous-R_U-algèbres de E_U qui sont

[1]Pendant la rédaction de ce travail, le premier auteur a bénéficié de l'hospitalité de l'Institut Galilée à l'Université Paris 13.

finies étales sur $R_U[p^{-1}]$ et notons G_{R_U} le groupe de Galois de $\overline{R}_U[p^{-1}]$ sur $R_U\overline{K}$. Alors la fibre de $\mathrm{R}^q\, v_*\,(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}})$ en un point $x \in \widehat{X}^{\text{ét}}$ est la limite, sur tous les voisinages U de x comme ci-dessus, des groupes de cohomologie continue $\mathrm{H}^q\big(G_{R_U}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_U)\big)$. Ici, $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_U)$ est l'anneau construit à partir de $\overline{R}_U$ dans la section 1. Il est muni de la topologie p-adique et d'une action continue de G_{R_U}. Ainsi, si on pose $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R_U) := \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_U)[t^{-1}]$, il suffit, pour prouver (2), de montrer que $\mathrm{H}^q\big(G_{R_U}, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R_U)\big) = 0$ pour $q \geq 1$ et $\mathrm{H}^0\big(G_{R_U}, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R_U)\big) = R_U \widehat{\otimes}_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$. En fait, pour prouver l'analogue relatif de [3], on a besoin d'analogues relatifs de (2), on présente donc ici une généralisation de ces résultats : c'est l'objet du théorème principal de ce travail (théorème 5).

Remarquons que $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R_U)$ est « plus gros » que l'anneau obtenu en appliquant la construction de Fontaine à $\overline{R}_U$ au lieu de $\overline{\mathcal{O}}_K$, construction qui donne un anneau qui *n'est pas* géométriquement acyclique en général. Historiquement, Hyodo a été le premier à remarquer que la définition « naïve » des anneaux de Fontaine ne se comporte pas bien dans le cas relatif, et qu'on a besoin d'une construction plus générale. En fait, Hyodo a observé que le module de Tate d'une variété abélienne sur un corps de valuation discrète complet, de caractéristique mixte $(0, p)$, à corps résiduel *imparfait*, n'est pas de Hodge–Tate au sens « naïf » en général. Dans [16], il propose une définition correcte de la notion de représentation de Hodge–Tate dans le cas relatif. Il construit pour cela un anneau B_{HT} « plus gros » que l'anneau obtenu en faisant la construction habituelle. Une des particularités de cet anneau B_{HT} est que, contrairement à l'anneau « naïf » , il est géométriquement acyclique (*cf.* [16], Proposition 1.2). Les anneaux de périodes $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et B_{dR} ont déjà été construits dans des situations relatives. La construction habituelle a été considérée par Faltings, tandis que le pendant de la construction de Hyodo l'a été par Wintenberger, Tsuzuki et dans [7].

Remarquons que, dans un travail non publié, Tsuji a aussi démontré des résultats d'acyclicité géométrique de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$. Après l'achèvement du présent article, Rémi Lodh nous a informé qu'il a lui aussi obtenu des résultats similaires dans sa thèse de doctorat, achevée en 2007 sous la direction de Faltings.

Les auteurs remercient le rapporteur pour les diverses erreurs qu'il a relevées dans une première version de ce travail, ainsi que pour les améliorations qu'il a suggérées.

1. Notations et rappels

On note v la valuation de K normalisée par $v(p) = 1$. Elle s'étend de façon unique en une valuation de $\overline{K}$, qu'on note encore v. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $\varepsilon^{(n)} \in \overline{K}$ une racine p^n-ième de l'unité, de sorte que $\big(\varepsilon^{(n+1)}\big)^p = \varepsilon^{(n)}$. Soit $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K[\varepsilon^{(n)}]$ l'extension cyclotomique de K. C'est une extension galoisienne de K, dont le groupe de Galois s'identifie, via le caractère cyclotomique χ, à un sous-groupe ouvert de $\mathbb{Z}_p^\times$.

Soient $\delta, d \in \mathbb{N}$ et soit $S^{(0)} = \mathcal{O}_K\{Z_1^{\pm 1}, \dots, Z_\delta^{\pm 1}\}$ le séparé complété de $\mathcal{O}_K[Z_1^{\pm 1}, \dots, Z_\delta^{\pm 1}]$ pour la topologie p-adique. On suppose que S (resp. R) s'obtient à partir de $S^{(0)}$ (resp. de $S\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$) en itérant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

(ét) complétion p-adique d'une extension étale ;

(loc) complétion p-adique d'une localisation ;

(comp) complétion par rapport à un idéal contenant p.

On suppose en outre que

$$\mathcal{O}_K[Z_1^{\pm 1}, \dots, Z_\delta^{\pm 1}] \to S \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_K[Z_1^{\pm 1}, \dots, Z_\delta^{\pm 1}, T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}] \to R$$

sont à fibres géométriquement régulières ou que R est de dimension de Krull inférieure à 2, et que $k \to S \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ et $k \to R \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ sont géométriquement intègres.[2] Dans ces conditions, le théorème de pureté de Faltings s'applique. On suppose en outre que K est algébriquement clos dans $R[p^{-1}]$.

Remarquons que S et R sont noethériens, p-adiquement séparés et complets, intègres et réguliers. Soit E (resp. F) une clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(R)$ (resp. la clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(S)$ dans E). On note $\overline{R}$ (resp. $\overline{S}$) la réunion des sous-R-algèbres finies R' (resp. sous-S-algèbres finies S') de E (resp. F) telles que $R'[p^{-1}]$ est une extension étale de $R[p^{-1}]$ (resp. $S'[p^{-1}]$ est une extension étale de $S[p^{-1}]$). On a $\overline{S} \subseteq \overline{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1, \dots, d\}$ (resp. $i \in \{1, \dots, \delta\}$), on choisit $T_i^{(n)} \in \overline{R}$ (respectivement $Z_i^{(n)} \in \overline{S}$) une racine p^n-ième de T_i (respectivement de Z_i), de sorte que $(T_i^{(n+1)})^p = T_i^{(n)}$ (respectivement $(Z_i^{(n+1)})^p = Z_i^{(n)}$). Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note R_n le normalisé de $R[\varepsilon^{(n)}, Z_1^{(n)}, \dots, Z_\delta^{(n)}, T_1^{(n)}, \dots, T_d^{(n)}]$ dans $\overline{R}$ et $R_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} R_n$. En particulier, on a $R_\infty \subseteq \overline{R}$.

Enfin, on suppose que $\mathrm{Spec}(R/pR) \to \mathrm{Spec}(S/pS)$ est surjectif et génériquement géométriquement irréductible. On va prouver les premières propriétés des anneaux S et R dans la proposition suivante. Les auteurs remercient le rapporteur pour avoir trouvé des erreurs dans une version précédente et avoir suggéré les corrections nécessaires.

Proposition 1. (1) *Le morphisme* $\mathrm{Spec}(R/pR) \to \mathrm{Spec}(S/pS)$ *est fidèlement plat et géométriquement régulier. En particulier, si* $\overline{\mathrm{Frac}(S \otimes_{\mathcal{O}_K} k)}$ *désigne une clôture algébrique de* $\mathrm{Frac}(S \otimes_{\mathcal{O}_K} k)$, *l'anneau* $R \otimes_S \overline{\mathrm{Frac}(S \otimes_{\mathcal{O}_K} k)}$ *est intègre.*

(2) *Soit* $\mathcal{O}_{K_n}$ *l'anneau des entiers de* $K[\varepsilon^{(n)}]$. *Alors*

$$S \otimes_{\mathcal{O}_K[Z_1, \dots, Z_\delta]} \mathcal{O}_{K_n}[Z_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, Z_\delta^{\frac{1}{p^n}}] \cong S_n$$

[2]Note ajoutée sur épreuves. La première hypothèse est inutile pour pouvoir appliquer le théorème de pureté de Faltings, cf. théorème 7.9 de P. Scholze, Perfectoid spaces, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 116 (2012), p. 245–313.

et

$$R \otimes_{S[T_1,\dots,T_d]} S_n\big[T_1^{\frac{1}{p^n}},\dots,T_d^{\frac{1}{p^n}}\big] \cong R_n.$$

(3) *L'anneau* $R \otimes_S \overline{S}$ *(resp.* $R_n \otimes_{S_n} \overline{S}$*) est intègre et normal, et l'application*

$$(R/pR) \otimes_{S/pS} (\overline{S}/p\overline{S}) \to \overline{R}/p\overline{R}$$

(resp. $(R_n/pR_n) \otimes_{S_n/pS_n} (\overline{S}/p\overline{S}) \to \overline{R}/p\overline{R}$*) est injective (pour tout* $n \in \mathbb{N}_{>0}$*).*

Démonstration. (1) Par hypothèse, le morphisme $\mathrm{Spec}(R/pR) \to \mathrm{Spec}(S/pS)$ est surjectif et plat, puisque R est une S-algèbre plate. En particulier, il est fidèlement plat.

Le Frobenius définit un morphisme fini sur

$$S^{(0)}/pS^{(0)} = (\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)\big[Z_1^{\pm 1},\dots,Z_\delta^{\pm 1}\big].$$

Rappelons qu'il existe une suite d'anneaux $S^{(0)} \subseteq S^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq S^{(n)} = S$ où $S^{(i+1)}$ est obtenu à partir de $S^{(i)}$ en utilisant une des opérations (ét), (loc), (comp). En utilisant le lemme 46, on en déduit par induction sur $i \geq 1$ que dans chaque cas, la linéarisation du Frobenius $\varphi \otimes 1\colon S^{(i)}/pS^{(i)} \otimes^{\varphi}_{S^{(i-1)}/pS^{(i-1)}} S^{(i-1)}/pS^{(i-1)} \to S^{(i)}/pS^{(i)}$ est un isomorphisme de $S^{(i-1)}/pS^{(i-1)}$-algèbres et que le Frobenius définit un morphisme fini sur $S^{(i)}/pS^{(i)}$. Il en résulte que $\varphi \otimes 1\colon S/pS \otimes^{\varphi}_{S^{(0)}/pS^{(0)}} S^{(0)}/pS^{(0)} \to S/pS$ est un isomorphisme de $S^{(0)}/pS^{(0)}$-algèbres : le Frobenius définit un morphisme fini sur S/pS. Soit $R^{(0)} := S\{T_1^{\pm 1},\dots,T_d^{\pm 1}\}$. Par définition, R/pR est obtenu à partir de $R^{(0)}/pR^{(0)}$ en itérant les opérations (ét), (loc), (comp) un nombre fini de fois. On montre comme ci-dessus que $\varphi \otimes 1\colon R/pR \otimes^{\varphi}_{R^{(0)}/pR^{(0)}} R^{(0)}/pR^{(0)} \to R/pR$ est un isomorphisme de $R^{(0)}/pR^{(0)}$-algèbres. On déduit de [14], Théorème 21.2.7, que R/pR est formellement étale sur $R^{(0)}/pR^{(0)}$, et donc formellement lisse sur S/pS. On conclut (*cf.* [14], Corollaire 19.6.5) que le morphisme $\mathrm{Spec}(R/pR) \to \mathrm{Spec}(S/pS)$ est géométriquement régulier.

(2) Soit $\mathfrak{m}_n$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_n}$ et $k_n = \mathcal{O}_{K_n}/\mathfrak{m}_n$ son corps résiduel. Soient $S'_n := S \otimes_{\mathcal{O}_K[Z_1,\dots,Z_\delta]} \mathcal{O}_{K_n}\big[Z_1^{\frac{1}{p^n}},\dots,Z_\delta^{\frac{1}{p^n}}\big]$ et $R'_n := R \otimes_{R^{(0)}} S_n\big[T_1^{\frac{1}{p^n}},\dots,T_d^{\frac{1}{p^n}}\big]$. Il suffit de prouver que S'_n et R'_n sont intègres et réguliers. Comme S'_n (resp. R'_n) est fini et plat comme S-module (resp. comme R-module), les anneaux S'_n et R'_n sont noethériens, p-adiquement séparés et complets, sans p-torsion. En particulier, il suffit de prouver que $S'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n$ et $R'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n$ sont intègres et réguliers. Par définition, $S'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n$ (resp. $R'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n$) est obtenu à partir de $k_n\big[Z_1^{\frac{1}{p^n}},\dots,Z_\delta^{\frac{1}{p^n}}\big]$ (resp. $S'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n\big[T_1^{\frac{1}{p^n}},\dots,T_d^{\frac{1}{p^n}}\big]$) en itérant les opérations (ét), (loc) et (comp). En particulier, $S'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n$ et $R'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n$ sont réguliers : il suffit de prouver qu'ils sont intègres.

On a $S'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n \cong \big(S \otimes_{\mathcal{O}_K} k_n\big) \otimes_{k[Z_1,\dots,Z_\delta]} k\big[Z_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, Z_\delta^{\frac{1}{p^n}}\big]$. On déduit de la preuve de (1) que le morphisme

$$\big(S \otimes_{\mathcal{O}_K} k_n\big) \otimes_{k[Z_1,\dots,Z_\delta]} k\big[Z_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, Z_\delta^{\frac{1}{p^n}}\big] \to S \otimes_{\mathcal{O}_K} k_n,$$

qui est la n-ième itération du Frobenius sur $S \otimes_{\mathcal{O}_K} k_n$ et qui envoie $Z_i^{\frac{1}{p^n}}$ sur Z_i, est un isomorphisme. Comme $k \to S \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ est géométriquement intègre, il en résulte que $S \otimes_{\mathcal{O}_K} k_n$, et donc $S'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n$, est intègre. On en déduit aussi que

$$R'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n \cong \big(R \otimes_{\mathcal{O}_K} k_n\big) \otimes_{k[Z_1,\dots,Z_\delta,T_1,\dots,T_d]} k\big[Z_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, Z_\delta^{\frac{1}{p^n}}, T_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big].$$

En utilisant la preuve de (1), on prouve de la même façon qu'il y a un isomorphisme $R'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n \cong R \otimes_{\mathcal{O}_K} k_n$ qui induit la n-ième itération du Frobenius sur $R \otimes_{\mathcal{O}_K} k_n$, et envoie $Z_i^{\frac{1}{p^n}}$ sur Z_i, et $T_j^{\frac{1}{p^n}}$ sur T_j. Comme $k \to R \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ est géométriquement intègre, $R \otimes_{\mathcal{O}_K} k_n$, et donc $R'_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} k_n$, est intègre.

(3) On déduit de la preuve de (2) que $S_n/\mathfrak{m}_n S_n \cong (S/\mathfrak{m}_0 S) \otimes_k k_n$ (envoyant $Z_i^{\frac{1}{p^n}}$ sur Z_i) et que $R_n/\mathfrak{m}_n R_n \cong (R/\mathfrak{m}_0 R) \otimes_k k_n$ comme S_n-algèbres (envoyant $T_j^{\frac{1}{p^n}}$ sur T_j). L'application $\mathrm{Spec}(R_n/pR_n) \to \mathrm{Spec}(S_n/pS_n)$ est donc elle aussi surjective et génériquement géométriquement irréductible. Il suffit donc de prouver la proposition dans le cas "$n = 0$". Soit S' une sous-S-algèbre intègre, normale de $\overline{S}$, telle que $S[p^{-1}] \subseteq S'[p^{-1}]$ est finie étale. Comme $\overline{S}$ est une union des telles S-algèbres, il suffit de prouver que l'anneau $R' := R \otimes_S S'$ est intègre, normal et que l'application $R'/pR' \to \overline{R}/p\overline{R}$ est injective. La deuxième assertion résultant de la première, il suffit de voir que R' est intègre et normal.

Normalité de R'. On va appliquer le critère de normalité de Serre [15], Théorème 5.8.6. Comme S' est sans p-torsion et l'extension $S \subseteq R$ plate, l'anneau R' est sans p-torsion : l'application $R' \to R'[p^{-1}]$ est injective. Comme $S[p^{-1}] \subseteq S'[p^{-1}]$ est finie étale, il en est de même de $R[p^{-1}] \subseteq R'[p^{-1}]$. L'anneau R étant normal, $R'[p^{-1}]$ l'est aussi. En particulier, R' est réduit *i.e.* R' est régulier en codimension 0. Comme $R'[p^{-1}]$ est noethérien et normal, on peut l'écrire comme un produit fini $R'[p^{-1}] = \prod_{j=1}^s D_j$ avec D_j normal, intègre, fini et étale sur $R[p^{-1}]$. Comme R' est sans p-torsion, les idéaux premiers de codimension 0 de R' sont les noyaux $\mathrm{Ker}(R' \to D_j)$, pour $j \in \{1, \dots, s\}$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, s\}$, soit R'_j l'image de R' dans D_j. Chaque R'_j est un anneau noethérien intègre, fini sur R. On déduit des théorèmes de going-up et going-down que chaque idéal premier de R'_j de codimension 1 est au-dessus d'un idéal premier de R de codimension 1. Les morphismes finis et injectifs $R \hookrightarrow R' \hookrightarrow \prod_{j=1}^s R'_j$ induisent des applications surjectives $\coprod_{j=1}^s \mathrm{Spec}\,(R'_j) \to \mathrm{Spec}\,(R') \to \mathrm{Spec}(R)$. D'après ce qui précède, le composé envoie les idéaux premiers de codimension 1 sur les idéaux premiers de codimension 1.

Comme la hauteur croît par morphisme fini injectif ([19], Exercice 9.8), les idéaux premiers de codimension 1 de R' s'envoient surjectivement sur les idéaux premiers de codimension 1 de R.

Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de R de codimension 1. Montrons que $R' \otimes_R R_{\mathfrak{q}}$ est normal, ce qui impliquera que R' est régulier en codimension 1. C'est clair si $p \notin \mathfrak{q}$, parce que $R'[p^{-1}]$ est normal. Si $p \in \mathfrak{q}$, alors $\mathfrak{q} = \varpi R$ (où ϖ est une uniformisante de K). Notons $\{\mathfrak{p}_i\}_{1 \leq i \leq m}$ (resp. $\mathfrak{p}$) les idéaux premiers de codimension 1 de S' (resp. S) au-dessus de p. Puisque S' est normal, on a une suite exacte

$$0 \to S' \to S'[p^{-1}] \to \prod_{i=1}^{m} \left(\mathrm{Frac}(S')/S'_{\mathfrak{p}_i}\right).$$

Comme $S \to R$ est plat, on en déduit une suite exacte

$$0 \to R' \otimes_R R_{\mathfrak{q}} \to S'[p^{-1}] \otimes_S R_{\mathfrak{q}} \to \prod_{i=1}^{m} \left(\mathrm{Frac}(S')/S'_{\mathfrak{p}_i}\right) \otimes_S R_{\mathfrak{q}}.$$

Notons que $\mathrm{Frac}(S') \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$ est une localisation de $R'[p^{-1}]$ qui est régulier : il est donc régulier et *a fortiori* normal. En particulier, pour prouver que $R' \otimes_R R_{\mathfrak{q}}$ est normal, il suffit de prouver qu'il est intégralement clos dans $\mathrm{Frac}(S') \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$. On déduit de la suite exacte qu'il suffit de prouver que $S'_{\mathfrak{p}_i} \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$ est local et régulier de dimension 1 pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. L'extension $R_{\mathfrak{q}} \subseteq S' \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$ est finie et plate, et on a montré que les idéaux maximaux de $S' \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$ sont les idéaux au-dessus de $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} = \varpi R_{\mathfrak{q}}$. Mais $S' \otimes_S R_{\mathfrak{q}} = S' \otimes_S S_{\mathfrak{p}} \otimes_{S_{\mathfrak{p}}} R_{\mathfrak{q}}$: ces idéaux sont au-dessus des idéaux $\mathfrak{p}_i S' \otimes_S S_{\mathfrak{p}}$ pour $i \in \{1, \ldots, m\}$. Comme $\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{q}}/\varpi R_{\mathfrak{q}}) \to \mathrm{Spec}(S_{\mathfrak{p}}/\varpi S_{\mathfrak{p}})$ est géométriquement intègre (car $\mathrm{Spec}(R/pR) \to \mathrm{Spec}(S/pS)$ est génériquement géométriquement irréductible par hypothèse, et génériquement géométriquement régulier d'après (1)), les idéaux $\mathfrak{p}_i S' \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$ sont déjà premiers. Les idéaux maximaux de $S' \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$ sont donc les idéaux $\mathfrak{p}_i S' \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$. En particulier, $S'_{\mathfrak{p}_i} \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$ est un anneau local sans p-torsion d'idéal maximal $\mathfrak{p}_i S'_{\mathfrak{p}_i} \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$. Comme $S'_{\mathfrak{p}_i}$ est un anneau de valuation, $\mathfrak{p}_i S'_{\mathfrak{p}_i}$, et donc *a fortiori* $\mathfrak{p}_i S'_{\mathfrak{p}_i} \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$ sont des idéaux principaux. En particulier, $S'_{\mathfrak{p}_i} \otimes_S R_{\mathfrak{q}}$ est un anneau régulier de dimension 1.

On en déduit que R' est régulier en codimension ≤ 1 et donc satisfait la condition (R_1) du critère de normalité de Serre.

Reste à montrer que R' satisfait la condition (S_2). On sait déjà que R est régulier, donc Cohen–Macaulay. Puisque S est une R-algèbre plate, on déduit de [15], Corollaire 6.3.5, que les fibres du morphisme $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(S)$ sont de Cohen–Macaulay. Puisque S' est un S-module fini, les fibres du morphisme $\mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(S')$ sont aussi de Cohen–Macaulay [15], Proposition 6.7.1, et donc satisfont la condition (S_n) pour tout n. L'anneau S' étant normal, il satisfait la condition (S_2). Comme le morphisme $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(S)$ est plat, on déduit de [15], Proposition 6.4.1, que R' satisfait aussi la condition (S_2).

Intégralité de R'. On sait déjà que R' est noethérien et normal. C'est donc un produit d'anneaux intègres et normaux. Comme R' est séparé et complet pour la topologie p-adique, il suffit de montrer que $X = \mathrm{Spec}(R'/pR')$ est connexe. On note $Y_1, \ldots, Y_j$ les composantes irréductibles de Y : elles sont définies par les idéaux premiers minimaux y_j de S'/pS'.

Soient v_j l'idéal premier de S/pS défini par y_j, et z_j (resp. w_j) l'idéal premier de S' image inverse de y_j (resp. v_j). Comme S et S' sont plats sur $\mathcal{O}_K$, on a $\dim\big((S/pS)_{v_j}\big) = \dim(S_{w_j}) - 1$ et $\dim\big((S'/pS')_{y_j}\big) = \dim\big(S'_{z_j}\big) - 1$. Comme S et S' sont intègres, normaux et S' est fini comme S-module, on déduit des théorèmes de going-up et going-down que $\dim\big(S'_{z_j}\big) = \dim(S_{w_j})$ et donc $0 = \dim\big((S/pS)_{v_j}\big) = \dim\big((S'/pS')_{y_j}\big)$. Si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$, alors $\mathfrak{m}S$ définit l'unique idéal premier minimal de S au-dessus de p. On en déduit que l'image de chaque y_i est l'idéal 0 de $S/\mathfrak{m}S$. Comme $\mathrm{Spec}(R/pR) \to \mathrm{Spec}(S/pS)$ est surjectif et génériquement géométriquement irréductible, on conclut qu'on a un et un seul point $x_i \in X$ au-dessus de y_i. Soit $X_i := \overline{\{x_i\}}$. Alors X_i est la seule composante irréductible de X au-dessus de Y_i. L'anneau S' étant intègre, normal et complet pour la topologie p-adique, Y est connexe. Pour prouver que X est connexe, il suffit donc de prouver que si $Y_i \cap Y_j \neq \varnothing$, alors $X_i \cap X_j \neq \varnothing$. Soit $w \in Y_i \cap Y_j$. Comme l'application $\mathrm{Spec}(R/pR) \to \mathrm{Spec}(S/pS)$ est surjective, il existe $z \in X$ au-dessus de w. Comme $\mathrm{Spec}(R/pR) \to \mathrm{Spec}(S/pS)$ est plat et $w \in Y_i = \overline{\{y_i\}}$ (resp. $w \in \overline{\{y_j\}}$), on en déduit que $z \in \overline{\{x_i\}} = X_i$ (resp. $z \in \overline{\{x_j\}} = X_j$), donc que $z \in X_i \cap X_j$, ce qu'on voulait. □

En particulier, on déduit de la proposition 1 (3) que $R \otimes_S \overline{S} \xrightarrow{\sim} R\overline{S}$ et $R_n \otimes_{S_n} \overline{S} \xrightarrow{\sim} R_n\overline{S}$ (pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$), sont des sous-anneaux normaux de $\overline{R}[p^{-1}]$. Posons

$$\begin{aligned} G_{R/S} &= \mathrm{Gal}(\overline{R}[p^{-1}]/\overline{S} \cdot R[p^{-1}]), \\ H_{R/S} &= \mathrm{Gal}(\overline{R}[p^{-1}]/\overline{S} \cdot R_\infty[p^{-1}]), \\ \widetilde{\Gamma}_{R/S} &= \mathrm{Gal}(\overline{S} \cdot R_\infty[p^{-1}]/\overline{S} \cdot R[p^{-1}]). \end{aligned}$$

D'après la proposition 1 (2) et (3), on a

$$\begin{aligned} R_n\overline{S} \cong R_n \otimes_{S_n} \overline{S} &\cong \big(R \otimes_{S[T_1,\ldots,T_d]} S_n\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big]\big) \otimes_{S_n} \overline{S} \\ &\cong \big(R \otimes_S \overline{S}\big) \otimes_{\overline{S}[T_1,\ldots,T_d]} \overline{S}\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big] \\ &\cong R\overline{S} \otimes_{\overline{S}[T_1,\ldots,T_d]} \overline{S}\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big] \end{aligned}$$

L'extension $R\overline{S} \subset R_n\overline{S}$ est alors de degré p^{nd} et donc $\widetilde{\Gamma}_{R/S} \simeq \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}_p\, \gamma_i$, où γ_i est défini par :

$$\gamma_i\left(T_j^{(n)}\right) = \begin{cases} \varepsilon^{(n)} T_i^{(n)} & \text{si } j = i, \\ T_j^{(n)} & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

(remarquons que dans le cas où $\delta = 0$, *i.e.* $S = \mathcal{O}_K$, on a $\bar{S}[p^{-1}] = \bar{K}$, de sorte que $G_{R/S} = G_R$ est le groupe fondamental *géométrique* de $\mathrm{Spec}(R[p^{-1}])$).

