Die Tylorsche Formel bei Johann I Bernoulli

Autor(en): **Fleckenstein, J.O.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 1

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-1197

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die Taylorsche Formel bei Johann I Bernoulli

Bekanntlich hat BROOK TAYLOR 1715[1]) aus der NEWTONschen Interpolationsformel[2])

$$f(x+n\Delta x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\Delta^{\nu}f(x)$$

mit der Substitution $n\Delta x=h$, $(n-\nu)\Delta x=h-\nu\Delta x$ aus

$$f(x+h)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\frac{h}{\Delta x}}{\nu}\Delta^{\nu}f(x)=f(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(h-\mu\Delta x)\frac{1}{\nu!}\frac{\Delta^{\nu}f(x)}{\Delta x^{\nu}}$$

durch «kühne» Grenzübergänge für $n\to\infty$, $\Delta x\to 0$ seine berühmte TAYLORsche Reihe — natürlich ohne Restglied —

$$\text{(T)}\qquad f(x+h)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{h^{\nu}}{\nu!}\frac{d^{\nu}f(x)}{dx^{\nu}}$$

gewonnen. Setzt man in der TAYLORschen Formel (T) $h=-x$, so folgt

$$f(x)-f(0)=xf'(x)-\frac{x^2}{2!}f''(x)+\frac{x^3}{3!}f'''(x)-\cdots$$

oder, wenn man $\varphi(x)=f'(x)$ einführt,

$$\text{(B)}\qquad \int_0^x\varphi(x)\,dx=x\varphi(x)-\frac{x^2}{2!}\varphi'(x)+\frac{x^3}{3!}\varphi''(x)-\cdots,$$

eine Formel, die TAYLOR ebenfalls, aber ohne Rücksicht auf (T) hergeleitet hat[3]).

Die Entwicklung (B), welche allgemein das Integral einer beliebigen Funktion $\varphi(x)$ durch eine unendliche Reihe der Derivierten $\varphi^{(\nu)}(x)$ darzustellen erlaubt, war aber schon 1694 von JOHANN I BERNOULLI hergeleitet worden[4]); mit Stolz proklamierte er sie als universales Hilfsmittel zur Ausführung von Integrationen[5]).

BERNOULLI war im Anschluß an den Prioritätsstreit um die Infinitesimalrechnung mit den englischen Mathematikern in heftigen Streit geraten; besonders hatte er es in seiner Polemik auf TAYLORS «Methodus incrementorum» abgesehen, den er neben

---

[1]) Methodus incrementorum directa et inversa; Autore Brook Taylor, L.L.D. & Regiae Societatis Secretario. Londini, Typis Pearsonianis prostat apud Guil. Innys, 1715, 4°.

Die Reihe (T) steht in Prop. VII, Theor. III, pp. 21—23.

[2]) Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß weder TAYLOR noch die Mathematiker des LEIBNIZkreises eine geschlossene Summensymbolik benutzten, die erst im 19. Jahrhundert aufkam.

[3]) Die Reihe (B) steht in Prop. XI, Theor. IV, pp. 38—46 in [1]).

[4]) Additamentum effectionis omnium quadraturarum et rectificationum curvarum per seriem quandam generalissimam. A. E. 1694 (Nov.), pp. 437—441 = Op. Joh. Bernoullii, tom. I, pp. 125—128.

[5]) Im Brief vom 2. IX. 1694 an LEIBNIZ, worin er diesem erstmals von seiner allgemeinen Reihe Mitteilung macht, ohne allerdings die Herleitung anzugeben.

Brief Nr. 5 der Korresp. mit LEIBNIZ = GERHARDT III, p. 150.

dem Vorwurfe von Verworrenheiten in den Grundlagen speziell des Plagiats an den Entdeckungen der Leibnizianer, wie z. B. an der Reihe (B), bezichtigte[1]).

Diese Reklamation BERNOULLIS bei der Reihe (B) wurde von PEANO[2]) sogar als ein berechtigter Prioritätsanspruch auch auf die TAYLORsche Reihe (T) angesehen. Diese Auffassung drängt sich um so mehr auf, als BERNOULLI die Reihenentwicklung mit dem Verfahren der sukzessiven partiellen Integration beweist, welches seit D'ALEMBERT sich für die Herleitung der TAYLORschen Reihe eingebürgert hat und gerne in den Lehrbüchern benutzt wird.