On a donc la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & & \bar{R}[p^{-1}] \\
\bar{S}[p^{-1}] \arrow[r] & \bar{S}\cdot R[p^{-1}] \arrow[r] \arrow[ur, bend left, "G_{R/S}"] & \bar{S}\cdot R_\infty[p^{-1}] \arrow[u, bend left, "H_{R/S}"] \arrow[ul, bend right, "\tilde{\Gamma}_{R/S}"'] \\
S[p^{-1}] \arrow[r] \arrow[u] & R[p^{-1}] \arrow[r] \arrow[u] & R_\infty[p^{-1}] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Les anneaux de périodes cristallines. (Cf. [7], 6.) Dans tout ce qui suit, si A est un anneau, $I \subseteq A$ un idéal à puissances divisées et $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on notera $x^{[n]}$ la n-ième puissance divisée de $x \in I$.

Posons $\mathcal{R} = \varprojlim \bar{R}/p\bar{R}$, les morphismes de transition étant donnés par le Frobenius (cet anneau est noté $\tilde{\mathbf{E}}^+$ dans [1] et dans [2]). C'est un anneau de caractéristique p muni d'une action de $G_{R/S}$. Comme d'habitude (*cf.* [12], 1.2.2), il s'identifie (comme ensemble) à

$$\left\{\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{\bar{R}}^{\mathbb{N}},\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \left(x^{(n+1)}\right)^p = x^{(n)}\right\}$$

où $\widehat{\bar{R}}$ est le séparé complété de $\bar{R}$ pour la topologie p-adique. En particulier, on dispose dans $\mathcal{R}$ des éléments suivants :

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \left(\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \dots\right) \\
\tilde{T}_i &= \left(T_i^{(0)}, T_i^{(1)}, \dots\right) \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, d\}
\end{aligned}$$

(on définit de la même manière des éléments $\tilde{Z}_j \in \mathcal{R}$ pour $j \in \{1, \dots, \delta\}$). Choisissons aussi $\tilde{p} = \left(p, p^{1/p}, \dots\right)$ un système compatible de racines p^n-ièmes de p.

Rappelons que le Frobenius absolu est surjectif sur $\bar{R}/p\bar{R}$ (*cf.* [7], Proposition 2.0.1), de sorte que le Frobenius absolu φ est bijectif sur $\mathcal{R}$ et sur l'anneau des vecteurs de Witt $\mathrm{W}(\mathcal{R})$. En particulier, si $\alpha \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$, on pose $\varepsilon^\alpha = \varphi^{-n}(\varepsilon^{p^n\alpha})$ (avec $n \in \mathbb{N}$ tel que $p^n\alpha \in \mathbb{Z}$), et $[\varepsilon]^\alpha = [\varepsilon^\alpha]$ dans $\mathrm{W}(\mathcal{R})$.

On pose

$$\theta\colon\ \mathrm{W}(\mathcal{R}) \to \widehat{\bar{R}}, \quad (a_0, a_1, \dots) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n a_n^{(n)}.$$

C'est un morphisme d'anneaux surjectif dont le noyau est l'idéal engendré par $\xi = [\tilde{p}] - p$ (*cf.* [7], Proposition 5.1.2). On note alors $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(R)$ le séparé complété, pour la topologie p-adique, de l'enveloppe à puissances divisées de $\mathrm{W}(\mathcal{R})$ relativement à l'idéal engendré par $\mathrm{Ker}(\theta)$ (compatibles aux puissances divisées canoniques sur

l'idéal engendré par p). C'est une $\mathrm{W}(k)$-algèbre munie d'un opérateur de Frobenius φ (induit par le Frobenius sur $\mathrm{W}(\mathcal{R})$) et d'une action de $G_{R/S}$. Par ailleurs, on a $t = \log([\varepsilon]) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)!([\varepsilon]-1)^{[n]} \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(\mathcal{O}_K) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(R)$.

Soit ϖ une uniformisante de K. On pose $S_0^{(0)} = \mathrm{W}(k)\{Z_1^{\pm 1}, \dots, Z_\delta^{\pm 1}\}$ et $R_0^{(0)} := S_0^{(0)}\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$. Remarquons que $S_0^{(0)} \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathcal{O}_K \cong S^{(0)}$ et $R_0^{(0)} \widehat{\otimes}_{S_0^{(0)}} S \simeq R^{(0)}$.

Lemme 2. *Il existe une $S_0^{(0)}$-algèbre S_0 munie d'un relèvement $\sigma_{S_0}\colon S_0 \to S_0$ du Frobenius, une $R_0^{(0)}$-algèbre R_0 munie d'un relèvement $\sigma_{R_0}\colon R_0 \to R_0$ du Frobenius, un morphisme de $S_0^{(0)}$-algèbres $S_0 \to R_0$, compatible avec les Frobenius et des isomorphismes $S_0 \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathcal{O}_K \cong S$ (en tant que $S^{(0)}$-algèbres) et $R_0 \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathcal{O}_K \cong R$ (en tant que $S_0 \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathcal{O}_K$-algèbres). En outre, S_0 (resp. R_0) s'obtient à partir de $S_0^{(0)}$ (resp. $R_0^{(0)}$) en itérant un nombre fini de fois les opérations (ét), (loc) et (comp).*

Démonstration. Rappelons que S est le dernier terme d'une suite finie $S^{(0)} \subseteq S^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq S^{(n)} = S$ d'anneaux où $S^{(i+1)}$ est obtenu à partir de $S^{(i)}$ en utilisant une des opérations (ét), (loc), (comp) (rappelées plus haut) pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. On va donc construire, par récurrence sur i, des extensions $S_0^{(0)} \subseteq S_0^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq S_0^{(i)}$ munies de relèvements compatibles de Frobenius et des isomorphismes compatibles $S_0^{(i)} \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathcal{O}_K \cong S^{(i)}$. Pour $i = 0$, on choisit n'importe quel relèvement de Frobenius (on peut prendre par exemple le morphisme défini par le Frobenius sur $\mathrm{W}(k)$ et l'élévation à la puissance p sur les variables $Z_1, \dots, Z_\delta$). Supposons $S_0^{(i)}$ construit. Si $S^{(i)} \subseteq S^{(i+1)}$ est défini par (ét), (loc) ou (comp), alors $S_0^{(i)}/pS_0^{(i)} \cong S^{(i)}/\varpi S^{(i)} \subseteq S^{(i+1)}/\varpi S^{(i+1)}$ est défini par une extension étale, une localisation ou par complétion par rapport à un idéal $\overline{I}^{(i)}$ respectivement. Dans le cas (ét) ou (loc), il existe une et une seule extension $S_0^{(i)} \subseteq S_0^{(i+1)}$ qui est séparée et complète pour la topologie p-adique, sans p-torsion et qui relève $S_0^{(i)}/pS_0^{(i)} \subseteq S^{(i+1)}/\varpi S^{(i+1)}$. Elle est obtenue par une opération de type (ét) ou (loc). Le Frobenius sur $S_0^{(i)}$ s'étend de façon unique à $S_0^{(i+1)}$. Comme $S_0^{(i+1)} \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathcal{O}_K$ est une $S^{(i)}$-algèbre séparée et complète pour la topologie p-adique, sans p-torsion, qui relève $S^{(i+1)}/\varpi S^{(i+1)}$, il existe un unique isomorphisme $S_0^{(i+1)} \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathcal{O}_K \cong S^{(i+1)}$ en tant que $S^{(i)}$-algèbres. Dans le cas (comp), soit $I^{(i)} \subseteq S_0^{(i)}$ l'image inverse de $\overline{I}^{(i)}$ et $S_0^{(i+1)}$ le séparé complété de $S_0^{(i)}$ par rapport à l'idéal $I^{(i)}$. Comme le Frobenius respecte $\overline{I}^{(i)}$, son relèvement à $S_0^{(i)}$ respecte $I^{(i)}$, et le Frobenius sur $S_0^{(i)}$ s'étend à $S_0^{(i+1)}$. Notons que $S_0^{(i+1)} \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathcal{O}_K$ est le séparé complété de $S^{(i)}$ par rapport à l'idéal de $S^{(i)}$ engendré par $I^{(i)}$ et ϖ. Cet idéal relève $\overline{I}^{(i)}$: cette complétion coïncide avec $S^{(i+1)}$ par construction.

On construit R_0 et σ_{R_0} à partir de $S_0\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ et de σ_{S_0} de la même manière, en utilisant le fait que R est obtenu à partir de $S\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\}$ en itérant les opérations (ét), (loc), (comp). $\square$

Dans ce qui suit, on fixe $S_0 \subseteq R_0$ et un relèvement $\sigma : R_0 \to R_0$ du Frobenius comme dans le lemme 2.

L'homomorphisme θ s'étend par R_0-linéarité en $\theta : R_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathcal{R}) \to \widehat{\overline{R}}$. On note alors $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_0)$ le séparé complété, pour la topologie p-adique, de l'enveloppe à puissances divisées de $R_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathcal{R})$ relativement à l'idéal engendré par $\mathrm{Ker}(\theta)$ (compatibles aux puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p). C'est une R_0-algèbre munie d'un opérateur de Frobenius σ-linéaire φ (induit par $\sigma \otimes \varphi$ sur $R_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathcal{R})$) et d'une action de $G_{R/S}$. Par abus, on la notera souvent $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ (et parfois même $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ si le contexte s'y prête) bien que l'anneau $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_0)$ dépende du choix de R_0.

Dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, on dispose des éléments $w_j = Z_j - [\widetilde{Z}_j]$ pour $j \in \{1, \ldots, \delta\}$ et $u_i = T_i - [\widetilde{T}_i]$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$. Parmi les propriétés de $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)$ et de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ qui vont nous servir, citons :

- $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R) = \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)\{\langle w_1, \ldots, w_\delta, u_1, \ldots, u_d\rangle\}$ est le séparé complété, pour la topologie p-adique, de l'anneau des polynômes à puissances divisées en $w_1, \ldots, w_\delta, u_1, \ldots, u_d$ à coefficients dans $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)$ ([7], Proposition 6.1.8) ;
- les anneaux $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ n'ont pas de p-torsion ([7], Propositions 6.1.4 & 6.1.10), ni de t-torsion ([7], Corollaire 6.2.2).

On pose alors $\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R) = \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)[t^{-1}]$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R) = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)[t^{-1}]$, qu'on munit de la topologie de la limite inductive. Bien sûr, on a des constructions analogues avec S (en utilisant S_0), et on a une application naturelle $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S_0) \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R_0)$.

Si $r \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ la r-ième puissance divisée de l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta)$. C'est l'adhérence dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ de l'idéal engendré par les produits

$$\xi^{[n_0]} u_1^{[n_1]} \cdots u_d^{[n_d]} w_1^{[n_{d+1}]} \cdots w_\delta^{[n_{d+\delta}]}$$

pour $\underline{n} = (n_0, \ldots, n_{d+\delta}) \in \mathbb{N}^{d+\delta+1}$ tel que $|\underline{n}| \geq r$. On munit $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)$ de la filtration $\{\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)\}_{r \in \mathbb{Z}}$ définie par $\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R) = \varinjlim_{n \geq |r|} t^{-n} \mathrm{Fil}^{r+n} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ (muni de la topologie de la limite inductive) pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

Dans tout ce qui suit, les anneaux $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ et $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)$ sont munis de la topologie p-adique. En particulier, les groupes de cohomologie galoisienne auxquels on va s'intéresser sont des groupes de cohomologie continue (calculés au moyen des cochaînes continues).

Définition 3. Pour $q \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)\big) := \varinjlim_{n} \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, t^{-n} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)$$

et

$$\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)\big) = \varinjlim_{n \geq |r|} \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, t^{-n} \mathrm{Fil}^{r+n} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big).$$

Remarque 4. *A priori*, il n'y a pas de topologie sur $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)$ telle que la définition qui précède coïncide avec la cohomologie continue de $G_{R/S}$ à valeurs dans $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)$ et $\mathrm{Fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)$. Notons à ce sujet que $t\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ n'est ni ouvert, ni fermé pour la topologie p-adique.

Le but de cet article est de prouver les résultats suivants :

Théorème 5. (1) *Si* $q \in \mathbb{N}_{>0}$, *on a* $\mathrm{H}^q(G_{R/S}, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)) = 0$;

(2) *on a* $\mathrm{H}^0(G_{R/S}, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)) = \left(R_0 \widehat{\otimes}_{S_0} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\right)[t^{-1}]$.

Théorème 6. *Soit* $r \in \mathbb{Z}$.

(1) *Si* $q \in \mathbb{N}_{>0}$, *on a* $\mathrm{H}^q(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)) = 0$;

(2) *on a* $\mathrm{H}^0(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)) = \varinjlim_{n \geq |r|} t^{-n}\left(R_0 \widehat{\otimes}_{S_0} \mathrm{Fil}^{r+n}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\right)$.

On étudie pour cela les groupes $\mathrm{H}^q(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R))$ pour $q \in \mathbb{N}$. Comme $G_{R/S} = G_{R_0/S_0}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ ne dépend que de R_0 et S_0, on peut supposer que $R = R_0$ et $S = S_0$, ce qu'on fait par la suite.

Le théorème 5 est la conjonction des corollaires 24 et 31, et le théorème 6 la conjonction de la proposition 34 et du corollaire 42.

2. Descente presque étale

Dans ce qui suit, si A est une $\mathcal{O}_{K_\infty}$-algèbre, on notera $\mathfrak{m}_A$ l'idéal de A engendré par la famille $\{\varepsilon^{(n)} - 1\}_{n \in \mathbb{N}}$. Remarquons que $\mathfrak{m}_A^2 = \mathfrak{m}_A$. Soit $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{O}_K} := \varprojlim_n \mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_{\bar{K}}$ (où les morphismes de transition sont donnés par le Frobenius). On note $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{O}_K}\right)$ engendré par $\left(\varphi^{-n}([\varepsilon] - 1)\right)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ et par $\left\{[x],\ x \in \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{O}_K},\ x^{(0)} \in \mathfrak{m}_{\widehat{\mathcal{O}}_{\bar{K}}}\right\}$. Rappelons (*cf.* [7], Lemme 6.3.1), que pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on a $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^2 + p^n\,\mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{O}_K}\right)$.

Posons (*cf.* [4], §2.6) $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{R/S} = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}\right)$ avec $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S} = \varprojlim_n \bar{S}R_\infty/p\bar{S}R_\infty$ (où les morphismes de transition sont donnés par le Frobenius). Puisque $\bar{S}R_\infty \subseteq \bar{R}$ est normal d'après la proposition 1, l'application $\bar{S}R_\infty/p\bar{S}R_\infty \to \bar{R}/p\bar{R}$ est injective. En particulier, $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{R/S}$ est un sous-anneau de $\mathrm{W}(\mathcal{R})^{H_{R/S}}$. Comme on a un isomorphisme $\bar{S} \otimes_S R_\infty \cong \bar{S}R_\infty$ (proposition 1), et comme le Frobenius absolu est surjectif sur $\bar{S}/p\bar{S}$ (*cf.* [7], Proposition 2.0.1) et sur R_∞/pR_∞ (*cf.* [1], Corollary 3.7), il en est de même sur $\bar{S}R_\infty/p\bar{S}R_\infty$. En particulier, $\theta\left(\widetilde{\mathbf{A}}^+_{R/S}\right) = \widehat{\bar{S}R_\infty}$. Puisque $\bar{S}R_\infty$ est normal, on déduit comme dans [7], Proposition 5.1.2, que $\mathrm{Ker}(\theta) \cap \widetilde{\mathbf{A}}^+_{R/S}$ est engendré par l'élément $\xi = [\tilde{p}] - p$.

Soit $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)$ (resp. $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)$) le séparé complété, pour la topologie p-adique, de l'enveloppe à puissances divisées de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{R/S}$ (resp. $R_0 \widehat{\otimes}_{\mathrm{W}(k)} \widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{R/S}$) relativement au noyau du morphisme $\theta\colon \widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{R/S} \to \widehat{\overline{S}R_\infty}$ (resp. $\theta\colon R_0 \widehat{\otimes}_{\mathrm{W}(k)} \widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{R/S} \to \widehat{\overline{S}R_\infty}$).

Lemme 7. *Les groupes*

$$\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{W}_n(\mathcal{R})),\ \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R))$$

et

$$\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R))$$

sont tués par $\mathcal{I}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et tout $q \in \mathbb{N}_{>0}$.

Les applications

$$\mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{R/S}\right) \to \mathrm{W}_n(\mathcal{R})^{H_{R/S}},$$
$$\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S) \to \left(\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)\right)^{H_{R/S}}$$

et

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S) \to \left(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\right)^{H_{R/S}}$$

sont injectives de conoyau tué par $\mathcal{I}$.

Enfin,

$$\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S) \cong \mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{R/S}\right)\langle\xi\rangle$$

(l'anneau $\mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{R/S}\right) \otimes_{\mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{R/S}\right)[T]} \mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{R/S}\right)\langle T\rangle$ des polynômes à puissances divisées en ξ, où $\mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{R/S}\right)[T] \to \mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{R/S}\right)$ est le morphisme de $\mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{R/S}\right)$-algèbres envoyant T sur ξ) et

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S) \cong \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)\langle w_1, \dots, w_\delta, u_1, \dots, u_d\rangle$$

(l'anneau des polynômes à puissances divisées en $w_1, \dots, w_\delta, u_1, \dots, u_d$, où $w_j := Z_j - \left[\widetilde{Z}_j\right]$ et $u_i := T_i - \left[\widetilde{T}_i\right]$).

Démonstration. On a des applications

$$a_n\colon\ \mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{R/S}\right)\langle\xi\rangle \to \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)$$

et

$$b_n\colon\ \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)\langle w_1, \dots, w_\delta, u_1, \dots, u_d\rangle \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S).$$

Pour prouver la dernière assertion du lemme il suffit de prouver que ce sont des isomorphismes.

D'après le théorème de pureté de Faltings (R a bonne réduction, *cf.* [9], Section 2, Theorem 4), le groupe $\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \bar{R})$ est presque nul (*i.e.* tué par $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}$) pour tout $q \in \mathbb{N}_{>0}$. Il en est *a fortiori* de même du groupe $\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \bar{R}/p\bar{R})$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on dispose de l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}/\tilde{p}^{p^m}\mathcal{R} &\xrightarrow{\sim} \bar{R}/p\bar{R}, \\ (\ldots, x_m, \ldots, x_1, x_0) &\longmapsto x_m \end{aligned}$$

(*cf.* [7], Proposition 5.1.2). Cet isomorphisme envoie l'image de $\{x \in \mathcal{R},\ x^{(0)} \in \mathfrak{m}_{\widehat{\mathcal{O}}_{\bar{K}}}\}$, *i.e.* l'image de $\mathcal{I}$ (dont l'image modulo p coïncide avec celle de $\{x \in \mathcal{R},\ x^{(0)} \in \mathfrak{m}_{\widehat{\mathcal{O}}_{\bar{K}}}\}$), sur l'image de $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}$. Le groupe $\mathrm{H}^q(H_R, \mathcal{R}/\tilde{p}^{p^n}\mathcal{R})$ est donc tué par $\{x \in \mathcal{R},\ x^{(0)} \in \mathfrak{m}_{\widehat{\mathcal{O}}_{\bar{K}}}\}$.

• Montrons l'assertion sur $\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{W}_n(\mathcal{R}))$. Commençons par traiter le cas $n = 1$. La topologie $\tilde{p}$-adique sur $\mathcal{R}$ n'est autre que la topologie induite par la topologie produit sur $(\bar{R}/p\bar{R})^{\mathbb{N}}$ (où chaque facteur est muni de la topologie discrète), de sorte que $\mathcal{R}$ est séparé et complet pour la topologie $\tilde{p}$-adique. D'après [20], Proposition 2.2, pour tout $q \in \mathbb{N}_{>0}$, on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{R}^1 \varprojlim_m \mathrm{H}^{q-1}\big(H_{R/S}, \mathcal{R}/\tilde{p}^{p^m}\mathcal{R}\big) \\ \to \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathcal{R}) \to \varprojlim_m \mathrm{H}^q\big(H_{R/S}, \mathcal{R}/\tilde{p}^{p^m}\mathcal{R}\big) \to 0 \end{aligned}$$

($\mathcal{R}/\tilde{p}^{p^m}\mathcal{R}$ est muni de la topologie discrète).

D'après ce qui précède, $\mathrm{H}^q\big(H_{R/S}, \mathcal{R}/\tilde{p}^{p^m}\mathcal{R}\big)$ est tué par $\mathcal{I}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, de sorte que $\varprojlim_m \mathrm{H}^q\big(H_{R/S}, \mathcal{R}/\tilde{p}^{p^m}\mathcal{R}\big)$ aussi. De même, le groupe

$$\mathrm{R}^1 \varprojlim_m \mathrm{H}^{q-1}\big(H_{R/S}, \mathcal{R}/\tilde{p}^{p^m}\mathcal{R}\big)$$

est tué par $\mathcal{I}$ si $q > 1$. C'est encore le cas lorsque $q = 1$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{H}^0\big(H_{R/S}, \mathcal{R}/\tilde{p}^{p^m}\mathcal{R}\big) \simeq (\bar{R}/p\bar{R})^{H_{R/S}}$, et les morphismes de transition sont donnés par le Frobenius. On a la suite exacte

$$0 \to \bar{S}R_\infty/p\bar{S}R_\infty \to (\bar{R}/p\bar{R})^{H_{R/S}} \to \mathrm{H}^1(H_{R/S}, \bar{R}).$$

Comme le système projectif $\{\bar{S}R_\infty/p\bar{S}R_\infty\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ a la propriété de Mittag-Leffler, on conclut que $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n \bar{S}R_\infty/p\bar{S}R_\infty = 0$. Comme en outre $\mathrm{H}^1(H_{R/S}, \bar{R})$ est tué par $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}$, cela implique que $\mathrm{R}^1 \varprojlim_m \mathrm{H}^0\big(H_{R/S}, \mathcal{R}/\tilde{p}^{p^m}\mathcal{R}\big)$ est tué par $\mathcal{I}$, ce qu'on voulait. On déduit aussi que le conoyau de l'application injective $\bar{S}R_\infty/p\bar{S}R_\infty \to (\bar{R}/p\bar{R})^{H_{R/S}}$ est tué par $\mathcal{I}$. En prenant la limite projective relativement au Frobenius, on en déduit l'assertion sur les invariants sous $H_{R/S}$.

Si $n \in \mathbb{N}_{>1}$, on a la suite exacte $0 \to \mathrm{W}_{n-1}(\mathcal{R}) \to \mathrm{W}_n(\mathcal{R}) \to \mathcal{R} \to 0$ et une section continue d'ensembles topologiques $\mathcal{R} \to \mathrm{W}_n(\mathcal{R})$ donnée par le Teichmüller. On a donc la suite exacte

$$\cdots \to \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{W}_{n-1}(\mathcal{R})) \to \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{W}_n(\mathcal{R})) \to \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathcal{R}) \to \cdots$$

pour tout $q \in \mathbb{N}$. Par récurrence, on en déduit que $\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{W}_n(\mathcal{R}))$ est tué par $\mathcal{I}^2$ et donc par $\mathcal{I}$ pour $q > 0$ vu que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^2 + p^n\,\mathrm{W}(\mathcal{R})$. Pour $q = 0$, on conclut que l'application $\mathrm{W}_n\left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}\right) \to \mathrm{W}_n(\mathcal{R})^{H_{R/S}}$ est injective de conoyau tué par $\mathcal{I}$.

• Montrons l'assertion sur

$$\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)).$$

Pour alléger les notations, on va noter $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ au lieu de $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$. Là encore, commençons par traiter le cas $n = 1$. Comme on a un isomorphisme $G_{R/S}$-équivariant

$$\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{R}/\tilde{p}^p\mathcal{R}\right)[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots]/(\delta_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$$

de sorte que l'action de $H_{R/S}$ est triviale sur $\delta_0, \ldots, \delta_n, \ldots$ (*cf.* [7], Corollaire 6.1.3), on en déduit que pour tout $q \in \mathbb{N}_{>0}$, le groupe $\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}})$ est tué par $\left\{x \in \mathcal{R},\ x^{(0)} \in \mathfrak{m}_{\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{K}}}\right\}$, c'est-à-dire par $\mathcal{I}$. L'application

$$\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}/\tilde{p}\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S} = \overline{S}R_\infty/p\overline{S}R_\infty \to \overline{R}/p\overline{R} = \mathcal{R}/\tilde{p}\mathcal{R}$$

est injective parce que $\overline{S}R_\infty \subseteq \overline{R}$ est normal. En particulier, puisque $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S} \subseteq \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$ sont sans $\tilde{p}$-torsion, l'application $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S} \to \mathcal{R}/\tilde{p}^p\mathcal{R}$ est injective. L'application

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}\langle\xi\rangle \cong \left(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}\right)&[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots]/(\delta_n^p)_{n\in\mathbb{N}}\\ &\to \left(\mathcal{R}/\tilde{p}^p\mathcal{R}\right)[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots]/(\delta_n^p)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

est donc injective. Cela implique que a_1 est injective, donc un isomorphisme et que l'application $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S) \to \mathrm{H}^0(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}})$ est injective, de conoyau tué par $\mathcal{I}$.

Comme $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ est sans p-torsion ([7], Proposition 6.1.4), pour tout $n \in \mathbb{N}_{>1}$, on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^{n-1}\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} \to 0$$

et donc la suite exacte

$$\begin{aligned}\cdots \to \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}) &\to \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}})\\ &\to \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^{n-1}\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}) \to \cdots.\end{aligned}$$

Si $\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^{n-1}\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}})$ est tué par $\mathcal{I}$ pour $q \in \mathbb{N}_{>0}$, alors

$$\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}})$$

est tué par $\mathcal{I}^2$ et donc par $\mathcal{I}$ vu que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^2 + p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$. Une récurrence immédiate implique donc que $\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}})$ est tué par $\mathcal{I}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et tout $q \in \mathbb{N}_{>0}$, que l'application $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S) \to \mathrm{H}^0(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}})$ est injective, de conoyau tué par $\mathcal{I}$, et que l'application a_n est injective, donc un isomorphisme.

D'après Proposition 6.1.5 dans [7] on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}\langle w_1, \dots, w_\delta, u_1, \dots, u_d\rangle \\
&= \frac{\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}[w_1, \dots, w_\delta, u_1, \dots, u_d][Z_{j,0}, \dots, Z_{j,m}, \dots, T_{i,0}, \dots, T_{i,m}, \dots]}{(w_j^p - pZ_{j,0}, Z_{j,m}^p - pZ_{j,m+1}, u_i^p - pT_{i,0}, T_{i,m}^p - pT_{i,m+1})_{\substack{m\in\mathbb{N}_{>0}\\ 1\le j\le\delta\\ 1\le i\le d}}}.
\end{aligned}$$

En particulier, c'est un $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$-module libre. Comme l'action de $\mathrm{H}_{R/S}$ est triviale sur $w_1, \dots, w_\delta, u_1, \dots, u_d$, on en déduit que $\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}})$ est tué par $\mathcal{I}$ pour $q > 0$ et qu'il contient $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)\langle w_1, \dots, w_\delta, u_1, \dots, u_d\rangle$ pour $q = 0$, le quotient étant tué par $\mathcal{I}$. En particulier, l'application b_n est injective. D'après la proposition 47, la structure de R_0-algèbre sur

$$\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}\langle w_1, \dots, w_\delta, u_1, \dots, u_d\rangle$$

définie dans [7], Proposition 6.1.5, se factorise à travers

$$\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)\langle w_1, \dots, w_\delta, u_1, \dots, u_d\rangle.$$

On en déduit, d'après la propriété universelle de l'enveloppe à puissances divisées $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)$ de $R_0 \otimes_{\mathrm{W}(k)} \widetilde{\mathbf{A}}^+_{R/S}/p^n\widetilde{\mathbf{A}}^+_{R/S}$ relativement à $\mathrm{Ker}(\theta)$, que l'inclusion

$$\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)\langle w_1, \dots, w_\delta, u_1, \dots, u_d\rangle \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)$$

admet un inverse à gauche, et donc qu'elle est bijective. □

Proposition 8. *Pour tout $q \in \mathbb{N}_{>0}$, les groupes*

$$\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)) \quad \textit{et} \quad \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R))$$

sont tués par $\mathcal{I}^2$, en particulier, on a

$$\mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)) = \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)) = 0.$$

On a des inclusions $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S) \subseteq \left(\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)\right)^{H_{R/S}}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S) = \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)^{H_{R/S}}$ dont les conoyaux sont tués par $\mathcal{I}$.

Démonstration. La deuxième assertion résulte du lemme 7. Traitons le cas de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, celui de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(R)$ étant analogue (et plus simple). Comme lors de la preuve précédente, on va noter $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ au lieu de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(R)$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ pour alléger les notations.

D'après [20], Proposition 2.2, pour tout $q \in \mathbb{N}_{>0}$, on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathrm{H}^{q-1}\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \\ &\to \mathrm{H}^q(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^q\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to 0 \end{aligned}$$

($\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est muni de la topologie discrète). D'après le lemme 7, pour tout $q \in \mathbb{N}_{>0}$, le groupe $\varprojlim_n \mathrm{H}^q\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$ est tué par $\mathcal{I}$.

De même, si $q > 1$, le groupe $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathrm{H}^{q-1}\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$ est tué par $\mathcal{I}$. Montrons que c'est aussi le cas lorsque $q = 1$. D'après le lemme 7 on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S) \to \mathrm{H}^0\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to M_n \to 0$$

où M_n est un $\mathrm{W}_n\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{R/S}^+\big)$-module tué par $\mathcal{I}$. On a donc la suite exacte

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S) &\to \mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathrm{H}^0\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \\ &\to \mathrm{R}^1 \varprojlim_n M_n \to 0, \end{aligned}$$

où $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n M_n$ est tué par $\mathcal{I}$. Comme $(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S))_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ a la propriété de Mittag-Leffler, on a $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S) = 0$, de sorte que $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathrm{H}^0\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \cong \mathrm{R}^1 \varprojlim_n M_n$ est tué par $\mathcal{I}$. □

3. Descente de la tour $R_\infty \bar{S}[p^{-1}]/R\bar{S}[p^{-1}]$

Posons $\widetilde{\mathbf{E}}_R^+ = \mathrm{H}^0\big(\mathcal{H}_R, \widetilde{\mathbf{E}}^+\big) = \mathcal{R}^{\mathcal{H}_R}$ où $\mathcal{H}_R = \mathrm{Gal}(\bar{R}[p^{-1}]/R_\infty[p^{-1}])$.

Lemme 9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image du Frobenius sur R_{n+1}/pR_{n+1} est égale à R_n/pR_n.*

Démonstration. Comme on a supposé R défini sur $\mathcal{O}_K = \mathrm{W}(k)$, on déduit de la proposition 1 (2) que $S_n/pS_n \cong (S/pS) \otimes_{k[Z_1,\dots,Z_\delta]} k\big[\varepsilon^{(n)}, Z_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, Z_\delta^{\frac{1}{p^n}}\big]$ et $R_n/pR_n \cong (R/pR) \otimes_{S[T_1,\dots,T_d]} S_n\big[T_1^{\frac{1}{p^n}}, \dots, T_d^{\frac{1}{p^n}}\big]$. En particulier, l'image

du Frobenius sur S_{n+1}/pS_{n+1} (resp. R_{n+1}/pR_{n+1}) est contenue dans S_n/pS_n (resp. R_n/pR_n). On déduit de la preuve de la proposition 1 (2) que l'image du Frobenius sur R_{n+1}/pR_{n+1} est exactement R_n/pR_n. □

On définit alors le sous-anneau $\mathbf{E}_R^+$ de $\widetilde{\mathbf{E}}_R^+$ par $\mathbf{E}_R^+ := \varprojlim_n R_n/pR_n$, où les morphismes de transition sont donnés par restriction du Frobenius de $\overline{R}/p\overline{R}$ à $R_n/pR_n \subset \overline{R}/p\overline{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Rappelons (*cf.* [2], Proposition 4.42 & Remarque 4.43, *cf.* Appendice) qu'on dispose d'un sous-anneau $\mathbf{A}_R^+$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+ = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_R^+\right)$, stable sous l'action de φ et de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$, et caractérisé par les propriétés suivantes :

(1) $[\varepsilon] \in \mathbf{A}_R^+$ et $\left[\widetilde{T}_i\right] \in \mathbf{A}_R^+$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$;

(2) $\mathbf{A}_R^+/p\mathbf{A}_R^+ \simeq \mathbf{E}_R^+$;

(3) $\mathbf{A}_R^+$ est complet pour la topologie faible.

Posons (*cf.* [4], §2.6) $\widetilde{\mathbf{A}}_{R/S}^+ = \mathrm{W}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_{R/S}^+\right)$ avec $\widetilde{\mathbf{E}}_{R/S}^+ = \varprojlim_n \overline{S}R_\infty/p\overline{S}R_\infty$ (où les morphismes de transition sont donnés par le Frobenius).

Notons $\mathbf{A}_{R/S}^+$ (resp. $\mathbf{E}_{R/S}^+$) l'adhérence dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{R/S}^+$ (resp. dans $\widetilde{\mathbf{E}}_{R/S}^+$) du composé $\mathbf{A}_R^+\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{S}}^+$ (resp. $\mathbf{E}_R^+\,\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{S}}^+$) pour la topologie faible.

Lemme 10. *L'anneau $\mathbf{A}_{R/S}^+$ est le séparé complété de $\mathbf{A}_R^+ \otimes_{\mathbf{A}_{\overline{S}}^+} \widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{S}}^+$ pour la topologie définie par les idéaux $\left(p^m, ([\varepsilon]-1)^n\right)_{m,n\in\mathbb{N}_{>0}}$. On a $\mathbf{A}_{R/S}^+/p\mathbf{A}_{R/S}^+ \cong \mathbf{E}_{R/S}^+$, qui est le séparé complété de $\mathbf{E}_R^+ \otimes_{\mathbf{E}_{\overline{S}}^+} \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{S}}^+$ pour la topologie $(\varepsilon-1)$-adique.*

(i) *$\varphi\colon \mathbf{A}_{R/S}^+ \to \mathbf{A}_{R/S}^+$ est libre de rang p^d, de base $\left([\widetilde{T}_1]^{\alpha_1}\cdots[\widetilde{T}_d]^{\alpha_d}\right)_{0\le\alpha_i<p}$.*

(ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathbf{A}_{R/S}^+$-module $\varphi^{-n}\left(\mathbf{A}_{R/S}^+\right) = \mathbf{A}_{R/S}^+\left[[\widetilde{T}_1]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [\widetilde{T}_d]^{\frac{1}{p^n}}\right] \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}_R'^+$ est libre de base*

$$\left([\widetilde{T}_1]^{\frac{\alpha_1}{p^n}}\cdots[\widetilde{T}_d]^{\frac{\alpha_d}{p^n}}\right)_{0\le\alpha_i<p^n}$$

(iii) *L'anneau $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{A}_{R/S}^+\left[[\widetilde{T}_1]^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, [\widetilde{T}_d]^{\frac{1}{p^n}}\right]$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{R/S}^+$ pour la topologie faible.*

En particulier, si on pose $E_n = p^n\left(\mathbb{Z}[p^{-1}] \cap [0,1[\right)^d$, on a

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{R/S}^+/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{R/S}^+ = \overline{\bigoplus_{\underline{\alpha}\in E_n} \left(\varphi^n(\mathbf{A}_{R/S}^+)/p^n\varphi^n(\mathbf{A}_{R/S}^+)\right)\left[\widetilde{T}\right]^{\underline{\alpha}}}$$

(*où la barre désigne le complété pour la topologie faible*).

Démonstration. Comme l'anneau $\overline{S}R_\infty$ est normal (proposition 1), la projection de $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}$ sur le n-ième facteur $\overline{S}R_\infty/p\overline{S}R_\infty$ identifie

$$\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}/\big(\varepsilon^{p^n}-1\big)\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}$$

à $\overline{S}R_\infty/\big(\varepsilon^{(1)}-1\big)\overline{S}R_\infty$. En particulier, on a

$$\mathbf{E}^+_R\otimes_{\mathbf{E}^+_S}\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}}/\big(\varepsilon^{p^n}-1\big)\,\mathbf{E}^+_R\otimes_{\mathbf{E}^+_S}\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}}\cong R_n\otimes_{S_n}\overline{S}/\big(\varepsilon^{(1)}-1\big)R_n\otimes_{S_n}\overline{S}$$

d'après le lemme 9. Notons que $R_n\otimes_{S_n}\overline{S}/\big(\varepsilon^{(1)}-1\big)R_n\otimes_{S_n}\overline{S}$ est un sous-anneau de $\overline{S}R_\infty/\big(\varepsilon^{(1)}-1\big)\overline{S}R_\infty$ par normalité de $R_n\otimes_{S_n}\overline{S}$ (proposition 1). On en déduit que le composé

$$\mathbf{E}^+_R\otimes_{\mathbf{E}^+_S}\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}}/(\varepsilon^{p^n}-1)\,\mathbf{E}^+_R\otimes_{\mathbf{E}^+_S}\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}}\to\mathbf{E}^+_{R/S}/(\varepsilon^{p^n}-1)\,\mathbf{E}^+_{R/S}\to\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}/(\varepsilon^{p^n}-1)\widetilde{\mathbf{E}}^+_{R/S}$$

est injectif et donc que le premier morphisme, étant surjectif, est un isomorphisme. Comme p est un élément régulier de $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{R/S}$, on en déduit par récurrence que pour tout $n,m\in\mathbb{N}_{>0}$, l'application

$$\mathbf{A}^+_R\otimes_{\mathbf{A}^+_S}\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\overline{S}}/\big(p^m,([\varepsilon]-1)^n\big)\mathbf{A}^+_R\otimes_{\mathbf{A}^+_S}\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\overline{S}}\to\widetilde{\mathbf{A}}^+_{R/S}/\big(p^m,([\varepsilon]-1)^n\big)\widetilde{\mathbf{A}}^+_{R/S}$$

est injective, ce qui prouve la première assertion.

Le reste du lemme se prouve modulo p. Il résulte alors de la preuve de [4], Lemma 2.7 (2). □

Notons A_n^∇ (resp. A_n) l'image de $\varphi^n(\mathbf{A}^+_R)\,\mathrm{A}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)$ (resp. $\varphi^n(\mathbf{A}^+_R)\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$) dans $(\mathrm{A}^\nabla_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}^\nabla_{\mathrm{cris}}(R))^{H_{R/S}}$ (resp. $(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R))^{H_{R/S}}$), pour $n\in\mathbb{N}_{>0}$.

Lemme 11. *Pour $i\in\{1,\dots,d\}$, on a $[\varepsilon]^{p^n}=1$ dans A_n et l'élément γ_i agit trivialement sur A_n.*

Démonstration. Comme

$$[\varepsilon]^{p^n}-1=\exp(p^nt)-1=\sum_{r=1}^{\infty}p^{nr}t^{[r]}\in p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$$

l'action de γ_i sur $\varphi^n\big([\widetilde{T}_i]\big)$ est triviale modulo $p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. Il en est donc de même de l'action sur l'image de $\varphi^n(\mathbf{A}^+_{R^{(0)}})$ dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. Notons $f_n^{(0)}$ (resp. f_n) le composé de φ^n avec l'application naturelle $\mathbf{A}^+_{R^{(0)}}\to\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ (resp. $\mathbf{A}^+_R\to\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$). On a alors $f_n^{(0)}=\gamma_i\circ f_n^{(0)}$. Soient $\rho\colon\mathbf{A}^+_R\to R/pR$ le composé $\mathbf{A}^+_R\to\mathbf{E}^+_R\to R/pR$ (projection sur le premier facteur) et ρ_n le composé de ρ avec $R/pR\subset\overline{R}/p\overline{R}$ et la puissance n-ième du Frobenius sur $\overline{R}/p\overline{R}$.

Comme $[\varepsilon]^{p^n} \equiv 1 \bmod p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, le morphisme $f_n^{(0)}$ (respectivement f_n) se factorise par $\bar{I}_n^{(0)} : \mathbf{A}^+_{R^{(0)}}/(p^n, [\varepsilon]-1) \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ (respectivement $\bar{I}_n : \mathbf{A}^+_R/(p^n, [\varepsilon]-1) \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$). De même, le morphisme ρ_n se factorise par $\bar{\rho}_n : \mathbf{A}^+_R/(p^n, [\varepsilon]-1) \to \bar{R}/p\bar{R}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^+_R/(p^n,[\varepsilon]-1) \arrow[r, "\bar{\rho}_n"] \arrow[dr, "\bar{I}_n"] & \bar{R}/p\bar{R} \\
\mathbf{A}^+_{R^{(0)}}/(p^n,[\varepsilon]-1) \arrow[u] \arrow[r, "\bar{I}_n^{(0)}"'] & \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Montrons que le morphisme $\mathbf{A}^+_{R^{(0)}}/(p^n, [\varepsilon]-1) \to \mathbf{A}^+_R/(p^n, [\varepsilon]-1)$ est relativement parfait. D'après le lemme 45, il suffit de montrer que $\mathbf{E}^+_{R^{(0)}}/(\varepsilon-1)\mathbf{E}^+_{R^{(0)}} \to \mathbf{E}^+_R/(\varepsilon-1)\mathbf{E}^+_R$ est relativement parfait et que $\mathbf{A}^+_{R^{(0)}}/(p^n, [\varepsilon]-1) \to \mathbf{A}^+_R/(p^n, [\varepsilon]-1)$ est plat. Le premier point résulte des isomorphismes $\mathbf{E}^+_{R^{(0)}}/(\varepsilon-1)^p\mathbf{E}^+_{R^{(0)}} \simeq (R^{(0)})_1/p(R^{(0)})_1$ et $\mathbf{E}^+_R/(\varepsilon-1)^p\mathbf{E}^+_R \simeq R_1/pR_1$ (*cf.* lemme 9), et du fait que $R^{(0)}/pR^{(0)} \to R/pR$ est relativement parfait (lemme 46), par changement de base (proposition 1). En vertu du critère local de platitude, le deuxième point résulte de la platitude de $\mathbf{E}^+_{R^{(0)}}/(\varepsilon-1)\mathbf{E}^+_{R^{(0)}} \to \mathbf{E}^+_R/(\varepsilon-1)\mathbf{E}^+_R$ (car $(p, [\varepsilon]-1)$ est une suite régulière dans $\mathbf{A}^+_{R^{(0)}}$ et $\mathbf{A}^+_R$), qu'on déduit de celle de $R^{(0)}/pR^{(0)} \to R/pR$ de la même façon qu'on prouve que $\mathbf{E}^+_{R^{(0)}}/(\varepsilon-1)\mathbf{E}^+_{R^{(0)}} \to \mathbf{E}^+_R/(\varepsilon-1)\mathbf{E}^+_R$ est relativement parfait.

Comme la puissance p^n-ième de chaque élément du noyau du morphisme $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \bar{R}/p\bar{R}$ est nulle, la proposition 47 implique qu'il existe un et un seul morphisme de $\mathbf{A}^+_{R^{(0)}}$-algèbres $\mathbf{A}^+_R/(p^n, [\varepsilon]-1) \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ compatible avec $\bar{I}_n^{(0)}$ et dont le composé avec $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \bar{R}/p\bar{R}$ coïncide avec l'application $\bar{\rho}_n$. En particulier, puisque $\bar{\rho}_n = \gamma_i \circ \bar{\rho}_n$ et $\bar{I}_n^{(0)} = \gamma_i \circ \bar{I}_n^{(0)}$, on en déduit que $\bar{I}_n = \gamma_i \circ \bar{I}_n$, de sorte que γ_i agit trivialement sur l'image de $\varphi^n(\mathbf{A}^+_R)\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. □

Posons

$$\mathbf{A}_n = \bigoplus_{\underline{\alpha}\in E_n\cap\mathbb{N}^d} A_n[\tilde{T}]^{\underline{\alpha}} \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_n = \bigoplus_{\substack{\underline{\alpha}\in E_n \\ (\exists i)\ \alpha_i\notin\mathbb{N}}} A_n[\tilde{T}]^{\underline{\alpha}}.$$

Ce sont des sous-$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$-modules de $\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)^{H_{R/S}}$ stables sous l'action de γ_i pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

Proposition 12. *L'application*

$$\mathbf{A}_n\langle u_1, \dots, u_d\rangle \oplus \mathbf{X}_n\langle u_1, \dots, u_d\rangle \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. D'après la description de $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)$ du le lemme 7, on a

$$\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S) \cong \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S) \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{\overline{S}}/p^n\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{S}+}} \widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{R/S}/p^n\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{R/S}.$$

On déduit du lemme 10 que $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{R/S}/(p^n,[\varepsilon]-1)$ est un $\mathbf{A}^{+}_{R/S}/(p^n,[\varepsilon]-1)$-module libre de base $\{[\widetilde{T}]^{\underline{\alpha}}\}_{\underline{\alpha}\in\left(\mathbb{Z}[p^{-1}]\cap[0,1[\right)^d}$ pour tout $n\in\mathbb{N}_{>0}$. Comme φ est un isomorphisme sur $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{R/S}$, on en déduit que $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{R/S}/(p^n,[\varepsilon]^{p^n}-1)$ est un $\varphi^n\left(\mathbf{A}^{+}_{R/S}\right)/(p^n,[\varepsilon]^{p^n}-1)$-module libre de base $\{[\widetilde{T}]^{\underline{\alpha}}\}_{\underline{\alpha}\in E_n}$. Comme $[\varepsilon]^{p^n}\equiv 1 \mod p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ (voir la preuve du lemme 11), on conclut que

$$\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S) \cong \bigoplus_{\underline{\alpha}\in E_n}\left(\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{\overline{S}}}\varphi^n\left(\mathbf{A}^{+}_{R/S}\right)\right)[\widetilde{T}]^{\underline{\alpha}}.$$

En particulier, en regardant la composante correspondant à $\underline{\alpha}=0$, on en déduit que l'application $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{\overline{S}}}\varphi^n\left(\mathbf{A}^{+}_{R/S}\right)\to\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)$ est injective. Par définition et injectivité de

$$\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)\to\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R),$$

son image est A^{∇}_n. D'après le lemme 7 on a

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)\cong\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(R/S)\langle w_1,\dots,w_\delta,u_1,\dots,u_d\rangle$$

et, en prenant le cas $R=S$, on a

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\cong\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)/p^n\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\langle w_1,\dots,w_\delta\rangle.$$

En particulier, on a $A_n\cong A^{\nabla}_n\langle w_1,\dots,w_\delta\rangle$, ce qui prouve la proposition. □

Dans une première version de ce travail, on avait prouvé que le noyau et le conoyau du morphisme précédent sont tués par $\mathcal{I}$. Les auteurs remercient le rapporteur pour avoir suggéré la proposition adoptée ici. Dans ce qui suit, nous allons prouver que

$$\begin{cases}\mathrm{H}^q\left(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathbf{X}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle\right)\text{ est tué par }\left(1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\right)^2\text{ si }q\in\mathbb{N}\ \text{(proposition 16)},\\ \mathrm{H}^q\left(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathbf{A}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle\right)\text{ est tué par }(1-[\varepsilon])^d\text{ si }q>0\text{ (proposition 21)}.\end{cases}$$

Contrôle de la cohomologie de $\mathbf{X}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle$

Lemme 13. *Soient $\alpha,\alpha'\in\mathbb{N}$, alors $1-[\varepsilon]^{\alpha}$ divise $1-[\varepsilon]^{\alpha'}$ dans $\mathbf{A}^{+}_{\mathcal{O}_K}$ si et seulement si $v_p(\alpha)\le v_p(\alpha')$.*

Démonstration. Posons $u_\alpha = 1 + [\varepsilon]^{\frac{1}{p}} + \cdots + [\varepsilon]^{\frac{\alpha-1}{p}} \in W[\![[\varepsilon]^{\frac{1}{p}} - 1]\!]$. Si $(1-[\varepsilon]^\alpha) \mid (1-[\varepsilon]^{\alpha'})$, on a $u_\alpha \mid u_{\alpha'}$. Comme l'image de u_α par le morphisme $W[\![[\varepsilon]^{\frac{1}{p}} - 1]\!] \to W; [\varepsilon]^{\frac{1}{p}} \mapsto 1$ vaut α, on a $\alpha \mid \alpha'$ dans W, et donc $v_p(\alpha) \leq v_p(\alpha')$. La réciproque est évidente. □

Rappelons (*cf.* [12], 5.1.1) que $1 - [\varepsilon] = \big(1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)\tilde{\xi}$ où $\tilde{\xi} \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ est un générateur de $\mathrm{Ker}(\theta)$.

Lemme 14. *Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $N \in \mathbb{N}$, on a*

$$(\gamma_i - 1)\big(u_i^{[N]}\big) \in (1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}) \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) u_i^{[m]}.$$

Démonstration. On a

$$\gamma_i(u_i) = \gamma_i\big(T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{T}_i]\big) = T_i \otimes 1 - 1 \otimes [\varepsilon][\widetilde{T}_i] = u_i + (1 - [\varepsilon])[\widetilde{T}_i].$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\gamma_i\big(u_i^{[N]}\big) &= \big(u_i + (1 - [\varepsilon])[\widetilde{T}_i]\big)^{[N]} \\
&= \sum_{m=0}^{N} \big((1 - [\varepsilon])[\widetilde{T}_i]\big)^{[m]} u_i^{[N-m]} \\
&= u_i^{[N]} + \sum_{m=1}^{N} (1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}})^m [\widetilde{T}_i]^m \tilde{\xi}^{[m]} u_i^{[N-m]}
\end{aligned}$$

et donc

$$(\gamma_i - 1)\big(u_i^{[N]}\big) \in \big(1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big) \sum_{m=0}^{N-1} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) u_i^{[m]}.$$ □

Lemme 15. *Soit X un sous-$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$-module de $\mathbf{X}_n$ stable sous l'action de γ_i.*

(1) *Lorsque* $\mathrm{Coker}\big(\gamma_i - 1 \colon X \to X\big)$ *est tué par* $1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}$, *il en est de même de* $\mathrm{Coker}\big(\gamma_i - 1 \colon X\langle u_i\rangle \to X\langle u_i\rangle\big)$.

(2) *Lorsque* $\mathrm{Ker}\big(\gamma_i - 1 \colon X \to X\big)$ *est tué par* $1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}$, *il en est de même de* $\mathrm{Ker}\big(\gamma_i - 1 \colon X\langle u_i\rangle \to X\langle u_i\rangle\big)$.

Démonstration. (1) Soit $b = \sum_{m=0}^{N} b_m u_i^{[m]} \in X\langle u_i\rangle$. Supposons $N > 0$. Comme $\mathrm{Coker}\big(\gamma_i - 1 \colon X \to X\big)$ est tué par $1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}$, il existe $a_N \in X$ tel que $(\gamma_i - 1)(a_N) = \big(1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big) b_N$. On a alors

$$(\gamma_i - 1)\big(a_N u_i^{[N]}\big) = \gamma_i(a_N)(\gamma_i - 1)\big(u_i^{[N]}\big) + (\gamma_i - 1)(a_N) u_i^{[N]}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\big(1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)b-(\gamma_i-1)\big(a_N u_i^{[N]}\big)\\
&\quad=-\gamma_i(a_N)(\gamma_i-1)\big(u_i^{[N]}\big)+\big(1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)\sum_{m=0}^{N-1} b_m u_i^{[m]}\\
&\quad\in\big(1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)\sum_{m=0}^{N-1} X u_i^{[m]}\quad (\textit{cf.}\ \text{lemme 14}).
\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate montre donc que $\big(1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)X\langle u_i\rangle\subseteq \mathrm{Im}(\gamma_i-1)$.

(2) Soit $b=\sum_{m=0}^{N} b_m u_i^{[m]}\in X\langle u_i\rangle$. On a

$$(\gamma_i-1)(b)=\sum_{m=0}^{N}\big(\gamma_i(b_m)(\gamma_i-1)\big(u_i^{[m]}\big)+(\gamma_i-1)(b_m)u_i^{[m]}\big). \qquad (*)$$

D'après le lemme 14, le coefficient de $u_i^{[N]}$ dans $(*)$ vaut $(\gamma_i-1)(b_N)$: il est donc nul si $(\gamma_i-1)(b)=0$. Comme $\mathrm{Ker}\big(\gamma_i-1\colon X\to X\big)$ est tué par $1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}$, on a donc $\big(1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)b_N=0$. Comme

$$(\gamma_i-1)\big(u_i^{[N]}\big)\in(1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}})\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)u_i^{[m]}$$

d'après le lemme 14, il en résulte que $\gamma_i(b_N)(\gamma_i-1)\big(u_i^{[N]}\big)=0$, et donc que $(\gamma_i-1)(b')=0$ avec $b'=\sum_{m=0}^{N-1} b_m u_i^{[m]}$. Une récurrence immédiate montre donc que $\big(1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)b_m=0$ pour tout $m\in\{0,\dots,N\}$. □

Proposition 16. *Si $q\in\mathbb{N}$, le module $\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathbf{X}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle\big)$ est tué par $\big(1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)^2$.*

Démonstration. Pour $i\in\{1,\dots,d\}$, posons

$$\mathbf{X}_n^{(i)}=\bigoplus_{\substack{\underline{\alpha}\in E_n\\ \alpha_1,\dots,\alpha_{i-1}\in\mathbb{N}\\ \alpha_i\notin\mathbb{N}}} A_n\big[\widetilde{T}\big]^{\underline{\alpha}}.$$

C'est un sous A_n-module de $\mathbf{X}_n$ stable par γ_i et on a

$$\mathbf{X}_n=\mathbf{X}_n^{(1)}\oplus\mathbf{X}_n^{(2)}\oplus\cdots\oplus\mathbf{X}_n^{(d)}.$$

Si $\underline{\alpha} \in E_n$ est tel que $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{N}$ et $\alpha_i \notin \mathbb{N}$, on a $(\gamma_i - 1)\big([\widetilde{T}]^{\underline{\alpha}}\big) = \big([\varepsilon]^{\alpha_i} - 1\big)[\widetilde{T}]^{\underline{\alpha}}$. Comme $\alpha_i \notin \mathbb{N}$, on a $\alpha_i \in (\mathbb{Z}[p^{-1}] \cap [0, p^n[) \setminus \mathbb{N}$ donc $v_p(\alpha_i) \leq -1$, et $1 - [\varepsilon]^{\alpha_i}$ divise $1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ (lemme 13). Ainsi

$$\big(1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)[\widetilde{T}]^{\underline{\alpha}} \in (\gamma_i - 1)\big(\mathbf{X}_n^{(i)}\big)$$

i.e. Coker $\big(\gamma_i - 1 \colon \mathbf{X}_n^{(i)} \to \mathbf{X}_n^{(i)}\big)$ est tué par $1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}$. Par ailleurs, si

$$x = \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in E_n \\ \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{N} \\ \alpha_i \notin \mathbb{N}}} x_{\underline{\alpha}}[\widetilde{T}]^{\underline{\alpha}} \in \mathbf{X}_n^{(i)},$$

on a

$$(\gamma_i - 1)(x) = \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in E_n \\ \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{N} \\ \alpha_i \notin \mathbb{N}}} \big([\varepsilon]^{\alpha_i} - 1\big) x_{\underline{\alpha}}[\widetilde{T}]^{\underline{\alpha}};$$

si $(\gamma_i - 1)(x) = 0$, on a $\big(1 - [\varepsilon]^{\alpha_i}\big)x_{\underline{\alpha}} = 0$ et *a fortiori* $\big(1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)x_{\underline{\alpha}} = 0$ pour tout $\underline{\alpha} \in E_n$ tel que $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{N}$ et $\alpha_i \notin \mathbb{N}$. Cela signifie donc que Ker $\big(\gamma_i - 1 \colon \mathbf{X}_n^{(i)} \to \mathbf{X}_n^{(i)}\big)$ est tué par $1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}$.

D'après le lemme 15, les modules

$$\mathrm{Coker}\,\big(\gamma_i - 1 \colon \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_i \rangle \to \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_i \rangle\big)$$

et

$$\mathrm{Ker}\,\big(\gamma_i - 1 \colon \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_i \rangle \to \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_i \rangle\big)$$

sont eux aussi tués $1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}$. Comme γ_i agit trivialement sur $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_d$, il en est de même de

$$\mathrm{Coker}\,\big(\gamma_i - 1 \colon \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_1, \dots, u_d \rangle \to \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_1, \dots, u_d \rangle\big)$$

et

$$\mathrm{Ker}\,\big(\gamma_i - 1 \colon \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_1, \dots, u_d \rangle \to \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_1, \dots, u_d \rangle\big).$$

La suite spectrale de Hochschild–Serre pour la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}_p\,\gamma_i \to \widetilde{\Gamma}_{R/S} \to \widetilde{\Gamma}_{R/S}/\,\mathbb{Z}_p\,\gamma_i \to 0$$

appliquée à $\mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_1, \dots, u_d \rangle$ s'écrit

$$\mathrm{H}^r\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}/\,\mathbb{Z}_p\,\gamma_i, \mathrm{H}^s\big(\mathbb{Z}_p\,\gamma_i, \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_1, \dots, u_d \rangle\big)\big) \Rightarrow \mathrm{H}^{r+s}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_1, \dots, u_d \rangle\big).$$

Comme $\mathrm{H}^s\big(\mathbb{Z}_p\,\gamma_i, \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_1, \dots, u_d \rangle\big)$ est nul pour $s > 1$ et tué par $1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}$ pour $s \in \{0, 1\}$, l'aboutissement $\mathrm{H}^{r+s}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathbf{X}_n^{(i)}\langle u_1, \dots, u_d \rangle\big)$ est tué par $\big(1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)^2$. $\square$

Contrôle de la cohomologie de $\mathrm{A}_n\langle u_1, \dots, u_d\rangle$

Lemme 17. *On a* $([\varepsilon]-1)^{p-1} \in p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$.

Démonstration. On a $(X-1)^p \equiv X^p - 1 \mod p\,\mathbb{Z}[X]$ et donc $(X-1)^{p-1} \equiv 1 + X + \cdots + X^{p-1} \mod p\,\mathbb{Z}[X]$. En particulier, on a

$$\left([\varepsilon]^{\frac{1}{p}} - 1\right)^{p-1} \equiv 1 + [\varepsilon]^{\frac{1}{p}} + \cdots + [\varepsilon]^{\frac{p-1}{p}} \mod p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K).$$

On a donc

$$\begin{aligned}([\varepsilon]-1)^{p-1} &= \left(1 + [\varepsilon]^{\frac{1}{p}} + \cdots + [\varepsilon]^{\frac{p-1}{p}}\right)^{p-1}\left([\varepsilon]^{\frac{1}{p}} - 1\right)^{p-1}\\ &\equiv \left(1 + [\varepsilon]^{\frac{1}{p}} + \cdots + [\varepsilon]^{\frac{p-1}{p}}\right)^{p} \mod p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)\\ &\equiv 0 \mod p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)\end{aligned}$$

vu que $1 + [\varepsilon]^{\frac{1}{p}} + \cdots + [\varepsilon]^{\frac{p-1}{p}} \in \operatorname{Ker}\left(\theta\colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) \to \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{K}}\right)$ a des puissances divisées. □

Lemme 18. *Pour* $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, *on a*

$$(1-[\varepsilon])^{[j]} = (1-[\varepsilon])\beta_j$$

avec $\beta_j \in \operatorname{Ker}\left(\theta\colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) \to \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{K}}\right)$.

Démonstration. Si $p \nmid j$, on a $\beta_j = \frac{1}{j}(1-[\varepsilon])^{[j-1]} \in \operatorname{Ker}\left(\theta\colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) \to \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{K}}\right)$. Si $j = pm$, on a

$$(1-[\varepsilon])^{[j]} = \frac{(1-[\varepsilon])^{pm}}{(pm)!} = \frac{m!\,p^m}{(pm)!}\frac{(1-[\varepsilon])^{(p-1)m}}{p^m}\frac{(1-[\varepsilon])^m}{m!}.$$

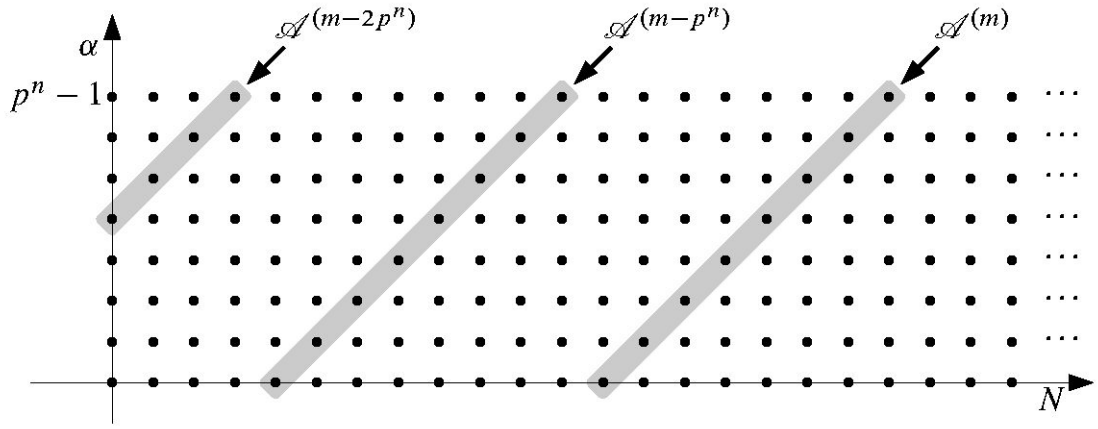
On a $v_p\left(\frac{m!\,p^m}{(pm)!}\right) = \frac{m-s(m)}{p-1} + m - \frac{pm-s(m)}{p-1}$ (où $s(m) = s(pm)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de m et de pm en base p), et donc $v_p\left(\frac{m!\,p^m}{(pm)!}\right) = 0$: l'élément $\frac{m!\,p^m}{(pm)!}$ est une unité p-adique. En outre, on a $\frac{(1-[\varepsilon])^{(p-1)m}}{p^m} = \left(\frac{(1-[\varepsilon])^{p-1}}{p}\right)^m \in \operatorname{Ker}\left(\theta\colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) \to \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{K}}\right)$ (*cf.* lemme 17). On conclut grâce à une récurrence sur $m \geq 1$. □

Soient $i \in \{1, \dots, d\}$ et $\mathscr{A}$ une sous-A_n-algèbre de $\left(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\right)^{H_{R/S}}$ fixe sous γ_i. Pour $m > -p^n$, notons $\mathscr{A}^{(m)}$ le sous-$\mathscr{A}$-module de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ engendré par $\left\{v_\alpha^{(m)}\right\}_{\max(0,-m)\leq\alpha<p^n}$ où $v_\alpha^{(m)} = \frac{u_i^{[m+\alpha]}}{[\widetilde{T}_i]^\alpha}$ pour $0 \leq \alpha \leq p^n$. Remarquons que $v_{p^n}^{(m)} = \frac{v_0^{(m+p^n)}}{[\widetilde{T}_i]^{p^n}}$, de sorte que $\left\{v_\alpha^{(m)}\right\}_{\substack{m>-p^n\\ 0\leq\alpha<p^n\\ m+\alpha\geq 0}}$ engendre la sous-$\mathscr{A}$-algèbre

$\mathscr{A}[[\widetilde{T}_i]]\langle u_i\rangle$ de $(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R))^{H_{R/S}}$ engendrée par $[\widetilde{T}_i]$ et $\{u_i^{[m]}\}_{m\in\mathbb{N}}$. Remarquons qu'en général, cette dernière n'est pas isomorphe à l'anneau des polynômes à puissances divisées en u_i à coefficients dans $\mathscr{A}[[\widetilde{T}_i]]$ (car on peut avoir $\mathrm{Ker}([\varepsilon]-1\colon A_n\to A_n)u_i\subseteq\mathscr{A}$). On a

$$\mathscr{A}[[\widetilde{T}_i]]\langle u_i\rangle=\sum_{\substack{m>-p^n\\ \max\{-m,0\}\le\alpha<p^n}}\mathscr{A}\,v_\alpha^{(m)}=\sum_{m>-p^n}\mathscr{A}^{(m)}$$

et donc la situation suivante :



où le point de coordonnées (N,α) représente le sous-$\mathscr{A}$-module de $\mathscr{A}[[\widetilde{T}_i]]\langle u_i\rangle$ engendré par $v_\alpha^{(N-\alpha)}$.

Soit $0\le\alpha\le p^n$ tel que $m+\alpha\ge 0$. On a

$$\begin{aligned}
&[\varepsilon]^\alpha(\gamma_i-1)\left(\frac{u_i^{[m+\alpha]}}{[\widetilde{T}_i]^\alpha}\right)\\
&\quad=\frac{\Big(u_i+(1-[\varepsilon])[\widetilde{T}_i]\Big)^{[m+\alpha]}}{[\widetilde{T}_i]^\alpha}-[\varepsilon]^\alpha\frac{u_i^{[m+\alpha]}}{[\widetilde{T}_i]^\alpha}\\
&\quad=\big(1-[\varepsilon]^\alpha\big)\frac{u_i^{[m+\alpha]}}{[\widetilde{T}_i]^\alpha}+(1-[\varepsilon])\frac{u_i^{[m+\alpha-1]}}{[\widetilde{T}_i]^{\alpha-1}}+(1-[\varepsilon])^{[2]}\frac{u_i^{[m+\alpha-2]}}{[\widetilde{T}_i]^{\alpha-2}}+\cdots\\
&\qquad\cdots+(1-[\varepsilon])^{[m+\alpha-1]}\frac{u_i}{[\widetilde{T}_i]^{1-m}}+(1-[\varepsilon])^{[m+\alpha]}\frac{1}{[\widetilde{T}_i]^{-m}}.
\end{aligned}$$

(I) Si $\max\{0,-m\}\le\alpha<p^n$, on a donc

$$
\begin{aligned}
&[\varepsilon]^{\alpha}(\gamma_i - 1)(v_{\alpha}^{(m)}) \\
&= \underbrace{\big(1-[\varepsilon]^{\alpha}\big)v_{\alpha}^{(m)} + (1-[\varepsilon])v_{\alpha-1}^{(m)} + (1-[\varepsilon])^{[2]}v_{\alpha-2}^{(m)} + \cdots + (1-[\varepsilon])^{[\alpha]}v_0^{(m)}}_{\in \mathscr{A}^{(m)}} \\
&\quad + \underbrace{\big[\widetilde{T}_i\big]^{p^n}(1-[\varepsilon])^{[\alpha+1]}v_{p^n-1}^{(m-p^n)} + \cdots + \big[\widetilde{T}_i\big]^{p^n}(1-[\varepsilon])^{[\alpha+p^n]}v_0^{(m-p^n)}}_{\in \mathscr{A}^{(m-p^n)}} \\
&\quad + \underbrace{\big[\widetilde{T}_i\big]^{2p^n}(1-[\varepsilon])^{[\alpha+p^n+1]}v_{p^n-1}^{(m-2p^n)} + \cdots + \big[\widetilde{T}_i\big]^{2p^n}(1-[\varepsilon])^{[\alpha+2p^n]}v_0^{(m-2p^n)}}_{\in \mathscr{A}^{(m-2p^n)}} + \cdots .
\end{aligned}
$$

(II) Si $\alpha = p^n$, on a $[\varepsilon]^{p^n} = 1$ (lemme 11) et donc

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_i - 1)(v_{p^n}^{(m)}) \\
&= \underbrace{(1-[\varepsilon])v_{p^n-1}^{(m)} + (1-[\varepsilon])^{[2]}v_{p^n-2}^{(m)} + \cdots + (1-[\varepsilon])^{[p^n]}v_0^{(m)}}_{\in \mathscr{A}^{(m)}} \\
&\quad + \underbrace{\big[\widetilde{T}_i\big]^{p^n}(1-[\varepsilon])^{[p^n+1]}v_{p^n-1}^{(m-p^n)} + \cdots + \big[\widetilde{T}_i\big]^{p^n}(1-[\varepsilon])^{[2p^n]}v_0^{(m-p^n)}}_{\in \mathscr{A}^{(m-p^n)}} \\
&\quad + \underbrace{\big[\widetilde{T}_i\big]^{2p^n}(1-[\varepsilon])^{[2p^n+1]}v_{p^n-1}^{(m-2p^n)} + \cdots + \big[\widetilde{T}_i\big]^{2p^n}(1-[\varepsilon])^{[3p^n]}v_0^{(m-2p^n)}}_{\in \mathscr{A}^{(m-2p^n)}} + \cdots .
\end{aligned}
$$

Rappelons (lemme 18), que si $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on a $(1-[\varepsilon])^{[j]} = (1-[\varepsilon])\beta_j$ avec $\beta_j \in \operatorname{Ker}\big(\theta\colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) \to \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{K}}\big)$. Posons $D = \min\{p^n, p^n + m\}$ et

$$
M_n^{(m)} = \begin{pmatrix}
1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{D-2} & \beta_{D-1} & \beta_D \\
a_1 & 1 & \beta_2 & \ddots & \ddots & \beta_{D-2} & \beta_{D-1} \\
0 & a_2 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{D-2} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \beta_2 & \beta_3 \\
\vdots & & & \ddots & a_{D-2} & 1 & \beta_2 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{D-1} & 1
\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_D\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)\big)
$$

où on a posé $a_j = \frac{1-[\varepsilon]^{p^n-j}}{1-[\varepsilon]} \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$ pour $j \in \{1, \ldots, p^n - 1\}$.

Lemme 19. *L'image de la matrice $M_n^{(m)}$ dans $\mathsf{M}_D\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)\big)$ est inversible.*

Démonstration. Montrons que son déterminant est inversible. Comme les éléments de

$$
\operatorname{Ker}\big(\theta\colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}\big)
$$

ont des puissances divisées, ils sont nilpotents : il suffit de voir que le déterminant de l'image de $M_n^{(m)}$ dans $\mathsf{M}_D\left(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}}\right)$ est inversible. Mais cette image est unipotente (l'image des β_j est nulle). □

Proposition 20. *Le conoyau de $\gamma_i - 1$ sur $\mathscr{A}\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle$ est tué par $1-[\varepsilon]$.*

Démonstration. On a

$$\mathscr{A}\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle = \sum_{m>-p^n} \mathscr{A}^{(m)}.$$

Montrons par récurrence sur $m > -p^n$ que $(1-[\varepsilon])\mathscr{A}^{(m)} \subseteq (\gamma_i - 1)\big(\mathscr{A}\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle\big)$.

Pour $m = -p^n + 1$, on a $\mathscr{A}^{(m)} = \mathscr{A}\, v_{p^n-1}^{(-p^n+1)}$ et

$$(\gamma_i - 1)\left(\frac{u_i}{[\widetilde{T}_i]^{p^n}}\right) = \frac{1-[\varepsilon]}{[\widetilde{T}_i]^{p^n-1}} = (1-[\varepsilon])v_{p^n-1}^{(-p^n+1)}.$$

Supposons $m > -p^n + 1$. Par hypothèse de récurrence, pour $r \in \mathbb{N}_{>0}$, les éléments de $(1-[\varepsilon])\mathscr{A}^{(m-rp^n)}$ sont dans l'image de $\gamma_i - 1$ sur $\mathscr{A}\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle$: comme $(1-[\varepsilon])^{[j]} \in (1-[\varepsilon])\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$ (*cf.* lemme 18), les identités (I) et (II) impliquent les congruences modulo $\sum_{r\in\mathbb{N}_{>0}}(1-[\varepsilon])\mathscr{A}^{(m-rp^n)}$ suivantes :

$$\begin{aligned}
&(\gamma_i - 1)([\varepsilon]^\alpha v_\alpha^{(m)})\\
&\quad\equiv \big(1-[\varepsilon]^\alpha\big)v_\alpha^{(m)} + (1-[\varepsilon])v_{\alpha-1}^{(m)} + (1-[\varepsilon])^{[2]}v_{\alpha-2}^{(m)} + \cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots + (1-[\varepsilon])^{[\alpha-p^n+D]}v_{p^n-D}^{(m)}\\
&\quad\equiv (1-[\varepsilon])\big(a_{p^n-\alpha}v_\alpha^{(m)} + v_{\alpha-1}^{(m)} + \beta_2 v_{\alpha-2}^{(m)} + \cdots + \beta_{\alpha-p^n+D}v_{p^n-D}^{(m)}\big)
\end{aligned}$$

pour $\max\{1,-m\} \le \alpha < p^n$, et

$$\begin{aligned}
&(\gamma_i - 1)(v_{p^n}^{(m)})\\
&\quad\equiv (1-[\varepsilon])v_{p^n-1}^{(m)} + (1-[\varepsilon])^{[2]}v_{p^n-2}^{(m)} + \cdots + (1-[\varepsilon])^{[D]}v_{p^n-D}^{(m)}\\
&\quad\equiv (1-[\varepsilon])\big(v_{p^n-1}^{(m)} + \beta_2 v_{p^n-2}^{(m)} + \cdots + \beta_D v_{p^n-D}^{(m)}\big).
\end{aligned}$$

On a donc $M_n^{(m)}V_n^{(m)} \equiv (\gamma_i - 1)(W_n^{(m)})$ où $M_n^{(m)}$ est la matrice introduite plus haut

$$V_n^{(m)} = \big((1-[\varepsilon])v_{p^n-1}^{(m)}, (1-[\varepsilon])v_{p^n-2}^{(m)}, \ldots, (1-[\varepsilon])v_{p^n-D}^{(m)}\big)$$

et $W_n^{(m)}$ est un vecteur à coefficients dans $\mathscr{A}\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle$. Comme l'image de la matrice $M_n^{(m)}$ est inversible dans $\mathsf{M}_D\left(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)\right)$ (lemme 19), le vecteur $V_n^{(m)}$ est à coefficients dans $(\gamma_i - 1)\big(\mathscr{A}\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle\big)$, et donc $(1-[\varepsilon])\mathscr{A}^{(m)} \subseteq (\gamma_i - 1)\big(\mathscr{A}\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle\big)$. □

Proposition 21. *Si $q > 0$, le module $\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathbf{A}_n\langle u_1, \dots, u_d\rangle\big)$ est tué par $(1-[\varepsilon])^d$.*

Démonstration. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, posons

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_i &= \big(\mathbf{A}_n\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_d\rangle\big)^{\mathbb{Z}_p\gamma_i \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_d}\\ &= \big(\mathbf{A}_n^{\gamma_i}\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_d\rangle\big)^{\mathbb{Z}_p\gamma_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_d}.\end{aligned}$$

C'est une sous-A_n-algèbre de $\mathbf{A}_n\langle u_1, \dots, u_d\rangle$ sur laquelle γ_i agit trivialement.

Soit $\mathbf{A}_n^{(i)} = A_n\big[[\widetilde{T}_j]\big]_{\substack{1\le j\le d\\ j\ne i}} \subseteq \mathbf{A}_n^{\gamma_i}$. On a $\mathbf{A}_n = \bigoplus_{\alpha=0}^{p^n-1} \mathbf{A}_n^{(i)}[\widetilde{T}_i]^\alpha$, d'où

$$\begin{aligned}&\big(\mathbf{A}_n\langle u_1, \dots, u_d\rangle\big)^{\mathbb{Z}_p\gamma_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_d}\\ &\quad= \big(\mathbf{A}_n\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_d\rangle\big)^{\mathbb{Z}_p\gamma_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_d}\langle u_i\rangle\\ &\quad= \bigoplus_{\alpha=0}^{p^n-1} \big(\mathbf{A}_n^{(i)}\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_d\rangle\big)^{\mathbb{Z}_p\gamma_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_d}[\widetilde{T}_i]^\alpha\end{aligned}$$

et donc

$$\big(\mathbf{A}_n\langle u_1, \dots, u_d\rangle\big)^{\mathbb{Z}_p\gamma_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_d} = \mathscr{A}_i\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle$$

pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. En particulier, si $i > 1$, on a

$$\big(\mathscr{A}_i\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle\big)^{\gamma_i} = \mathscr{A}_{i-1}\big[[\widetilde{T}_{i-1}]\big]\langle u_{i-1}\rangle.$$

Montrons que si $q > 0$, alors $\mathrm{H}^q\big(\mathbb{Z}_p\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_i, \mathscr{A}_i\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle\big)$ est tué par $(1-[\varepsilon])^i$ par récurrence sur $i \in \{1, \dots, d\}$. Pour $i = 1$, le module

$$\mathrm{H}^1\big(\mathbb{Z}_p\gamma_1, \mathscr{A}_1\big[[\widetilde{T}_1]\big]\langle u_1\rangle\big) = \mathrm{Coker}\,\big(\gamma_1 - 1\colon \mathscr{A}_1\big[[\widetilde{T}_1]\big]\langle u_1\rangle \to \mathscr{A}_1\big[[\widetilde{T}_1]\big]\langle u_1\rangle\big)$$

est tué par $1-[\varepsilon]$ (proposition 20), et $\mathrm{H}^q\big(\mathbb{Z}_p\gamma_1, \mathscr{A}_1\big[[\widetilde{T}_1]\big]\langle u_1\rangle\big) = 0$ si $q > 1$.

Supposons $i > 1$. La suite spectrale de Hochschild–Serre pour la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}_p\gamma_i \to \mathbb{Z}_p\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_i \to \mathbb{Z}_p\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_{i-1} \to 0$$

sur $\mathscr{A}_i\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle$ s'écrit

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}^r\big(\mathbb{Z}_p\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_{i-1}, \mathrm{H}^s\big(\mathbb{Z}_p\gamma_i, \mathscr{A}_i\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle\big)\big)\\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \mathrm{H}^{r+s}\big(\mathbb{Z}_p\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_i, \mathscr{A}_i\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle\big).\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{H}^s\big(\mathbb{Z}_p\gamma_i, \mathscr{A}_i\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle\big)$ est nul si $s > 1$, tué par $(1-[\varepsilon])$ si $s = 1$ (proposition 20), et vaut $\big(\mathscr{A}_i\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle\big)^{\gamma_i} = \mathscr{A}_{i-1}\big[[\widetilde{T}_{i-1}]\big]\langle u_{i-1}\rangle$ si $s = 0$. Donc, si $r+s > 0$, le module $\mathrm{H}^r\big(\mathbb{Z}_p\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_{i-1}, \mathrm{H}^s\big(\mathbb{Z}_p\gamma_i, \mathscr{A}_i\big[[\widetilde{T}_i]\big]\langle u_i\rangle\big)\big)$ est nul si $s > 1$, est tué par $1-[\varepsilon]$ si $s = 1$, et vaut $\mathrm{H}^r\big(\mathbb{Z}_p\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p\gamma_{i-1}, \mathscr{A}_{i-1}\big[[\widetilde{T}_{i-1}]\big]\langle u_{i-1}\rangle\big)$,

qui est tué par $(1-[\varepsilon])^{i-1}$ par hypothèse de récurrence si $s=0$ (car alors $r>0$). Il en résulte que l'aboutissement $\mathrm{H}^{r+s}\big(\mathbb{Z}_p\,\gamma_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_p\,\gamma_i,\mathscr{A}_i\big[\big[\widetilde{T}_i\big]\big]\langle u_i\rangle\big)$ est tué par $(1-[\varepsilon])^i$.

Finalement, comme $\mathbf{A}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle=\mathscr{A}_d\big[\big[\widetilde{T}_d\big]\big]\langle u_d\rangle$, le module

$$\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathbf{A}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle\big)$$

est tué par $(1-[\varepsilon])^d$. □

Proposition 22. *Si $q>0$, le module $\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)^{H_{R/S}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)^{H_{R/S}}\big)$ est tué par $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$. Il est nul si $q>d$.*

Démonstration. Pour alléger les notations, on écrira $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ au lieu de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$. D'après les propositions 16 et 21, les modules

$$\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathbf{X}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle\big)\quad\text{et}\quad\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathbf{A}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle\big)$$

sont tués par $\big(1-[\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)^2$ et $(1-[\varepsilon])^d$ respectivement, donc par $(1-[\varepsilon])^{d+1}$. Il en résulte que le module $\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}})^{H_{R/S}}\big)$ est tué par $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$, vu que le conoyau de l'injection $\mathbf{A}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle\oplus\mathbf{X}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle\to(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}})^{H_{R/S}}$ est tué par $\mathcal{I}$ en vertu de la proposition 12 et du lemme 7.

Comme $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est sans p-torsion ([7], Propositions 6.1.4 & 6.1.8), on a la suite exacte

$$0\to\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\xrightarrow{p^n}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\to\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\to 0$$

et donc la suite exacte

$$0\to\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{H_{R/S}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{H_{R/S}}\to(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}})^{H_{R/S}}\to\mathrm{H}^1(H_{R/S},\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}).$$

D'après la proposition 8, le module $\mathrm{H}^1(H_{R/S},\mathrm{A}_{\mathrm{cris}})$ est tué par $\mathcal{I}^2$. Comme $\mathcal{I}^2\equiv\mathcal{I}$ mod $p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$, on a une suite exacte

$$0\to\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{H_{R/S}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{H_{R/S}}\to(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}})^{H_{R/S}}\to\mathcal{M}_n\to 0\qquad(**)$$

où $\mathcal{M}_n$ est un module tué par $\mathcal{I}$. Pour $q>0$, on a donc la suite exacte

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathcal{M}_n\big)&\to\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{H_{R/S}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{H_{R/S}}\big)\\&\to\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}})^{H_{R/S}}\big).\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}})^{H_{R/S}}\big)$ est tué par $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$ d'après ce qui précède, et comme $\mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathcal{M}_n\big)$ est tué par $\mathcal{I}$, le module

$$\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S},\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{H_{R/S}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{H_{R/S}}\big)$$

est bien tué par $\big(1-[\varepsilon]\big)^{d+1}\mathcal{I}^2 = \big(1-[\varepsilon]\big)^{d+1}\mathcal{I}$.

La dernière assertion résulte du fait que $\widetilde{\Gamma}_{R/S} \simeq \mathbb{Z}_p^d$ est de dimension cohomologique égale à d (sa cohomologie à valeurs dans un module discret se calcule au moyen d'un complexe de Koszul). □

Lemme 23. (1) *Pour tout $r, n \in \mathbb{N}_{>0}$, le module* $\mathrm{H}^r\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)$ *est tué par* $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$.

(2) *Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, le module* $\mathrm{R}^1\varprojlim_n \mathrm{H}^0\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)$ *est tué par* $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$.

Démonstration. (1) Pour alléger les notations, on écrit $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ au lieu de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$. La suite spectrale de Hochschild–Serre s'écrit

$$\mathrm{H}^r\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathrm{H}^s\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{r+s}\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$$

(le module $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est muni de la topologie discrète). D'après le lemme 7, le module $\mathrm{H}^s\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$ est tué par $\mathcal{I}$ lorsque $s > 0$. En particulier, le noyau et le conoyau du morphisme

$$\mathrm{H}^r\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathrm{H}^0\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\big) \to \mathrm{H}^r\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$$

sont tués par $\mathcal{I}$. D'après les propositions 12, 16 et 21 et le lemme 7, le module $\mathrm{H}^r\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathrm{H}^0\big(H_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\big)$ est tué par $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$ lorsque $r > 0$. En particulier, $\mathrm{H}^r\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$ est lui aussi tué par $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$.

(2) Soit $(B_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système projectif de groupes abéliens. D'après [17], 1.4, le groupe $\mathrm{R}^1\varprojlim_n B_n$ est le conoyau de l'application

$$\prod_n B_n \to \prod_n B_n, \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \big(b_n - d_n(b_{n+1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

(son noyau est $\varprojlim_n B_n$). En particulier, si les B_n sont des S-modules tués par $c \in S$, alors $\mathrm{R}^1\varprojlim_n B_n$ est tué par c. Considérons les systèmes projectifs $B_n = \big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)^{G_{R/S}}$ et

$$B'_n := \bigcap_{m\geq n} \mathrm{Im}\,\big((\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^m\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R))^{G_{R/S}} \to (\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R))^{G_{R/S}}\big).$$

Par construction, on a une application injective $B'_n \hookrightarrow B_n$. Soit $C_n = B_n/B'_n$ le système projectif quotient. Comme $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ est sans p-torsion, on a la suite exacte

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^m\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)^{G_{R/S}} &\to \big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)^{G_{R/S}} \\ &\to \mathrm{H}^1\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^{m-n}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big).\end{aligned}$$

Comme le module $\mathrm{H}^1\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^{m-n}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)$ est tué par $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$ d'après (1), l'idéal $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)^{G_{R/S}}$ est contenu dans l'image de $\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^m\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)^{G_{R/S}}$. Comme c'est vrai pour tout $m \geq n$, il est dans l'image de B'_n, de sorte que C_n est tué par $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$.

Comme $\mathrm{R}^i \varprojlim = 0$ pour $i \geq 2$, on a la suite exacte

$$0 \to \varprojlim_n B'_n \to \varprojlim_n B_n \to \varprojlim_n C_n \to \mathrm{R}^1 \varprojlim_n B'_n \to \mathrm{R}^1 \varprojlim_n B_n \to \mathrm{R}^1 \varprojlim_n C_n \to 0.$$

Mais par construction, le système projectif $(B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Mittag-Leffler : on a $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n B'_n = 0$. Par ailleurs, $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n C_n$ est tué par $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$ d'après ce qui précède. Il en résulte que $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n B_n$ est lui aussi tué par $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 24. *Si $q > 0$, le module $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)$ est tué par $(1-[\varepsilon])^{2(d+1)}\mathcal{I}^2$. En particulier, on a $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)\big) = 0$.*

Démonstration. D'après [20], Proposition 2.2, on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathrm{H}^{q-1}\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \\ &\to \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to 0. \end{aligned}$$

D'après le lemme 23, les modules

$$\varprojlim_n \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathrm{H}^{q-1}\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$$

sont tués par $(1-[\varepsilon])^{d+1}\mathcal{I}$ pour $q \geq 1$. Le module $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$ est donc tué par $(1-[\varepsilon])^{2(d+1)}\mathcal{I}^2$ pour $q \geq 1$. □

4. Calcul des invariants

Rappelons qu'on a supposé que $S = S_0$ et $R = R_0$. Il existe des suites

$$\mathrm{W}(k)\{Z_1^{\pm 1}, \dots, Z_\delta^{\pm 1}\} = S^{(0)} \subseteq S^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq S^{(N_S)} = S,$$

$$S\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\} = R^{(0)} \subseteq R^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq R^{(N_R)} = R$$

où pour $j \in \{1, \dots, N_S\}$ (resp. $j \in \{1, \dots, N_R\}$), l'extension $S^{(j)}/S^{(j-1)}$ (resp. $R^{(j)}/R^{(j-1)}$) est de l'un des types suivants :

(ét) complétion p-adique d'une extension étale ;

(loc) complétion p-adique d'une localisation ;
(comp) complétion par rapport à un idéal contenant p.

Lemme 25. *Le morphisme*

$$\bar{\theta}\colon \widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{R}}^{+} \to \bar{R}/p\bar{R}, \quad (x_0, x_1, \ldots) \mapsto x_1,$$

induit des isomorphismes $\widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{R}}^{+}/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{R}}^{+} \cong \bar{R}/p\bar{R}$ *et*

$$\mathbf{E}_R^{+}/(\varepsilon-1)^{p-1}\,\mathbf{E}_R^{+} \to (R/pR)\big[\varepsilon^{(1)}, Z_1^{(1)}, \ldots, Z_\delta^{(1)}, T_1^{(1)}, \ldots, T_d^{(1)}\big].$$

Démonstration. On sait que $\bar{\theta}$ est surjectif de noyau principal engendré par $\tilde{p}^p$, ce qui prouve la première assertion. D'après le lemme 9 l'application $\bar{\theta}$ induit un isomorphisme $\mathbf{E}_R^{+}/(\varepsilon-1)^{p-1}\,\mathbf{E}_R^{+} \to R_1/pR_1$. On conclut en utilisant l'isomorphisme $R_1/pR_1 \cong (R/pR)\big[\varepsilon^{(1)}, Z_1^{(1)}, \ldots, Z_\delta^{(1)}, T_1^{(1)}, \ldots, T_d^{(1)}\big]$ de la proposition 1 (2). □

Comme $S = S_0$ et $R = R_0$, l'anneau

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R) = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(R)\{\langle w_1, \ldots, w_\delta, u_1, \ldots, u_d\rangle\}$$

est une R-algèbre (*cf.* [6], Proposition 6.1.8). De même, $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ est une S-algèbre. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on dispose donc d'un unique morphisme

$$f_n\colon R \otimes_S A_{S,n}\langle u_1, \ldots, u_d\rangle \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$$

(où $A_{S,n} = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$) qui envoie T_i sur $[\widetilde{T}_i] + u_i$ et qui est compatible à θ.

Proposition 26. *L'homomorphisme* f_n *se factorise en*

$$\begin{tikzcd} R \otimes_S A_{S,n}\langle u_1, \ldots, u_d\rangle \arrow[r, "\tilde{f}_n"] \arrow[dr, "f_n"'] & \mathbf{A}_R^{+} \otimes_{\mathbf{A}_S^{+}} A_{S,n}\langle u_1, \ldots, u_d\rangle \arrow[d] \\ & \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R). \end{tikzcd}$$

En outre, $\tilde{f}_n$ *est un isomorphisme et les morphismes* f_n *et*

$$\mathbf{A}_R^{+} \otimes_{\mathbf{A}_S^{+}} A_{S,n} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$$

sont injectifs.

Lemme 27. *La proposition 26 est vraie pour* $n = 1$.

Démonstration. Pour alléger les notations, on pose $\underline{w} = (w_1, \dots, w_\delta)$ et $\underline{u} = (u_1, \dots, u_d)$. On a

$$R \otimes_S A_{S,1}\langle u_1, \dots, u_d\rangle = \frac{(R/pR) \otimes_{S/pS} (\widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{S}}^+/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{S}}^+)[\underline{w}, \underline{u}, \delta_m, Z_{j,m}, W_{i,m}]}{(w_j^p, u_i^p, \delta_m^p, Z_{j,m}^p, W_{i,m}^p)_{\substack{1\le j\le\delta\\ 1\le i\le d\\ m\in\mathbb{N}}}}$$

et

$$\mathbf{A}_R^+ \otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,1}\langle u_1, \dots, u_d\rangle = \mathbf{E}_R^+ \otimes_{\mathbf{E}_S^+} \frac{(\widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{S}}^+/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{S}}^+)[\underline{w}, \underline{u}, \delta_m, Z_{j,m}, W_{i,m}]}{(w_j^p, u_i^p, \delta_m^p, Z_{j,m}^p, W_{i,m}^p)_{\substack{1\le j\le\delta\\ 1\le i\le d\\ m\in\mathbb{N}}}}.$$

Rappelons que $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ est une $\mathcal{R}/\tilde{p}^p\mathcal{R} = \widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{R}}^+/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{R}}^+$-algèbre. On déduit de $\bar{\theta}$ un morphisme $\iota\colon \bar{R}/p\bar{R} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, et un isomorphisme

$$\alpha_R\colon \frac{(\bar{R}/p\bar{R})[\underline{w}, \underline{u}, \delta_m, Z_{j,m}, W_{i,m}]}{(w_j^p, \delta_m^p, Z_{j,m}^p, W_{i,m}^p)_{\substack{1\le j\le\delta\\ 1\le i\le d\\ m\in\mathbb{N}}}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$$

via ι (*cf.* preuve du lemme 7). Soit $\theta_R\colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R) \to \bar{R}/p\bar{R}$ l'application naturelle : la composition avec α_R envoie w_j, u_i, $Z_{j,m}$, $T_{i,m}$ et δ_m sur 0, et induit le Frobenius sur $\bar{R}/p\bar{R}$. Comme $\mathrm{Ker}(\theta_R)$ est un idéal à puissances divisées, on a $x^p = p!x^{[p]} = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}(\theta_R)$: la proposition 47 implique que l'application $R/pR \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ composée avec α_R^{-1} est la seule application de k-algèbres qui envoie Z_j sur $\bar{\theta}(\widetilde{Z}_j) + w_j$ pour $j \in \{1, \dots, \delta\}$ et T_i sur $\bar{\theta}(\widetilde{T}_i) + u_i$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$ et telle que le composé avec l'application $\theta_R \circ \alpha_R$ est l'inclusion naturelle $R/pR \subset \bar{R}/p\bar{R}$. En particulier, elle se factorise à travers $(\bar{R}/p\bar{R})[\underline{w}, \underline{u}]/(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le\delta\\ 1\le i\le d}}$. La proposition 47 implique que l'image de S/pS est contenue dans $(\bar{S}/p\bar{S})[\underline{w}]/(w_j^p)_{1\le j\le\delta}$. On a $\iota(T_i^{(1)}) = [\widetilde{T}_i]$ et donc $f_1(T_i) = [\widetilde{T}_i] + u_i = \iota(T_i^{(1)}) + u_i$. Reste à vérifier que f_1 induit un isomorphisme

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_1\colon (R/pR) \otimes_{S/pS} (\widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{S}}^+/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}_{\bar{S}}^+)[\underline{w}, \underline{u}]/(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le\delta\\ 1\le i\le d}} & \\
\xrightarrow{\sim}\ & \iota^{-1}(\mathbf{E}_{R/S}^+/\tilde{p}^p\,\mathbf{E}_{R/S}^+)[\underline{w}, \underline{u}]/(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le\delta\\ 1\le i\le d}} \\
& \Big\Vert (*) \\
& (R_1\bar{S}/pR_1\bar{S})\,[\underline{w}, \underline{u}]/(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le\delta\\ 1\le i\le d}}
\end{aligned}$$

(l'égalité $(*)$ résulte du lemme 25 et du fait que

$$\mathbf{E}_R^+ \otimes_{\mathbf{E}_{\overline{S}}^+} \big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{S}}^+ / \tilde{p}^p \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{S}}^+\big) \cong \mathbf{E}_{R/S}^+ / \tilde{p}^p\, \mathbf{E}_{R/S}^+ \to \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}} / \tilde{p}^p \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{R}} \cong \overline{R}/p\overline{R}$$

est injective avec image $R_1\overline{S}/pR_1\overline{S}$, *cf.* démonstration du lemme 10).

Montrons par récurrence sur $j \in \{0, \dots, N_R\}$ que l'application $\tilde{f}_1^{(j)}$ (définie comme $\tilde{f}_1$ mais avec $R^{(j)}$ au lieu de R) est bien définie et est un isomorphisme.

Comme $\mathbf{E}_{R^{(0)}}^+ = \mathbf{E}_S^+ \{\widetilde{T}_1^{\pm 1}, \dots, \widetilde{T}_d^{\pm 1}\}$, le morphisme f_1 induit l'application

$$(S/pS)\big[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\big] \otimes_{S/pS} \frac{(\overline{S}/p\overline{S})[\underline{w}, \underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1 \le j \le \delta \\ 1 \le i \le d}}} \to \frac{\big(R_1^{(0)}\overline{S}/pR_1^{(0)}\overline{S}\big)[\underline{w}, \underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1 \le j \le \delta \\ 1 \le i \le d}}}$$
$$T_i \mapsto T_i^{(1)} + u_i$$

et, comme $R_1^{(0)}\overline{S} = \overline{S}\big[T_1^{(1)}, \dots, T_d^{(1)}\big]$, c'est un isomorphisme. Le morphisme $\tilde{f}_1^{(0)}$ est donc bien défini, et c'est un isomorphisme tel que $\theta_{R^{(0)}} \circ \alpha_{R^{(0)}} \circ \tilde{f}_1^{(0)} = \mathrm{Id} \otimes \theta_S$.

Soit $j \in \{1, \dots, N\}$. Supposons que f_1 induit un isomorphisme

$$\big(R^{(j-1)}/pR^{(j-1)}\big) \otimes_{S/pS} \frac{\big(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{S}}^+ / \tilde{p}^p \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{S}}^+\big)[\underline{w}, \underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1 \le j \le \delta \\ 1 \le i \le d}}}$$
$$\xrightarrow{\tilde{f}_1^{(j-1)}} \frac{\iota^{-1}\big(\mathbf{E}_{R^{(j-1)}/S}^+ / \tilde{p}^p\, \mathbf{E}_{R^{(j-1)}/S}^+\big)[\underline{w}, \underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1 \le j \le \delta \\ 1 \le i \le d}}}$$

tel que $\theta_{R^{(j-1)}} \circ \alpha_{R^{(j-1)}} \circ \tilde{f}_1^{(j-1)} = \mathrm{Id} \otimes \theta_S$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\big(R^{(j)}/pR^{(j)}\big) \otimes_{S/pS} \frac{(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{S}}^+ / \tilde{p}^p \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{S}}^+)[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1 \le j \le \delta \\ 1 \le i \le d}}} \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes \theta_S"] \arrow[dr, dotted, "\tilde{f}_1^{(j)}"] & R^{(j)}\overline{S}/pR^{(j)}\overline{S} \\
\big(R^{(j-1)}/pR^{(j-1)}\big) \otimes_{S/pS} \frac{(\widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{S}}^+ / \tilde{p}^p \widetilde{\mathbf{E}}_{\overline{S}}^+)[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1 \le j \le \delta \\ 1 \le i \le d}}} \arrow[u] \arrow[d, "\tilde{f}_1^{(j-1)}", "\sim"'] & \\
\frac{\iota^{-1}\big(\mathbf{E}_{R^{(j-1)}/S}^+ / \tilde{p}^p\, \mathbf{E}_{R^{(j-1)}/S}^+\big)[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1 \le j \le \delta \\ 1 \le i \le d}}} \arrow[r] & \frac{\iota^{-1}\big(\mathbf{E}_{R^{(j)}/S}^+ / \tilde{p}^p\, \mathbf{E}_{R^{(j)}/S}^+\big)[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1 \le j \le \delta \\ 1 \le i \le d}}}. \arrow[uu, "\theta_{R^{(j)}} \circ \alpha_{R^{(j)}}"']
\end{tikzcd}$$

Les noyaux de $\mathrm{Id} \otimes \theta_S$ et de $\theta_{R^{(j)}} \circ \alpha_{R^{(j)}}$ sont engendrés par $p^{\frac{1}{p}}$, par $w_1, \dots, w_\delta$ et par $u_1, \dots, u_d$ avec $m \in \mathbb{N}$: ils sont donc nilpotents.

• Supposons l'extension $R^{(j)}/R^{(j-1)}$ de type (ét). Comme Ker $\big(\theta_{R^{(j)}} \circ \alpha_{R^{(j)}}\big)$ est nilpotent et puisque le morphisme $R^{(j-1)}/pR^{(j-1)} \to R^{(j)}/pR^{(j)}$ est étale, il existe une unique application $\tilde{f}_1^{(j)}$ comme en pointillé sur le diagramme qui le rend commutatif. Par unicité, elle est induite par f_1. Montrons que c'est un isomorphisme. En vertu de l'égalité $(*)$, l'extension $\iota^{-1}\big(\mathbf{E}^+_{R^{(j-1)}/S}\big) \subseteq \iota^{-1}\big(\mathbf{E}^+_{R^{(j)}/S}\big)$ est étale. Comme Ker $\big(\mathrm{Id} \otimes \theta_S\big)$ est nilpotent, cela permet de construire un morphisme

$$g_1^{(j)} \colon \frac{\iota^{-1}\big(\mathbf{E}^+_{R^{(j)}/S}/\tilde{p}^p\,\mathbf{E}^+_{R^{(j)}/S}\big)[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le \delta\\ 1\le i\le d}}} \to \big(R^{(j)}/pR^{(j)}\big)\otimes_{S/pS} \frac{(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}}/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}})[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le \delta\\ 1\le i\le d}}}$$

inverse de $\tilde{f}_1^{(j)}$ par unicité.

• Supposons l'extension $R^{(j)}/R^{(j-1)}$ de type (loc). L'anneau $R^{(j)}/pR^{(j)}$ est le localisé de $R^{(j-1)}/pR^{(j-1)}$ par rapport à une partie multiplicative Σ_j. Comme Ker $\big(\theta_{R^{(j)}} \circ \alpha_{R^{(j)}}\big)$ et Ker$\big(\mathrm{Id} \otimes \theta_S\big)$ sont nilpotents, les anneaux

$$\big(R^{(j)}/pR^{(j)}\big) \otimes_{S/pS} \frac{(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}}/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}})[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le \delta\\ 1\le i\le d}}}$$

et

$$\frac{\iota^{-1}\big(\mathbf{E}^+_{R^{(j)}/S}/\tilde{p}^p\,\mathbf{E}^+_{R^{(j)}/S}\big)[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le \delta\\ 1\le i\le d}}}$$

sont les localisés de

$$\big(R^{(j-1)}/pR^{(j-1)}\big) \otimes_{S/pS} \frac{(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}}/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}})[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le \delta\\ 1\le i\le d}}}$$

et de

$$\frac{\iota^{-1}\big(\mathbf{E}^+_{R^{(j-1)}}\,\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}}/\tilde{p}^p\,\mathbf{E}^+_{R^{(j-1)}}\,\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}}\big)[\underline{w}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le \delta\\ 1\le i\le d}}}$$

par rapport à $\big(\mathrm{Id} \otimes \theta_S\big)^{-1}(\Sigma_j)$ et $\big(\theta_{R^{(j-1)}} \circ \alpha_{R^{(j-1)}}\big)^{-1}(\Sigma_j)$ respectivement. Cela implique que l'isomorphisme $\tilde{f}_1^{(j-1)}$ se localise en un isomorphisme $\tilde{f}_1^{(j)}$ comme désiré.

• Supposons l'extension $R^{(j)}/R^{(j-1)}$ de type (comp). L'anneau $R^{(j)}/pR^{(j)}$ est le complété de $R^{(j-1)}/pR^{(j-1)}$ par rapport à un idéal I_j. On raisonne de la même manière que dans le cas (loc), en utilisant le fait que Ker $\big(\theta_{R^{(j)}} \circ \alpha_{R^{(j)}}\big)$ et Ker$\big(\mathrm{Id} \otimes \theta_S\big)$ sont nilpotents, de sorte que les anneaux $\big(R^{(j)}/pR^{(j)}\big) \otimes_{S/pS} \frac{(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}}/\tilde{p}^p\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\overline{S}})[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p, u_i^p)_{\substack{1\le j\le \delta\\ 1\le i\le d}}}$

et $\dfrac{\iota^{-1}\left(\mathbf{E}^+_{R^{(j)}/S}/\tilde{p}^p\,\mathbf{E}^+_{R^{(j)}/S}\right)[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p,u_i^p)_{\substack{1\le j\le \delta\\ 1\le i\le d}}}$ sont les complétés de $\left(R^{(j-1)}/pR^{(j-1)}\right)\otimes_{S/pS}$ $\dfrac{(\tilde{\mathbf{E}}^+_S/\tilde{p}^p\tilde{\mathbf{E}}^+_S)[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p,u_i^p)_{\substack{1\le j\le \delta\\ 1\le i\le d}}}$ et de $\dfrac{\iota^{-1}\left(\mathbf{E}^+_{R^{(j-1)}/S}/\tilde{p}^p\,\mathbf{E}^+_{R^{(j-1)}/S}\right)[\underline{w},\underline{u}]}{(w_j^p,u_i^p)_{\substack{1\le j\le \delta\\ 1\le i\le d}}}$ par rapport à $(\mathrm{Id}\otimes\theta_S)^{-1}(I_j)$ et $(\theta_{R^{(j-1)}}\circ\alpha_{R^{(j-1)}})^{-1}(I_j)$ respectivement. Cela implique que l'isomorphisme $\tilde{f}_1^{(j-1)}$ induit un isomorphisme $\tilde{f}_1^{(j)}$ sur les complétés, comme désiré. □

Démonstration de la proposition 26. Comme $A_{S,n}/pA_{S,n} = A_{S,1}$ et p est un élément régulier dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, les applications

$$\mathbf{A}_R^+\otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$$

et

$$\mathbf{A}_R^+\otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,n} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$$

étant injectives pour $n=1$ d'après le lemme 27, elles sont injectives pour tout n. Il suffit donc de construire $\tilde{f}_n$ et de prouver que c'est un isomorphisme. On utilise les notations de la démonstration précédente. Montrons par récurrence sur $j\in\{0,\dots,N_R\}$ que f_n induit un morphisme

$$\tilde{f}_n^{(j)}\colon R^{(j)}\otimes_S A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \to \mathbf{A}^+_{R^{(j)}}\otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle$$

relevant l'isomorphisme $\tilde{f}_1^{(j)}$.

L'application $\xi_n : \mathbf{A}^+_{R^{(j)}}\otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,1}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \to \mathbf{A}^+_{R^{(j)}}\otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle$, définie par $x\mapsto p^{n-1}x$, composée avec l'inclusion dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, se factorise à travers l'inclusion $\mathbf{A}^+_{R^{(j)}}\otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,1}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \subset \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ composée avec l'application $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, définie par $x\mapsto p^{n-1}x$, qui est injective puisque $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ est sans p-torsion. En particulier, l'application ξ_n est injective : comme $f_n^{(j)}$ est un isomorphisme pour $n=1$, c'est un isomorphisme pour tout n.

Comme $f_n(T_i)=\left[\tilde{T}_i\right]+u_i$, on a $f_n(R^{(0)})\subseteq \mathbf{A}^+_{R^{(0)}}\otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle$: le morphisme $\tilde{f}_n^{(0)}$ est bien défini. Comme on l'a dit plus haut, c'est un isomorphisme.

Soit $j\in\{1,\dots,N_R\}$. Supposons que f_n induit un isomorphisme

$$\tilde{f}_n^{(j-1)}\colon R^{(j-1)}\otimes_S A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^+_{R^{(j-1)}}\otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle$$

relevant $f_1^{(j-1)}$. On a alors le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
R^{(j)} \otimes_S A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \arrow[r] \arrow[drr, "f_n"] \arrow[dr, dotted, "\tilde{f}_n^{(j)}"] & R^{(j)} \otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,1}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \arrow[r, hook] & \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R) \\
R^{(j-1)} \otimes_S A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \arrow[u] \arrow[d, "\tilde{f}_n^{(j-1)}", "\sim"'] & & \\
\mathbf{A}^+_{R^{(j-1)}} \otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \arrow[r] & \mathbf{A}^+_{R^{(j)}} \otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \arrow[r, hook] \arrow[uu] & \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Comme p est nilpotent dans

$$R^{(j)} \otimes_S A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle$$

et dans

$$\mathbf{A}^+_{R^{(j)}} \otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle,$$

on montre l'existence et l'unicité du morphisme $\tilde{f}_n^{(j)}$ (en pointillé sur le diagramme) de façon identique à celle de la preuve du lemme 27. De même, on montre l'unicité de l'application $f_n\colon R^{(j)} \otimes_S A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ rendant le diagramme commutatif, ce qui implique que l'application $\tilde{f}_n^{(j)}$ construite est compatible à f_n. □

Corollaire 28. *On a un morphisme injectif*

$$\mathbf{A}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle \to R \otimes_S A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle$$

induit par $\tilde{f}_n^{-1}$, *de conoyau tué par* $\mathcal{I}$.

Démonstration. Rappelons que A_n est l'image de $\varphi^n(\mathbf{A}_R^+)\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ dans

$$(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R))^{H_{R/S}}.$$

Comme $\mathbf{A}^+_{R/S} = \varphi^n(\mathbf{A}^+_{R/S})[[\tilde{T}_1],\dots,[\tilde{T}_d]]$ (lemme 10 (ii)), on a un morphisme injectif

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_n = \bigoplus_{\underline{\alpha}\in E_n\cap\mathbb{N}^d} A_n[\tilde{T}]^{\underline{\alpha}} &= A_n[[\tilde{T}_1],\dots,[\tilde{T}_d]] \\ &\to (\mathbf{A}_R^+ \otimes_{\mathbf{A}_S^+} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S))/p^n(\mathbf{A}_R^+ \otimes_{\mathbf{A}_S^+} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S))\end{aligned}$$

dont le conoyau est tué par $\mathcal{I}$ (*cf.* proposition 12 et lemme 7), et donc le morphisme injectif

$$\mathbf{A}_n\langle u_1,\dots,u_d\rangle \to \mathbf{A}_R^+ \otimes_{\mathbf{A}_S^+} A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \xrightarrow{\tilde{f}_n^{-1}} R \otimes_S A_{S,n}\langle u_1,\dots,u_d\rangle$$

de conoyau tué par $\mathcal{I}$. □

Lemme 29. *Posons*

$$K_n^{(i)} = \mathrm{Ker}\left(\gamma_i - 1 \colon R \otimes_S A_{S,n}\langle u_1, \dots, u_d\rangle \to R \otimes_S A_{S,n}\langle u_1, \dots, u_d\rangle\right).$$

Alors

$$K_n^{(i)} = \left(R \otimes_S A_{S,n}\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_d\rangle\right) \oplus \widetilde{K}_n^{(i)}$$

où $\widetilde{K}_n^{(i)}$ *est un* $R \otimes_S A_{S,n}\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_d\rangle$*-module tué par* $1 - [\varepsilon]$.

Démonstration. On a

$$\gamma_i(u_i) = T_i - [\varepsilon][\widetilde{T}_i] = T_i - [\varepsilon](T_i - u_i) = (1 - [\varepsilon])T_i + [\varepsilon]u_i$$

et donc

$$\begin{aligned}(\gamma_i - 1)\left(u_i^{[m]}\right) &= \left((1 - [\varepsilon])T_i + [\varepsilon]u_i\right)^{[m]} - u_i^{[m]} \\ &= ([\varepsilon]^m - 1)u_i^{[m]} + \sum_{j=1}^{m}(1 - [\varepsilon])^{[j]}T_i^j[\varepsilon]^{m-j}u_i^{[m-j]} \\ &= (1 - [\varepsilon])\Big(\mu_m u_i^{[m]} + T_i[\varepsilon]^{m-1}u_i^{[m-1]} + \sum_{j=2}^{m}\beta_j T_i^j[\varepsilon]^{m-j}u_i^{[m-j]}\Big)\end{aligned}$$

où $\mu_m = -\frac{[\varepsilon]^m - 1}{[\varepsilon] - 1}$ et $\beta_j = \frac{[\varepsilon]^{[j]} - 1}{[\varepsilon] - 1} \in \mathrm{Ker}(\theta)$ pour $j \geq 2$ (*cf.* lemme 18).

Pour $N \in \mathbb{N}_{>0}$, posons $\mathcal{K}_n^{(i)} = R \otimes_S A_{S,n}\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_d\rangle$ et $\mathcal{E}_{n,N}^{(i)} = \bigoplus_{j=0}^{N}\mathcal{K}_n^{(i)}u_i^{[j]}$. L'application $\gamma_i - 1$ induit un endomorphisme $\mathcal{K}_n^{(i)}$-linéaire de $\mathcal{E}_{n,N}^{(i)}$, dont la matrice dans la base $\left(1, u_i, u_i^{[2]}, \dots, u_i^{[N]}\right)$ est donnée par $(1 - [\varepsilon])G_{n,N}^{(i)}$ avec

$$G_{n,i}^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 & T_i & T_i^2\beta_2 & T_i^3\beta_3 & \cdots & \cdots & T_i^{N-1}\beta_{N-1} & T_i^N\beta_N \\ 0 & \mu_1 & T_i[\varepsilon] & T_i^2\beta_2[\varepsilon] & \ddots & \ddots & T_i^{N-2}\beta_{N-2}[\varepsilon] & T_i^{N-1}\beta_{N-1}[\varepsilon] \\ \vdots & \ddots & \mu_2 & T_i[\varepsilon]^2 & \ddots & & & T_i^{N-2}\beta_{N-2}[\varepsilon]^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & T_i^2\beta_2[\varepsilon]^{N-3} & T_i^3\beta_3[\varepsilon]^{N-3} \\ \vdots & & & & \ddots & \mu_{N-2} & T_i[\varepsilon]^{N-2} & T_i^2\beta_2[\varepsilon]^{N-2} \\ \vdots & & & & & \ddots & \mu_{N-1} & T_i[\varepsilon]^{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \mu_N \end{pmatrix}$$

Soit $\widetilde{G}_{n,N}^{(i)}$ la matrice obtenue en supprimant la première colonne et la dernière ligne.

On a $\widetilde{G}_{n,N}^{(i)} = \widetilde{U}_{n,N}^{(i)} + \widetilde{N}_{n,N}^{(i)}$ où

$$\widetilde{U}_{n,N}^{(i)} = \begin{pmatrix} T_i & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & T_i[\varepsilon] & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \mu_2 & T_i[\varepsilon]^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mu_{N-2} & T_i[\varepsilon]^{N-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_{N-1} & T_i[\varepsilon]^{N-1} \end{pmatrix}$$

est inversible et $\widetilde{N}_{n,N}^{(i)}$ a tous ses coefficients nilpotents (comme $\beta_j \in \mathrm{Ker}(\theta)$ pour $j \geq 2$, il a des puissances divisées : il est donc nilpotent modulo p^n). C'est encore le cas de la matrice $\widetilde{U}_{n,N}^{(i)-1}\widetilde{N}_{n,N}^{(i)}$ qui est donc nilpotente. La matrice $\widetilde{G}_{n,N}^{(i)} = \widetilde{U}_{n,N}^{(i)}\big(\mathrm{I}_N + \widetilde{U}_{n,N}^{(i)-1}\widetilde{N}_{n,N}^{(i)}\big)$ est donc inversible. Cela implique que

$$\mathrm{Ker}\left(\gamma_i - 1\colon \mathcal{E}_{n,N}^{(i)} \to \mathcal{E}_{n,N}^{(i)}\right) \subseteq \mathcal{K}_n^{(i)} \oplus \bigoplus_{j=1}^{N} \mathrm{Ker}\left(1 - [\varepsilon]\colon \mathcal{K}_n^{(i)} \to \mathcal{K}_n^{(i)}\right) u_i^{[j]}$$

le lemme en résulte (car $K_n^{(i)} = \mathcal{K}_n^{(i)} \oplus \big(\bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_n^{(i)} u_i^{[j]}\big)^{\gamma_i}$). □

Proposition 30. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, le conoyau de l'inclusion*

$$R \otimes_S A_{S,n} \subseteq \mathrm{H}^0\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)$$

est tué par $(1 - [\varepsilon])^2\mathcal{I}$.

Démonstration. D'après le corollaire 28, on dispose d'une application injective

$$\mathrm{H}^0\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathbf{A}_n\langle u_1, \ldots, u_d\rangle\big) \to \bigcap_{i=1}^{d} K_n^{(i)}$$

(dont le conoyau est tué par $\mathcal{I}$), et d'après le lemme 29, le conoyau de l'application

$$R \otimes_S A_{S,n} \to \bigcap_{i=1}^{d} K_n^{(i)}$$

est tué par $1 - [\varepsilon]$. Par ailleurs, le module $\mathrm{H}^0\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathbf{X}_n\langle u_1, \ldots, u_d\rangle\big)$ est tué par $\big(1 - [\varepsilon]^{\frac{1}{p}}\big)^2$ (proposition 16). Comme le conoyau de l'inclusion

$$\mathbf{A}_n\langle u_1, \ldots, u_d\rangle \oplus \mathbf{X}_n\langle u_1, \ldots, u_d\rangle \to \big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)^{H_{R/S}}$$

est tué par $\mathcal{I}$ (proposition 12 et lemme 7), il en résulte bien que le conoyau de l'inclusion $R \otimes_S A_{S,n} \subseteq \mathrm{H}^0\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)$ est tué par $(1 - [\varepsilon])^2\mathcal{I}$. □

En passant à la limite projective, on en déduit l'énoncé suivant :

Corollaire 31. *Le conoyau de l'inclusion* $R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \subseteq \mathrm{H}^0\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)$ *est tué par* $(1-[\varepsilon])^2\mathcal{I}$. *En particulier, on a* $\mathrm{H}^0\big(G_{R/S}, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)\big) = \big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)[t^{-1}]$.

5. Cohomologie de la filtration de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$

Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, les homomorphismes surjectifs $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \overline{R}/p^n\overline{R}$ admettent des sections ensemblistes ρ_n telles que $\rho_n \equiv \rho_{n+1} \mod p^n$. On obtient une section ensembliste de l'homomorphisme surjectif $A_{\mathrm{cris}} \to \widehat{\overline{R}}$ qui est continue pour la topologie p-adique. Il en résulte que la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Fil}^r\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to \mathrm{Fil}^{r-1}\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to \mathrm{gr}^{r-1}\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to 0$$

donne lieu à la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned}\cdots \to \mathrm{H}^{q-1}\big(G_{R/S}, \mathrm{gr}^{r-1}\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\big) &\to \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\big)\\ &\to \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^{r-1}\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\big) \to \cdots\end{aligned} \tag{1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0} \cup \{\infty\}$.

Proposition 32. *Si* $q > 0$ *et* $r \in \mathbb{N}$, *le module* $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)\big)\big)$ *est tué par* $(1-[\varepsilon])^{d+1+r}\mathcal{I}$ *si* $n \in \mathbb{N}$ *et par* $(1-[\varepsilon])^{2(d+1)+r}\mathcal{I}^2$ *si* $n = \infty$.

Démonstration. On procède par récurrence sur r, le cas $r = 0$ n'étant autre que le lemme 23 (1) et le corollaire 24.

Soit $r > 0$. On dispose de la suite exacte longue (1). Comme $\mathrm{gr}^{r-1}\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$ est tué par $1-[\varepsilon]$ et $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^{r-1}\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\big)$ par $(1-[\varepsilon])^{d+1+r-1}\mathcal{I}$ (respectivement $(1-[\varepsilon])^{2(d+1)+r-1}\mathcal{I}^2$) en vertu de l'hypothèse de récurrence, le module $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\big)$ est bien tué par $(1-[\varepsilon])^{d+1+r}\mathcal{I}$ (respectivement $(1-[\varepsilon])^{2(d+1)+r}\mathcal{I}^2$). □

Rappelons que pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{Fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} = \varinjlim_{n \geq |r|} t^{-n}\,\mathrm{Fil}^{r+n}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, et qu'on pose $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)\big) = \varinjlim_{n \geq |r|} \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, t^{-n}\,\mathrm{Fil}^{r+n}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Lemme 33. *Soient* $r \in \mathbb{Z}$ *et* $n, c \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geq |r|$. *Si* $x \in t^{-n}\,\mathrm{Fil}^{r+n}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, *alors l'image de* x *dans* $t^{-n-m}\,\mathrm{Fil}^{r+n+m}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ *est divisible par* p^c *si* $m \geq pc$. *En particulier,* $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}(R)\big)$ *est un* $\mathbb{Q}_p$*-espace vectoriel pour tout* $q \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Écrivons $x = \frac{x'}{t^n}$ avec $x' \in \mathrm{Fil}^{r+n} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. Comme $t^m = m!t^{[m]}$, on a $x = m!\frac{t^{[m]}x'}{t^{n+m}}$, qui est divisible par p^c dans $t^{-n-m} \mathrm{Fil}^{r+n+m} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ si $m \geq pc$. □

Proposition 34. *Si $r \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}_{>0}$, on a* $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\big) = 0$.

Démonstration. Comme $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\big)$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel d'après le lemme 33, il s'agit de montrer que si $n \geq |r|$ et $x \in \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, t^{-n} \mathrm{Fil}^{r+n} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que l'image de x dans $\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, t^{-n-m} \mathrm{Fil}^{r+n+m} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$ est tuée par une puissance de p. Quitte à remplacer r par $r + n$, on peut supposer $n = 0$ et $r \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ (qui dépend de r et de q) tel que l'image de l'application

$$a_m \colon \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, t^{-m} \mathrm{Fil}^{r+m} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$$

(induite par l'inclusion $\mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \subseteq t^{-m} \mathrm{Fil}^{r+m} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$) est tuée par une puissance de p. En composant a_m avec l'application

$$b_m \colon \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, t^{-m} \mathrm{Fil}^{r+m} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, t^{-m} \mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big),$$

on obtient l'application

$$\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, t^{-m} \mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big).$$

D'après la proposition 32, cette dernière est nulle si $m \geq 2(d+1) + r + 2$: il suffit donc de montrer que le noyau de b_m est de p-torsion. Cela résulte du lemme 36. □

Posons $\tilde{\xi} = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon]^{1/p}-1} = 1 + [\varepsilon]^{1/p} + \cdots + [\varepsilon]^{\frac{p-1}{p}}$. Alors $\tilde{\xi}$ est un générateur de $\mathrm{Ker}\big(\theta \colon \mathrm{W}(\mathcal{R}) \to \widehat{\widehat{R}}\big)$ (*cf.* [12], 5.1.2).

Si $\underline{n} = (n_0, n_1, \ldots, n_{d+\delta}) \in \mathbb{N}^{d+\delta+1}$, on pose

$$\underline{u}^{[\underline{n}]} = u_1^{[n_1]} \cdots u_d^{[n_d]} \quad \text{et} \quad \underline{w}^{[\underline{n}]} = w_1^{[n_{d+1}]} \cdots w_\delta^{[n_{d+\delta}]}.$$

Si $r \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est un $\widehat{\widehat{R}}$-module libre, de base $\big\{\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}\big\}_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{N}^{d+\delta+1} \\ |\underline{n}|=r}}$.

Lemme 35. *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, l'application*

$$\mathrm{H}^q\Big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \bigoplus_{|\underline{n}|=r} \widehat{\overline{S}R}\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}\Big) \to \mathrm{H}^q\Big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \bigoplus_{|\underline{n}|=r} \widehat{\overline{S}R_\infty}\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}\Big)$$

est injective et son conoyau est de p-torsion.

Démonstration. Posons $D_r = \bigoplus_{|\underline{n}|=r} \widehat{\overline{S}R}\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}$ et pour $\underline{\alpha} \in (\mathbb{Z}[p^{-1}] \cap [0,1[)^d$, posons $T^{\underline{\alpha}} = \big(T_1^{(n)}\big)^{p^n\alpha_1} \cdots \big(T_d^{(n)}\big)^{p^n\alpha_d}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $p^n\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^d$) : $T^{\underline{\alpha}}D_r$ est alors un sous-$\widehat{\overline{S}R}$-module de $\big(\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}}$. Il est stable sous l'action de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$, parce que $\gamma_i(u_i) = u_i - [\widetilde{T}_i]([\varepsilon]-1) \equiv u_i - T_i\tilde{\xi}(\varepsilon^{(1)}-1)$ mod $\mathrm{Fil}^2 \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, et $\gamma_i\big(T^{\underline{\alpha}}\big) = \varepsilon^{\alpha_i}T^{\underline{\alpha}}$ pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$ (où $\varepsilon^{\alpha_i} = \big(\varepsilon^{(n)}\big)^{p^n\alpha_i}$).

Commençons par montrer que s'il existe $i \in \{1,\dots,d\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$, alors la cohomologie de $T^{\underline{\alpha}}D_r/p^hT^{\underline{\alpha}}D_r$ est tuée par $\big(\varepsilon^{(1)}-1\big)^2$ pour tout $h \in \mathbb{N}_{>0}$. D'après la suite spectrale de Hochschild–Serre, cela résulte du fait que la cohomologie du complexe

$$\cdots \to T^{\underline{\alpha}}D_r/p^hT^{\underline{\alpha}}D_r \xrightarrow{\gamma_i-1} T^{\underline{\alpha}}D_r/p^hT^{\underline{\alpha}}D_r \to \cdots$$

est tuée par $\varepsilon^{(1)}-1$. Comme $\gamma_i\big(T^{\underline{\alpha}}\big) = \varepsilon^{\alpha_i}T^{\underline{\alpha}}$, il s'agit donc de voir que le noyau et le conoyau de l'application

$$\varepsilon^{\alpha_i}\gamma_i - 1\colon D_r/p^hD_r \to D_r/p^hD_r$$

sont tués par $\varepsilon^{\alpha_i}-1$ (comme $\alpha_i \neq 0$, on a $\varepsilon^{\alpha_i} \neq 1$, donc $\varepsilon^{\alpha_i}-1 \mid \varepsilon^{(1)}-1$).

Filtrons $D_r/p^hD_r = \bigoplus_{|\underline{n}|=r}\big(\overline{S}R/p^h\overline{S}R\big)\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}$ par le degré en u_i :

$$\mathrm{Fil}^j\, D_r/p^hD_r = \bigoplus_{\substack{|\underline{n}|=r\\ n_i\le j}}\big(\overline{S}R/p^h\overline{S}R\big)\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}.$$

Si $\underline{n} \in \mathbb{N}^{d+\delta+1}$ est tel que $|\underline{n}| = r$, on a

$$\begin{aligned}
&\big(\varepsilon^{\alpha_i}\gamma_i - 1\big)\big(\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}\big)\\
&\quad= \varepsilon^{\alpha_i}\tilde{\xi}^{[n_0]}\big(u_i - [\widetilde{T}_i]([\varepsilon]-1)\big)^{[n_i]}\Big(\prod_{\substack{1\le j\le d\\ j\neq i}}\underline{u}^{[n_j]}\Big)\underline{w}^{[\underline{n}]} - \tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}\\
&\quad\equiv \big(\varepsilon^{\alpha_i}-1\big)\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]} \mod \big(\varepsilon^{(1)}-1\big)\,\mathrm{Fil}^{n_i-1}\, D_r/p^hD_r
\end{aligned}$$

car $\big(u_i - [\widetilde{T}_i]([\varepsilon]-1)\big)^{[n_i]} \equiv u_i^{[n_i]} + \sum_{k=0}^{n_i-1}\big(-T_i\big(\varepsilon^{(1)}-1\big)\big)^{n_i-k}\tilde{\xi}^{[n_i-k]}u_i^{[k]}$ vu que $[\widetilde{T}_i]([\varepsilon]-1) \equiv T_i\tilde{\xi}\big(\varepsilon^{(1)}-1\big)$ mod $\mathrm{Fil}^2 \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. Comme $\varepsilon^{\alpha_i}-1 \mid \varepsilon^{(1)}-1$, cela implique que $\varepsilon^{\alpha_i}\gamma_i - 1 = \big(\varepsilon^{\alpha_i}-1\big)f_i$, où f_i est un isomorphisme de D_r/p^hD_r (parce que sa matrice dans la base $\big\{\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}\big\}_{\underline{n}\in\mathbb{N}^{d+\delta+1},|\underline{n}|=r}$ est unipotente donc inversible).

Posons $X = \bigoplus_{\underline{\alpha}\in(\mathbb{Z}[p^{-1}]\cap[0,1[)^d,\ \underline{\alpha}\neq(0,\dots,0)}\overline{S}RT^{\underline{\alpha}} \subset \overline{S}R_\infty$. D'après ce qui précède, $\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, X \otimes_{\overline{S}R} D_r/p^hD_r\big)$ est tué par $\big(\varepsilon^{(1)}-1\big)^2$ pour tout $h \in \mathbb{N}_{>0}$ et tout

$q \in \mathbb{N}$. D'après [20], Proposition 2.2, pour $q > 0$, on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{R}^1 \varprojlim_h \mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, X \otimes_{\overline{S}R} D_r/p^h D_r\big)$$
$$\to \mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \widehat{X} \otimes_{\widehat{\overline{S}R}} D_r\big) \to \varprojlim_h \mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, X \otimes_{\overline{S}R} D_r/p^h D_r\big) \to 0$$

où $\widehat{X}$ désigne le complété p-adique de X. Il en résulte que $\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \widehat{X} \otimes_{\widehat{\overline{S}R}} D_r\big)$ est tué par $\big(\varepsilon^{(1)} - 1\big)^4$ pour tout $q \in \mathbb{N}_{>0}$. Par ailleurs, l'application

$$\mathrm{H}^0\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \widehat{X} \otimes_{\widehat{\overline{S}R}} D_r\big) \to \varprojlim_h \mathrm{H}^0\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, X \otimes_{\overline{S}R} D_r/p^h D_r\big)$$

étant injective, $\mathrm{H}^0\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \widehat{X} \otimes_{\widehat{\overline{S}R}} D_r\big)$ est tué par $\big(\varepsilon^{(1)} - 1\big)^2$. Ainsi, l'application

$$\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, D_r\big) \to \mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \big(\widehat{\overline{S}R} \oplus \widehat{X}\big) \otimes_{\widehat{\overline{S}R}} D_r\big)$$

est injective de conoyau tué par $\big(\varepsilon^{(1)} - 1\big)^4$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

D'après la proposition 1, l'application $R_\infty \otimes_{S_\infty} \overline{S} \to R_\infty \overline{S}$ est un isomorphisme et $R_\infty \otimes_{S_\infty} \overline{S} \simeq \bigoplus_{\underline{\alpha} \in (\mathbb{Z}[p^{-1}] \cap [0,1[)^d} R \otimes_S \overline{S} T^{\underline{\alpha}}$. On en déduit que l'application naturelle $\overline{S}R \oplus X \to \overline{S}R_\infty$ est un isomorphisme, de sorte que

$$\mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \big(\widehat{\overline{S}R} \oplus \widehat{X}\big) \otimes_{\widehat{\overline{S}R}} D_r\big) \simeq \mathrm{H}^q\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \widehat{\overline{S}R_\infty} \otimes_{\widehat{\overline{S}R}} D_r\big)$$

ce qui achève la preuve. □

Lemme 36. *Le noyau de l'application*

$$\mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^{r+1} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to \mathrm{H}^q\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$$

est de p-torsion pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}_{>0}$.

Démonstration. Grâce à la suite exacte longue de cohomologie (1), il suffit de voir que le conoyau de $\mathrm{H}^{q-1}\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \to \mathrm{H}^{q-1}\big(G_{R/S}, \mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$ est de p-torsion. On a $\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = \bigoplus_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{N}^{d+\delta+1} \\ |\underline{n}| = r}} \widehat{\overline{R}} \tilde{\xi}^{[n_0]} \underline{u}^{[\underline{n}]} \underline{w}^{[\underline{n}]}$: d'après le théorème de pureté de Faltings (*cf.* [9], §2, Theorem 4), le noyau et le conoyau de l'application

$$\mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \big(\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}}\big) \to \mathrm{H}^{q-1}\big(G_{R/S}, \mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$$

sont tués par p : il suffit donc de voir que le conoyau de

$$\mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \big(\mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}}\big) \to \mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \big(\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}}\big)$$

est de p-torsion, et donc *a fortiori* que le conoyau du composé

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)\big) \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "\lambda"'] & \mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \big(\mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}}\big) \arrow[d] \\ & \mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \big(\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}}\big) \end{tikzcd}$$

est de p-torsion.

Posons

$$\begin{aligned} M_r &= \bigoplus_{|\underline{n}|=r} \widehat{\overline{S}R}\big(\varepsilon^{(1)}-1\big)^{n_0}\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]} \\ &\subset \big(\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}} = \bigoplus_{|\underline{n}|=r} \widehat{\overline{R}}^{H_{R/S}}\tilde{\xi}^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}. \end{aligned}$$

C'est un sous-module stable sous l'action de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$. D'après le théorème de pureté de Faltings, le conoyau de l'application $\widehat{\overline{S}R_\infty} \subseteq \widehat{\overline{R}}^{H_{R/S}}$ est de p-torsion : d'après le lemme 35, il suffit de montrer que l'image de $\mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, M_r\big)$ dans $\mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \big(\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}}\big)$ est contenue dans celle de λ.

Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, posons

$$v_i = \log\left(\frac{[\widetilde{T}_i]}{T_i}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(m-1)!\left(\frac{[\widetilde{T}_i]}{T_i}-1\right)^{[m]}.$$

On a alors $v_i \equiv -T_i^{-1}u_i \mod \mathrm{Fil}^2 \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et $\gamma_i(v_i) = v_i + t$ (vu que $t = \log([\varepsilon])$). Comme $t \equiv \big(\varepsilon^{(1)}-1\big)\tilde{\xi} \mod \mathrm{Fil}^2 \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, on a un isomorphisme topologique

$$M_r \simeq \bigoplus_{|\underline{n}|=r} \widehat{\overline{S}R}t^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]} = \widehat{\overline{S}R} \otimes_{\mathbb{Z}_p} M_r^0$$

où $M_r^0 = \bigoplus_{|\underline{n}|=r} \mathbb{Z}_p\, t^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}$ est un sous-$\mathbb{Z}_p$-module stable sous l'action de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$. L'action de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$ étant triviale sur $\widehat{\overline{S}R}$, on a des isomorphismes de $\widehat{\overline{S}R}$-modules :

$$\mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, M_r\big) \simeq \mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(M_r, \underline{\gamma})\big) \simeq \widehat{\overline{S}R} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(M_r^0, \underline{\gamma})\big)$$

(où $K^\bullet(-, \underline{\gamma})$ désigne le complexe de Koszul associé à l'application $\underline{\gamma} := (\gamma_1 - 1, \dots, \gamma_d - 1)$).

Notons $\widetilde{M}_r$ (resp. $\widetilde{M}_r^0$) le sous-$R \otimes_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$-module (resp. le sous-$\mathbb{Z}_p$-module) de $\mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)$ engendré par $\big\{t^{[n_0]}\underline{u}^{[\underline{n}]}\underline{w}^{[\underline{n}]}\big\}_{|\underline{n}|=r}$. Comme $\gamma_i(v_i) = v_i + t$,

les sous-modules M_r et M_r^0 sont stables sous l'action de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$, et l'application $\mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S) \to \big(\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}}$ induit une application $\widetilde{M}_r \to M_r$ et un isomorphisme $\widetilde{M}_r^0 \to M_r^0$. L'action de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$ étant triviale sur $R \otimes_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$, on en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(\widetilde{M}_r, \underline{\gamma})\big) \arrow[r] & \mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(M_r, \underline{\gamma})\big) \\
\big(R \otimes_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(\widetilde{M}_r^0, \underline{\gamma})\big) \arrow[u] \arrow[r] & \widehat{\overline{S}R} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(M_r^0, \underline{\gamma})\big). \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Comme $\widetilde{M}_r^0 \simeq M_r^0$ et $R \otimes_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \to \widehat{\overline{S}R}$ est surjective, l'application $\big(R \otimes_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(\widetilde{M}_r^0, \underline{\gamma})\big) \to \widehat{\overline{S}R} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(M_r^0, \underline{\gamma})\big)$ est surjective, ce qui implique que l'application

$$\mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(\widetilde{M}_r, \underline{\gamma})\big) \to \mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(M_r, \underline{\gamma})\big)$$

l'est aussi : le diagramme suivant permet alors de conclure.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(\widetilde{M}_r, \underline{\gamma})\big) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(M_r, \underline{\gamma})\big) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, M_r\big) \arrow[ddl, bend left] \\
\mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(\mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S), \underline{\gamma})\big) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{H}^{q-1}\big(K^\bullet(\big(\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}}, \underline{\gamma})\big) \arrow[d, "\simeq"] & \\
\mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \mathrm{Fil}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R/S)\big) \arrow[r, "\lambda"] & \mathrm{H}^{q-1}\big(\widetilde{\Gamma}_{R/S}, \big(\mathrm{gr}^r \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)^{H_{R/S}}\big) &
\end{tikzcd}$$

□

Les auteurs remercient le rapporteur pour avoir trouvé un erreur dans la preuve du lemme 36 et avoir suggéré une correction.

Reste à calculer les invariants de $\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ sous $G_{R/S}$. Rappelons qu'on a posé $\tilde{\xi} = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon]^{1/p}-1}$. C'est un générateur de $\mathrm{Ker}\big(\theta\colon \mathrm{W}(\mathcal{R}) \to \widehat{\overline{R}}\big)$. Dans tout ce qui suit, $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ désigne l'anneau $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, les autres qui interviennent étant notés $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$. On note γ l'application $x \mapsto x^p/p$ sur $\ker\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \to \widehat{\overline{S}}\big)$. Posons $\eta = \frac{([\varepsilon]-1)^{p-1}}{p} \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)[p^{-1}]$.

Lemme 37. *Il existe $\lambda \in \tilde{\xi}\,\mathrm{W}\big(\mathcal{R}(\mathcal{O}_K)\big)$ tel que $\eta = (p-1)!\tilde{\xi}^{[p]} + \lambda$. En particulier, $\eta \in \mathrm{Ker}\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K) \to \widehat{\overline{\mathcal{O}_K}}\big)$. En outre, on a $\gamma^k(\eta) \in p^{-r}\eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \dots, r\}$.*

Démonstration. Comme $(X-1)^p \equiv X^p - 1 \mod p\,\mathbb{Z}[X]$, il existe $A \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $(X-1)^p = X^p - 1 + pA(X)$. On a $A(1) = 0$, de sorte qu'il existe $B \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $A(X) = (X-1)B(X)$, et donc $(X-1)^{p-1} = \frac{X^p-1}{X-1} + pB(X)$. En appliquant cette égalité à $[\varepsilon]^{1/p}$, il vient $\big([\varepsilon]^{1/p} - 1\big)^{p-1} = \tilde{\xi} + pB\big([\varepsilon]^{1/p}\big)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}([\varepsilon]-1)^{p-1} &= \tilde{\xi}^{p-1}\big([\varepsilon]^{1/p}-1\big)^{p-1} = \tilde{\xi}^{p-1}\big(\tilde{\xi} + pB\big([\varepsilon]^{1/p}\big)\big)\\ &= p!\tilde{\xi}^{[p]} + p\tilde{\xi}^{p-1}B\big([\varepsilon]^{1/p}\big)\end{aligned}$$

de sorte que $\lambda = \tilde{\xi}^{p-1}B\big([\varepsilon]^{1/p}\big)$.

Il reste à montrer que pour tout $k \in \{0,\dots,r\}$, on a $\gamma^k(\eta) \in p^{-r}\eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$. Mais on a

$$p^r\gamma^k(\eta) = p^r\frac{\eta^{p^k}}{p^{1+p+\cdots+p^{k-1}}} = p^r\eta\frac{(p^k-1)!\eta^{[p^k-1]}}{p^{1+p+\cdots+p^{k-1}}}$$

et $v_p((p^k-1)!) = v_p(p^k!) - k = \frac{p^k-1}{p-1} - k$, d'où $v_p\big(\frac{(p^k-1)!p^r}{p^{1+p+\cdots+p^{k-1}}}\big) = r-k \geq 0$, de sorte que $p^r\gamma^k(\eta) \in \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$, et on a fini. □

Rappelons que

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \simeq \big(\mathcal{R}/\tilde{\xi}^p\mathcal{R}\big)\big[\delta_m, w_j, Z_{j,m}, u_i, T_{i,m}\big]_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ 1\leq j\leq\delta\\ 1\leq i\leq d}}\big/\big(\delta_m^p, w_j^p, u_i^p, Z_{j,m}^p, T_{i,m}^p\big)$$

où δ_0 désigne l'image de $\tilde{\xi}^p/p = (p-1)!\tilde{\xi}^{[p]}$. En particulier, l'image η_0 de $\frac{([\varepsilon]-1)^{p-1}}{p}$ dans $A_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ vérifie $\eta_0 = \delta_0 + \lambda$, où λ est l'élément dont l'existence est assurée par le lemme 37. Notons η_m l'image de $\gamma^m(\eta)$ dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$. Comme $\eta_m = \gamma^m((p-1)!\tilde{\xi}^{[p]} + \lambda)$ et $\lambda \in \tilde{\xi}\,\mathrm{W}\big(\mathcal{R}(\mathcal{O}_K)\big)$, on a

$$\eta_m \in \big(\mathcal{R}/\tilde{\xi}^p\mathcal{R}\big)\big[\delta_k\big]_{0\leq k\leq m}/\big(\delta_k^p\big)_{0\leq k\leq m} \quad \text{et} \quad \eta_m^p = 0.$$

Il existe donc un morphisme $\mathcal{R}/\tilde{\xi}^p\mathcal{R}$-linéaire

$$\alpha_m\colon \big(\mathcal{R}/\tilde{\xi}^p\mathcal{R}\big)\big[W_k\big]_{0\leq k\leq m}\big/\big(W_k^p\big)_{0\leq k\leq m} \to \big(\mathcal{R}/\tilde{\xi}^p\big)\big[\delta_k\big]_{0\leq k\leq m}\big/\big(\delta_k^p\big)_{0\leq k\leq m}$$

défini par $W_k \mapsto \eta_k$. Comme $\gamma^k\big((p-1)!\tilde{\xi}^{[p]}\big) = \gamma^k\big(\eta-\lambda\big) = \sum_{n=0}^{p^k} a_n\eta^{[p^k-n]}\lambda^{[n]}$ avec $a_n \in \mathcal{R}/\tilde{\xi}^p\mathcal{R}$ et $\lambda^{[n]} \in \big(\mathcal{R}/\tilde{\xi}^p\big)\big[\delta_i\big]_{0\leq i\leq k-1}/\big(\delta_i^p\big)_{0\leq i\leq k-1}$ (car $0 \leq n \leq p^k$), une récurrence immédiate montre que δ_k est dans l'image de α_m pour $0 \leq k \leq m$. En particulier α_m est surjectif. Étant un morphisme surjectif de $\mathcal{R}/\tilde{\xi}^p\mathcal{R}$-modules libres de rang p^{m+1}, α_m est un isomorphisme. Il en est donc de même de $\lim_m \alpha_m$. Comme on a de plus $w_j = Z_j - \big[\tilde{Z}_j\big]$ et $u_i = T_i - \big[\tilde{T}_i\big]$, on a l'isomorphisme

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \simeq \big(\mathcal{R}/\tilde{\xi}^p\mathcal{R}\big)\big[\eta_m, w_j, Z_{j,m}, u_i, T_{i,m}\big]_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ 1\leq j\leq\delta\\ 1\leq i\leq d}}\big/\big(\eta_m^p, w_j^p, u_i^p, Z_{j,m}^p, T_{i,m}^p\big). \tag{2}$$

Rappelons qu'on a noté γ l'application définie par

$$\gamma(x) = x^p/p$$

sur $\operatorname{Ker}\big(\theta\colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \widehat{\overline{R}}\big)$.

Lemme 38. *Pour $r \in \mathbb{N}$, on a $p^r\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = \sum_{k=0}^{r} p^r \gamma^k(\eta)\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$.*

Démonstration. On procède par récurrence, le cas $r = 0$ étant évident. Soient $r \in \mathbb{N}_{>0}$ et $x \in p^r\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. Par hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$x = \sum_{k=0}^{r-1} p^{r-1}\gamma^k(\eta)x_k$$

avec $x_k \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ pour $k \in \{0,\dots,r-1\}$. Posons $x' = \sum_{k=0}^{r-1}\gamma^k(\eta)x_k$. Par hypothèse, on a $x' \in p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. Notons $\bar{x}_k$ l'image de x_k dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$: on a $\sum_{k=0}^{r-1}\eta_k\bar{x}_k = 0$.

Posons $\Lambda = \big(\mathcal{R}/\tilde{\xi}^p\mathcal{R}\big)\big[\eta_h, w_j, Z_{j,m}, u_i, T_{i,m}\big]_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ h\geq r\\ 1\leq j\leq\delta\\ 1\leq i\leq d}} \big/ \big(\eta_h^p, w_j^p, u_i^p, Z_{j,m}^p, T_{i,m}^p\big)$

de sorte que d'après l'isomorphisme (2), on a

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \simeq \Lambda[\eta_m]_{0\leq m\leq r-1}/(\eta_m^p)$$

c'est un Λ-module libre de base $\big(\prod_{m=0}^{r-1}\eta_m^{\alpha_m}\big)_{\underline{\alpha}\in\{0,\dots,p-1\}^r}$. En décomposant chaque $\bar{x}_k$ dans cette base et en relevant les facteurs dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, on peut supposer, quitte à modifier les x_k, que $\bar{x}_k \in \Lambda[\eta_0,\dots,\eta_k]/(\eta_0^p,\dots,\eta_k^p)$ pour tout $k \leq r-2$.

On va montrer que $\bar{x}_n \in \eta_n^{p-1}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ par induction sur n. Comme $\eta_0\bar{x}_0 \in \Lambda[\eta_0]/(\eta_0^p)$ et $\eta_0\bar{x}_0 = -\sum_{k=1}^{r-1}\eta_k\bar{x}_k$ appartient à l'idéal engendré par $\{\eta_k\}_{r-1\geq k>0}$, on a nécessairement $\eta_0\bar{x}_0 = 0$. Soit $n \in \{1,\dots,r-1\}$ tel que pour tout $k < n$, on a $\bar{x}_k \in \eta_k^{p-1}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, de sorte que $\eta_k\bar{x}_k = 0$. On a alors $\sum_{k=n}^{r-1}\eta_k\bar{x}_k = 0$. Mais $\eta_n\bar{x}_n \in \Lambda[\eta_0,\dots,\eta_n]/(\eta_0^p,\dots,\eta_n^p)$. Comme $\eta_n\bar{x}_n = -\sum_{k=n+1}^{r-1}\eta_k\bar{x}_k$ appartient à l'idéal engendré par $\{\eta_k\}_{r-1\geq k>n}$, on a nécessairement $\eta_n\bar{x}_n = 0$, de sorte que $\bar{x}_n \in \eta_n^{p-1}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. On a donc $x_k \in (\gamma^k(\eta))^{p-1}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} + p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, d'où $p^{r-1}\gamma^k(\eta)x_k \in p^{r-1}(\gamma^k(\eta))^p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} + p^r\gamma^k(\eta)\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$: on conclut en observant que $p^{r-1}(\gamma^k(\eta))^p = p^r\gamma^{k+1}(\eta)$. □

Rappelons que d'après la proposition 26, on a l'inclusion $R\widehat{\otimes}_S\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$.

Lemme 39. *On a $\big(R\widehat{\otimes}_S\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = \eta\big(R\widehat{\otimes}_S\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)$ (dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$).*

Démonstration. Supposons que

$$\big(R\widehat{\otimes}_S\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \subseteq \eta\big(R\widehat{\otimes}_S\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + p\eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\,. \tag{3}$$

On a

$$\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)/p\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \simeq R \otimes_S (\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$$

(*cf.* lemme 27) si bien que $\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = p\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)$. En particulier, on a

$$\begin{aligned}\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap p^r\eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} &\subseteq p^r\big(\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\\ &\subseteq p^r\big(\eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + p\eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\\ &\subseteq p^r\eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + p^{r+1}\eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\,.\end{aligned}$$

Comme $R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ est complet pour la topologie p-adique et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est séparé pour la topologie p-adique, on conclut que $\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = \eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)$.

Montrons tout d'abord que pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \subseteq \eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + p^r\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}, \tag{4}$$

ce qu'on va faire par récurrence sur r, le cas $r = 0$ étant évident. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \subseteq \eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + p^r\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. On a

$$\begin{aligned}&\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\\ &\quad\subseteq \eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + \big(\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap p^r\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)\\ &\quad\subseteq \eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + \Big(\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap p^r\Big(\sum_{k=0}^{r}\gamma^k(\eta)\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\Big)\Big)\end{aligned}$$

en vertu du lemme 38.

Comme on l'a vu plus haut, on a $\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = p\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)$, de sorte que

$$\begin{aligned}&\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\\ &\quad\subseteq \eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + p^r\Big[\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \Big(\sum_{k=0}^{r}\gamma^k(\eta)\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \Big(\sum_{k=0}^{r}\gamma^k(\eta)\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\Big) \subseteq p^{-r}\eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\,.$$

Posons

$$\begin{aligned}\Lambda(S) &= \big(\mathcal{R}_S/\tilde{\xi}^p\big)\big[w_j, Z_{j,m}\big]_{\substack{1\le j\le \delta\\ m\in\mathbb{N}}}\big/\big(w_j^p, Z_{j,m}^p\big),\\ \Lambda(R) &= \big(\mathcal{R}_R/\tilde{\xi}^p\big)\big[w_j, Z_{j,m}\big]_{\substack{1\le j\le \delta\\ m\in\mathbb{N}}}\big/\big(w_j^p, Z_{j,m}^p\big).\end{aligned}$$

On a $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \simeq \Lambda(S)[\eta_m]_{m\in\mathbb{N}}/(\eta_m^p)$.

Montrons que la structure de S-algèbre de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ se factorise à travers un morphisme $S \to \Lambda(S)$. Comme $Z_j = w_j + \widetilde{Z}_j$ dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$, le morphisme $k\big[Z_1^{\pm 1},\dots,Z_\delta^{\pm 1}\big] \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ se factorise à travers $\Lambda(S)$. Par ailleurs, le noyau du morphisme $\theta\colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \to \overline{S}/p\overline{S}$ est à puissances divisées : on a $x^p = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}(\theta)$. Comme l'anneau S/pS s'obtient à partir de $S^{(0)}/pS^{(0)} = k\big[Z_1^{\pm 1},\dots,Z_\delta^{\pm 1}\big]$ par une suite finie d'extensions étales, de localisations et de complétions, la proposition 47 (2) implique que la structure de S-algèbre de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ se factorise à travers le sous-anneau $\Lambda(S) \subset \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$.

Comme $\Lambda(R)$ est une $\Lambda(S)$-algèbre, c'est lui aussi une S-algèbre. Par ailleurs, d'après (2), on a

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \simeq \Lambda(R)\big[u_i, T_{i,m}, \eta_m\big]_{\substack{1\le i\le d\\ m\in\mathbb{N}}}\big/\big(u_i^p, T_{i,m}^p, \eta_m^p\big).$$

Comme $T_i = u_i + \widetilde{T}_i \in \Lambda(R)[u_h]_{1\le h\le d}/\big(u_h^p\big)$ pour $i \in \{1,\dots,d\}$ et R/pR est obtenu à partir de $(S/pS)\big[T_1^{\pm 1},\dots,T_d^{\pm 1}\big]$ par une suite finie d'extensions étales, de localisations et de complétions, la proposition 47 (2) implique que le morphisme naturel $R/pR \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ se factorise à travers $\Lambda(R)[u_i]_{1\le i\le d}/\big(u_i^p\big)$.

Soit $x \in \big(R\widehat{\otimes}_S\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap \big(\sum_{k=0}^r \gamma^k(\eta)\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$. On note $\bar{x}$ son image dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. On a $\bar{x} \in \sum_{k=0}^r \eta_k\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. Comme $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est une $\Lambda(R)\big[u_i,\eta_m\big]_{\substack{1\le i\le d\\ m\in\mathbb{N}}}/\big(u_i^p,\eta_m^p\big)$-algèbre libre et comme $\bar{x}$ appartient à l'image de $R\otimes_S \Lambda(S)[\eta_m]_{m\in\mathbb{N}}/(\eta_m^p)$, on a en fait

$$\bar{x} \in \sum_{k=0}^r \eta_k\big(\Lambda(R)[u_i,\eta_m]_{\substack{1\le i\le d\\ m\in\mathbb{N}}}\big/\big(u_i^p,\eta_m^p\big)\big)$$

et donc

$$\bar{x} \in \sum_{k=0}^r \eta_k\big(R\otimes_S \Lambda(S)\big)[\eta_m]_{m\in\mathbb{N}}/(\eta_m^p)$$

vu que

$$\big(R\otimes_S \Lambda(S)\big)[\eta_m]_{m\in\mathbb{N}}/(\eta_m^p) \quad \text{et} \quad \Lambda(R)\big[u_i,\eta_m\big]_{\substack{1\le i\le d\\ m\in\mathbb{N}}}\big/\big(u_i^p,\eta_m^p\big)$$

sont libres sur $R\otimes_S \Lambda(S)$ et sur $\Lambda(R)[u_i]_{1\le i\le d}/\big(u_i^p\big)$ respectivement, de base $\big(\prod_{m=0}^\infty \eta_m^{\alpha_m}\big)_{\underline{\alpha}\in\{0,\dots,p-1\}^{(\mathbb{N})}}$. Il en résulte que $x \in \sum_{k=0}^r \gamma^k(\eta)\big(R\widehat{\otimes}_S\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \subseteq p^{-r}\eta R\widehat{\otimes}_S\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) + p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ en vertu du lemme 37.

Pour finir, montrons comment déduire la formule (3) de la formule (4). Pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\ge -1}$, posons $\delta_k = \prod_{i=0}^k \big(\gamma^i(\eta)\big)^{p-1}$. On a $\eta\delta_k = p^{k+1}\gamma^{k+1}(\eta)$. On pose

$\Lambda := \Lambda(R)\big[u_i, T_{i,m}\big]_{\substack{1\le i\le d\\ m\in\mathbb{N},\ h}} \big/ \big(u_i^p, T_{i,m}^p\big)$. On a les isomorphismes

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \simeq \Lambda[\eta_m]_{m\in\mathbb{N}}/(\eta_m^p)_{m\in\mathbb{N}},$$
$$R\otimes_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \simeq (R\otimes_S \Lambda(S))[\eta_m]_{m\in\mathbb{N}}/(\eta_m^p)_{m\in\mathbb{N}}.$$

Pour $k \ge -1$, notons M_k (resp. N_k) le sous-Λ-module de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ (resp. le sous-$R\otimes_S \Lambda(S)$-module de $R\otimes_S (\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S))$ engendré par

$$\Big\{\prod_{m=0}^{\infty} \eta_m^{\alpha_m},\ \underline{\alpha}\in\{0,\dots,p-1\}^{(\mathbb{N})},\ (\forall m\in\{0,\dots,k\})\ \alpha_m = p-1,\ \alpha_{k+1} < p-1\Big\}.$$

On a alors $N_k \subseteq M_k$, et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ (resp. $R\otimes_S (\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S))$) est la somme directe des M_k (resp. des N_k). Si $z\in\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, notons $\bar z$ sa réduction modulo p. Soit $z\in\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)\cap\eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$: on peut écrire $z=\eta z'$ avec $z'\in\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. Choisissons $N\in\mathbb{N}$ tel que $\bar z'\in\bigoplus_{k=-1}^{N} M_k$. D'après (4), il existe $y\in R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ et $w\in p^{N+2}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\cap\eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ tels que $z=\eta y+w$. D'après le lemme 38, on peut écrire

$$w = p^{N+2}\sum_{i=0}^{N+2}\gamma^i(\eta)\alpha_i = \eta\sum_{i=0}^{N+2} p^{N+2-i}\delta_{i-1}\alpha_i$$

avec $\alpha_i\in\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ pour $i\in\{0,\dots,N+2\}$, de sorte que $z' = y+\sum_{i=0}^{N+2} p^{N+2-i}\delta_{i-1}\alpha_i$, et donc $\bar z' = \bar y + \bar\delta_{N+1}\bar\alpha_{N+2}$. Comme $\bar z'\in\bigoplus_{k=-1}^{N} M_k$, $\bar y\in\bigoplus_{k=-1}^{\infty} N_k$ et $\bar\delta_{N+1}\bar\alpha_{N+2}\in\bigoplus_{k>N} M_k$, on a nécessairement

$$\bar\delta_{N+1}\bar\alpha_{N+2}\in\bigoplus_{k>N} N_k \subseteq R\otimes_S (\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S))$$

i.e. $\delta_{N+1}\alpha_{N+2}\in R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) + p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, de sorte que

$$z = \eta(y+\delta_{N+1}\alpha_{N+2}) + p\eta\sum_{i=0}^{N+1} p^{N+1-i}\delta_{i-1}\alpha_i \in \eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) + p\eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}.$$

□

Corollaire 40. *On a*

$$\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)\cap([\varepsilon]-1)^{p-1}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = ([\varepsilon]-1)^{p-1}\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big).$$

Démonstration. Si $x\in\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)\cap([\varepsilon]-1)^{p-1}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, alors $x\in p\eta\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, de sorte que $x\in p\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)$. En appliquant le lemme 39 à x/p, il vient $x/p\in\eta\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)$, et donc $x\in([\varepsilon]-1)^{p-1}\big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big)$. □

Pour $r\in\mathbb{N}$, notons ι_r l'injection $R\widehat{\otimes}_S \mathrm{Fil}^r\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\to \mathrm{H}^0\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$.

Proposition 41. *ι_r est un isomorphisme pour tout $r \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. D'après le corollaire 31, $\mathrm{Coker}(\iota_0)$ est tué par $([\varepsilon]-1)^3$ et donc par $([\varepsilon]-1)^{3(p-1)}$: si $x \in \mathrm{H}^0\big(G_{R/S}, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big)$, alors

$$([\varepsilon]-1)^{3(p-1)}x \in \big(R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)\big) \cap ([\varepsilon]-1)^{3(p-1)}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\,.$$

D'après le corollaire 40, on en déduit que $x \in R\widehat{\otimes}_S \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ *i.e.* que $\mathrm{Coker}(\iota_0)$ est nul.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R\widehat{\otimes}_S \mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\iota_{r+1}"] & R\widehat{\otimes}_S \mathrm{Fil}^{r}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\iota_{r}"] & R\widehat{\otimes}_S \mathrm{gr}^{r}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{G_{R/S}} \arrow[r] & \mathrm{Fil}^{r}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{G_{R/S}} \arrow[r] & \mathrm{gr}^{r}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{G_{R/S}} &
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. D'après le lemme du serpent, on a donc une injection $\mathrm{Coker}(\iota_{r+1}) \subseteq \mathrm{Coker}(\iota_r)$, de sorte que $\mathrm{Coker}(\iota_r) = \{0\}$ par récurrence. □

Corollaire 42. *Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\mathrm{H}^0\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\big) = \varinjlim_{n \geq |r|} t^{-n} R\widehat{\otimes}_S \mathrm{Fil}^{r+n}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S).$$

Démonstration. D'après la proposition 41, on a

$$\mathrm{H}^0\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^m\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) = R\widehat{\otimes}_S \mathrm{Fil}^m\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^0\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\big) &= \varinjlim_{n \geq |r|} t^{-n}\mathrm{H}^0\big(G_{R/S}, \mathrm{Fil}^{r+n}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\big) \\
&= \varinjlim_{n \geq |r|} t^{-n} R\widehat{\otimes}_S \mathrm{Fil}^{r+n}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S).
\end{aligned}$$

□

6. Appendice I : une construction de $\mathbf{A}_R^+$

Comme suggéré par le rapporteur, on donne une construction, alternative à celle de [2], Proposition 4.42 & Remarque 4.43, du sous-anneau $\mathbf{A}_R^+$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+ = \mathrm{W}\big(\widetilde{\mathbf{E}}_R^+\big)$, dans le cas où $\mathcal{O}_K = \mathrm{W}(k)$, qui est stable sous l'action de φ et de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$ et qui a les propriétés suivantes :

(1) $[\varepsilon] \in \mathbf{A}_R^+$ et $[\widetilde{T}_i] \in \mathbf{A}_R^+$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$;
(2) $\mathbf{A}_R^+/p\mathbf{A}_R^+ \simeq \mathbf{E}_R^+$;
(3) $\mathbf{A}_R^+$ est complet pour la topologie faible.

Cela permet de donner une définition explicite de cet anneau.

Les raisonnements utilisés étant déjà apparus plusieurs fois dans ce travail, on donne simplement les idées principales.

Posons $\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+ = \mathcal{O}_K[\![\pi]\!]$ où k est le corps résiduel de $\mathcal{O}_K$ et $\pi = [\varepsilon] - 1$. L'anneau $\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_R^+$, complet pour la topologie faible, stable sous l'action de φ et de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$. En outre, il relève $\mathbf{E}_{\mathcal{O}_K}^+ = k[\![\bar{\pi}]\!]$ (*cf.* [11], 3.2).

Soit $\mathbb{A}_S^+$ (resp. $\mathbb{A}_R^+$) le séparé complété de $\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+ \otimes_{\mathcal{O}_K} S$ (resp. $\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+ \otimes_{\mathcal{O}_K} R$) pour la topologie (p, π)-adique. On va construire des applications injectives $\iota_S : \mathbb{A}_S^+ \to \widetilde{\mathbf{A}}_S^+$ et $\iota_R : \mathbb{A}_R^+ \to \widetilde{\mathbf{A}}_R^+$, qui induisent des isomorphismes topologiques avec les anneaux $\mathbf{A}_S^+$ et $\mathbf{A}_R^+$ construit dans [2]. On notera $\bar{\iota}_S$ et $\bar{\iota}_R$ leurs réductions modulo p.

Rappelons que $S^{(0)} = \mathcal{O}_K\{Z_1^{\pm 1}, \ldots, Z_\delta^{\pm 1}\}$ et $\mathbf{E}_{S^{(0)}}^+$ est l'anneau des séries convergentes pour la topologie $\bar{\pi}$-adique :

$$\mathbf{E}_{\mathcal{O}_K}^+ \{\widetilde{Z}_1^{\pm 1}, \ldots, \widetilde{Z}_\delta^{\pm 1}\} \quad \text{où} \quad \widetilde{Z}_i = (Z_i, Z_i^{\frac{1}{p}}, \ldots).$$

En particulier, $\mathbb{A}_{S^{(0)}}^+ = \mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+\{Z_1^{\pm 1}, \ldots, Z_\delta^{\pm 1}\}$ (complété pour la topologie (p, π)-adique). Soit $\iota_{S^{(0)}} : \mathbb{A}_{S^{(0)}}^+ \to \widetilde{\mathbf{A}}_{S^{(0)}}^+$ le morphisme de $\mathbf{A}_{\mathcal{O}_K}^+$-algèbres qui envoie Z_i sur le représentant de Teichmüller $[\widetilde{Z}_i]$ pour $i \in \{1 \ldots, \delta\}$. Il induit un isomorphisme $\mathbb{A}_{S^{(0)}}^+/p\mathbb{A}_{S^{(0)}}^+ \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}_{S^{(0)}}^+$. L'application $\iota_{S^{(0)}}$ est injective modulo (p, π) donc injective, et son image s'identifie à $\mathbf{A}_{S^{(0)}}^+$. On vérifie aisément que l'image de $\mathbb{A}_{S^{(0)}}^+$ par $\iota_{S^{(0)}}$ est stable sous l'action du Frobenius.

On rappelle qu'on a une suite finie $S^{(0)} \subseteq S^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq S^{(n)} = S$ d'anneaux où $S^{(i+1)}$ est obtenu à partir de $S^{(i)}$ en utilisant une des opérations (ét), (loc), (comp) pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. D'après le lemme 9, l'application

$$\xi_{S^{(i)}} : \mathbf{E}_{S^{(i)}}^+ / \bar{\pi}\, \mathbf{E}_{S^{(i)}}^+ \to S^{(i)}/pS^{(i)}, \quad (x_0, x_1, \ldots) \mapsto x_0,$$

est un isomorphisme, fonctoriel en $S^{(i)}$.

Supposons qu'on a construit $\iota_{S^{(i)}}$ avec les propriétés cherchées. Dans chacun des cas (ét), (loc) et (comp), on montre qu'il existe une unique application $\bar{\iota}_{S^{(i+1)}}$ (resp. $\iota_{S^{(i+1)}}$) de $\mathbb{A}_{S^{(i)}}^+/p\mathbb{A}_{S^{(i)}}^+$-algèbres (resp. de $\mathbb{A}_{S^{(i)}}^+$-algèbres) qui induit $\xi_{S^{(i+1)}}$ modulo $\bar{\pi}$ (resp. modulo (p, π)). Comme $\bar{\iota}_{S^{(i+1)}}$ (resp. $\iota_{S^{(i+1)}}$) est injective modulo $\bar{\pi}$ (resp. modulo (p, π)), elle est injective. Par construction, l'image de $\iota_{S^{(i+1)}}$ vérifie les propriétés (1), (2) et (3) : elle est topologiquement isomorphe à $\mathbf{A}_{S^{(i+1)}}^+$. On montre par induction sur i que dans chacun des cas (ét), (loc) et (comp), il existe un et un seul opérateur φ sur $\mathbb{A}_{S^{(i+1)}}^+$ qui induit le Frobenius modulo p et est compatible avec le Frobenius sur $\mathbb{A}_{S^{(i)}}^+$ (défini par le Frobenius sur $\mathbf{A}_{S^{(i)}}^+$). En outre, on vérifie par

induction que $\varphi \circ \iota_{S^{(i+1)}} = \iota_{S^{(i+1)}} \circ \varphi$, parce que c'est vrai modulo p et pour $\iota_{S^{(i)}}$ par hypothèse de récurrence.

Rappelons que R s'obtient à partir de $R^{(0)} = S\left\{T_1^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}\right\}$ en itérant un nombre fini de fois les opérations (ét), (loc) et (comp). En particulier, $\mathbb{A}^+_{R^{(0)}} = \mathbb{A}^+_S\left\{T_1^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}\right\}$ et $\mathbb{A}^+_{R^{(0)}}/p\mathbb{A}^+_{R^{(0)}} \cong \mathbf{E}^+_{R^{(0)}}$. Soit $\iota_{R^{(0)}} : \mathbb{A}^+_{R^{(0)}} \to \widetilde{\mathbf{A}}^+_{R^{(0)}}$ le morphisme de $\mathbb{A}^+_S$-algèbres qui envoie T_j sur $\left[\widetilde{T}_j\right]$ pour $1 \leq j \leq d$. L'application est injective modulo (p, π), donc injective, et son image s'identifie à $\mathbf{A}^+_{R^{(0)}}$. On vérifie que l'image de $\mathbb{A}^+_{R^{(0)}}$ par $\iota_{R^{(0)}}$ est stable sous l'action de φ et de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$. En raisonnant comme précédemment, on voit qu'il existe une unique application ι_R de $\mathbb{A}^+_{R^{(0)}}$-algèbres qui induit ξ_R modulo (p, π), injective, et dont l'image est isomorphe à $\mathbf{A}^+_R$. Comme dans le cas de $\mathbf{A}^+_S$, on vérifie que l'image de $\mathbb{A}^+_R$ est stable par le Frobenius. On prouve de la même façon que l'action de $\widetilde{\Gamma}_{R/S}$ sur $\mathbb{A}^+_{R^{(0)}}$ (définie par l'action sur $\mathbf{A}^+_{R^{(0)}}$) s'étend à $\mathbb{A}^+_R$ et que pour tout $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_{R/S}$, on a $\gamma \circ \iota_R = \iota_R \circ \gamma$.

7. Appendice II

Les auteurs remercient le rapporteur pour leur avoir suggéré d'inclure la proposition 47, qui est utilisée à plusieurs reprises dans le texte.

Définition 43 ([18], Definition 1.1). Un homomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres $f : A \to B$ est dit *relativement parfait* lorsque l'homomorphisme

$$B \otimes_{A,\varphi} A \to B, \quad x \otimes y \mapsto x^p f(y),$$

est un isomorphisme (où φ est le Frobenius absolu de A).

Les morphismes relativement parfaits entre $\mathbb{F}_p$-algèbres sont stables par composition et changement de base. D'après [14], 0_{IV} Théorème 21.2.7, un morphisme relativement parfait de $\mathbb{F}_p$-algèbres est formellement étale.

Définition 44 ([18], Definition 1.2). Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Un morphisme de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-algèbres $f : A \to B$ est dit *relativement parfait* s'il est formellement étale (pour la topologie discrète) et si l'homomorphisme $\mathbb{F}_p \otimes f : \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A \to \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} B$ est relativement parfait.

Lemme 45 ([18], Lemma 1.6). *Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $f : A \to B$ un morphisme de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-algèbres tel que $\mathbb{F}_p \otimes f$ soit plat. Alors f est relativement parfait si et seulement s'il est plat et $\mathbb{F}_p \otimes f$ est relativement parfait.*

Lemme 46. *Soient S une $\mathbb{Z}_p$-algèbre plate, séparée et complète pour la topologie p-adique, et $f : S\{T_1^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}\} \to R$ un homomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-algèbres satisfaisant les conditions suivantes :*

(1) *R est séparé et complet pour la topologie p-adique et noethérien ;*
(2) *f est plat ;*
(3) *$\mathbb{F}_p \otimes f$ est relativement parfait ;*
(4) *le Frobenius absolu de R/pR est fini.*

Soit R' une R-algèbre de type (ét), (loc) ou (comp). Alors le composé de f et de $R \to R'$ vérifie lui aussi les conditions (1)–(4).

Démonstration. (1) Montrons que R' est séparé et complet pour la topologie p-adique dans le cas (comp) (les autres cas étant triviaux). Soient I un idéal de R contenant pR et R' la complétion I-adique de R. Comme R est noethérien, on a

$$R'/p^m R' \simeq R' \otimes_R (R/p^m R) \simeq \varprojlim_n (R/p^m R)/I^n(R/p^m R)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Comme R est noethérien, R/I^n est séparé et complet pour la topologie p-adique, de sorte que

$$\begin{aligned}\varprojlim_m R'/p^m R' &\simeq \varprojlim_m \varprojlim_n (R/p^m R)/I^n(R/p^m R) \simeq \varprojlim_m \varprojlim_n (R/I^n)/p^m(R/I^n)\\ &\simeq \varprojlim_n \varprojlim_m (R/I^n)/p^m(R/I^n) \simeq \varprojlim_n R/I^n = R'.\end{aligned}$$

(2) est évident.

(3) Il suffit de montrer que $R/pR \to R'/pR'$ est relativement parfait. Dans le cas (ét), l'extension $R/pR \to R'/pR'$ est étale donc relativement parfaite. Dans le cas (loc), si R' est la complétion p-adique de la localisation de R par rapport à une partie multiplicative Σ, alors $R'/pR' = \bar{\Sigma}^{-1}(R/pR)$ où $\bar{\Sigma}$ désigne l'image de Σ dans R/pR. L'application $x \otimes y \mapsto x^p y$ est un isomorphisme $\bar{\Sigma}^{-1}(R/pR) \otimes_{R/pR,\varphi} (R/pR) \xrightarrow{\sim} \left(\bar{\Sigma}^p\right)^{-1}(R/pR) = \bar{\Sigma}^{-1}(R/pR)$, de sorte que $R/pR \to R'/pR'$ est relativement parfait. Dans le cas (comp), on a $R' = \varprojlim_n R/I^n$ où $I \subset R$ est un idéal contenant pR : comme R est noethérien, R'/pR' est la complétion $\bar{I} = I(R/pR)$-adique de R/pR. Comme $\varphi\colon R/pR \to R/pR$ est fini, $(R'/pR') \otimes_{R/pR,\varphi} (R/pR)$ est le complété $\varphi(\bar{I})(R/pR)$-adique de R/pR : l'idéal $\bar{I}$ étant de type fini, il coïncide avec le complété $\bar{I}$-adique de R/pR.

(4) Comme $R/pR \to R'/pR'$ est relativement parfait, la finitude de $R'/pR' \to R'/pR'$ résulte de celle de $\varphi\colon R/pR \to R/pR$. □

Proposition 47. *Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $g\colon A \to B$ un morphisme relativement parfait de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-algèbres (d'après le lemme 46, c'est le cas lorsque A est une $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-algèbre plate et noethérienne, le Frobenius absolu de $\mathbb{F}_p \otimes A$ est fini, et B est un anneau obtenu à partir de A en itérant un nombre fini de fois les opérations (ét), (loc) et (comp)). Soit $\theta\colon C \to \bar{C}$ un homomorphisme surjectif. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $x^N = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}(\theta)$ (notons que cela n'implique pas que $\mathrm{Ker}(\theta)$ est nilpotent, à moins qu'il soit de type fini).*

(1) *Pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\bar{I}"] & \bar{C} \\ A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h"'] & C \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme $f : B \to C$ *tel que* $\theta \circ f = \bar{I}$ *et* $f \circ g = h$.

(2) *Soit* $f : B \to C$ *un homomorphisme et* C_0 *un sous-anneau de* C. *Si* $(f \circ g)(A) \subseteq C_0$ *et* $(\theta \circ f)(C) \subseteq \theta(C_0)$, *alors* $f(B) \subseteq C_0$.

Démonstration. (1) C'est [18], Lemma 1.9.

(2) Posons $\bar{C}_0 = \theta(C_0)$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\theta \circ f"] & \bar{C} \\ A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f \circ g"'] & C \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

se factorise en

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] & \bar{C}_0 \arrow[r, hook] & \bar{C} \\ A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\alpha"'] & C_0 \arrow[u, "\theta_0"'] \arrow[r, hook, "\iota"'] & C. \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

D'après (1), il existe un unique homomorphisme $h : B \to C_0$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "h"] & \bar{C}_0 \\ A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\alpha"'] & C_0 \arrow[u, "\theta_0"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Les deux homomorphismes $f, \iota \circ h : B \to C$ rendent le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\theta \circ f"] \arrow[dr] & \bar{C} \\ A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f \circ g"'] & C \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

commutatif. D'après (1), on a $f = \iota \circ h$, de sorte que $f(B) \subset C_0$. $\square$

Références

[1] F. Andreatta, Generalized ring of norms and generalized (φ, Γ)-modules. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **39** (2006), 599–647. Zbl 1123.13007 MR 2290139

[2] F. Andreatta and O. Brinon, Surconvergence des représentations p-adiques : le cas relatif. In *Représentations p-adiques de groupes p-adiques I : représentations galoisiennes et (φ, Γ)-modules*, *Astérisque* **319**, Soc. Math. France, Paris 2008, 39–116. Zbl 1168.11018 MR 2493216

[3] F. Andreatta and A. Iovita, Comparison isomorphisms for smooth formal schemes. *J. Inst. Math. Jussieu* **12** (2013), no. 1, 77–151. Zbl 06124086 MR 3001736

[4] F. Andreatta and A. Iovita, Global applications of relative (φ, Γ)-modules I. In *Représentations p-adiques de groupes p-adiques I : représentations galoisiennes et (φ, Γ)-modules*, *Astérisque* **319**, Soc. Math. France, Paris 2008, 339–419. Zbl 1163.11051 MR 2493222

[5] F. Andreatta and A. Iovita, Erratum to the article "Global applications to relative (φ, Γ)-modules, I". *Astérisque* **330** (2010), 543–554. Zbl 1202.11038 MR 2642412

[6] O. Brinon. Représentations cristallines dans le cas d'un corps residuel imparfait. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56** (2006), 919–999. Zbl 1168.11051 MR 2266883

[7] O. Brinon, *Représentations p-adiques cristallines et de de Rham dans le cas relatif.* Mém. Soc. Math. France (N.S.) 112, Soc. Math. France, Paris 2008. Zbl 1170.14016 MR 2484979

[8] G. Faltings, Crystalline cohomology and p-adic Galois representations. In *Algebraic analysis, geomtery and number theory*, ed. by. J. I. Igusa, John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989, 25–80. Zbl 0805.14008 MR 1463696

[9] G. Faltings, Almost étale extensions. In *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. II*, *Astérisque* **279**, Soc. Math. France, Paris 2002, 185–270. Zbl 1027.14011 MR 1922831

[10] J.-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Ann. of Math* **115** (1982), 529–577. Zbl 0544.14016 MR 0657238

[11] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux. I. In *Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math. 87, Birkhäuser, Boston, Mass., 1990, 249–309. Zbl 0743.11066 MR 1106901

[12] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques. In *Périodes p-adiques* (Bures-sur-Yvette, 1988), *Astérisque* **223**, Soc. Math. France, Paris 1994, 59–111. Zbl 0940.14012 MR 1293971

[13] J.-M. Fontaine and W. Messing, p-adic periods and p-adic étale cohomology. In *Current trends in arithmetical algebraic geometry* (Arcata, Calif., 1985), Contemp. Math. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 179–207. Zbl 0632.14016 MR 0902593

[14] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Première partie. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **20** (1964), 5–259. Zbl 0136.15901 MR 0173675

[15] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **24** (1965), 5–231. Zbl 0135.39701 MR 0199181

[16] O. Hyodo, On variation of Hodge-Tate structures. *Math. Ann.* **284** (1989), 7–22. Zbl 0645.14002 MR 0995378

[17] U. Jannsen, Continuous étale cohomology. *Math. Ann.* **280** (1988), 207–245. Zbl 0649.14011 MR 0929536

[18] K. Kato, The explicit reciprocity law and the cohomology of Fontaine-Messing. *Bull. Soc. Math. France* **119** (1991), 397–441. Zbl 0752.14015 MR 1136845

[19] H. Matsumura, *Commutative ring theory*. Second edition, Cambridge Stud. Adv. Math. 8, Cambridge University Press, Cambridge 1986. Zbl 0603.13001 MR 0879273

[20] J. Tate, Relations between K_2 and Galois cohomology. *Invent. Math.* **36** (1976), 257–274. Zbl 0359.12011 MR 0429837

Received November 27, 2007; revised April 4, 2011

Fabrizio Andreatta, Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques", Via Saldini 50, 20133 Milano, Italie

E-mail: fabrizio.andreatta@unimi.it

Olivier Brinon, Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France

E-mail: olivier.brinon@math.u-bordeaux1.fr