Es steht aber fest[3]), daß BERNOULLIS Prioritätsanspruch sich nur auf die Reihe (B) bezieht und daß BERNOULLI keineswegs den Zusammenhang seiner Reihe mit der TAYLORschen bemerkt hat, obwohl sie durch gewisse Transformationen in (T) übergeführt werden kann[4]). Dagegen hat LEIBNIZ Anspruch auf Priorität bei der TAYLORschen Reihe (T), die von ihm übrigens wie bei TAYLOR aus einer Interpolationsformel hergeleitet wird[5]). In der Rezension des TAYLORschen Buches in den Acta Eruditorum, die, wie sich heute beweisen läßt, von LEIBNIZ selber stammt[6]), wird nun darauf hingewiesen, daß TAYLOR gar nicht die von LEIBNIZ[7]) entdeckte formale Analogie

$$(1) \qquad d^m\big(f(x)\,g(x)\big) = \big(df(x) + dg(x)\big)^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} d^{m-\nu} f(x)\, d^{\nu} g(x)$$

beachtet habe, die in dem Differenzenkalkül der Interpolationsrechnung eine wichtige Rolle spielt.

Die Quelle der BERNOULLIschen Reihe (B), der «series universalissima, quae omnes quadraturas et rectificationes generaliter exprimit»[8]), liegt nämlich in der Tat in

---

[1]) Epistola pro eminente mathematico Joh. Bernoullio contra quendam ex Anglia antagonistam scripta. A. E. 1716 (Juli), pp. 296—315. Diesen Brief hatte BERNOULLI an CHR. WOLFF geschrieben (8. IV. 1716), der ihn ohne Wissen BERNOULLIS, um LEIBNIZ im Prioritätsstreit zu unterstützen, unter dem obigen Titel in den Acta Eruditorum anonym publizierte. BERNOULLI hat lange bestritten, der Verfasser dieses Briefes zu sein, in dem er ziemlich grob über die englischen Mathematiker herfällt.

[2]) A. GENOCCHI, Calcolo differenziale, ed. G. Peano, 1884 (deutsche Ausgabe) von G. BOHLMANN und A. SCHEPP, p. 319.

[3]) A. PRINGSHEIM, Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes. Bibl. Math. (3), Bd. 1 (1900), pp. 433—479.

[4]) In [3]) Fußnote 1 auf p. 437. Die Herleitung von (T) aus (B) ist analytisch keineswegs so einfach wie die umgekehrte Herleitung von (B) aus (T).

[5]) Andeutungen im Antwortbrief LEIBNIZens auf den in [5]) S. 13 zitierten Brief BERNOULLIS. Brief 6 der Korresp. (16. XII. 1694) = GERH. III, pp. 153—157.

Nähere Ausführungen dazu in H. AUCHTER, Brook Taylor, der Mathematiker und Philosoph, Würzburg 1937, pp. 36—49.

[6]) A. E. 1716, pp. 292—296.

Es heißt dort (p. 294/95): «Pulcherrimam analogiam Leibnitianam inter differentiam et variorum graduum infinitesimales quantitatum formatarum per multiplicationes, & potentias ordinarias quantitatum formatarum per additionem, in Miscellaneis Berolinensibus expositam, quae huius loci esse videbatur, Dn. Autor vel non observavit, vel praeteriit...»

Über die Verfasserschaft LEIBNIZens dieser Rezension vgl. E. O. SCHLOSSER, Die Rezensionstätigkeit von Leibniz, Heidelberg Diss. 1934, p. 5, p. 51.

[7]) C. G. L. Symbolismus memorabilis calculi Algebraici & Infinitesimalis, in comparatione potentiarum & differentiarum; & de Lege Homogeneorum Transcendentali. Miscellanea Berolinensia, Tom. I (1710), pp. 160—165.

LEIBNIZ betrachtet hier übrigens auch die allgemeine Ableitung $d^m(f(x)g(x)h(x))$.

[8]) Brief vom 2. 9. 1694. vgl. Fußnote [5]) S. 13.

einem ganz allgemeinen Formalismus des Differentialkalküls, den BERNOULLI auch in seiner Abhandlung von 1694 nicht ganz verschleiern konnte. In dieser Abhandlung geht BERNOULLI von der spontan auftretenden Identität (J)

$$\text{(J)}\quad \varphi dx = (\varphi dx + x\,d\varphi) - \left(x\,d\varphi + \frac{d^2\varphi}{dx}\cdot\frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{d^2\varphi}{dx}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{d^3\varphi}{dx^2}\cdot\frac{x^3}{3!}\right) \cdots$$

aus und gewinnt $\int \varphi dx$ dadurch, daß allgemein je zwei Glieder nach der Formel der partiellen Integration[1]) in die Glieder der Reihe (B) übergehen.

Führt man nun aber den Operator d mit der LEIBNIZschen «Charakteristik» p ein[2]), so daß d^p das p-te Differential und $d^{-p} = \frac{1}{d^p} = \int^p$ das p-fache Integral bedeutet, so kann man die obige Identität (J) in der Form schreiben $\left(d^{-1}x = \int x = \frac{x^2}{2!}\cdot\frac{1}{dx}\text{usw.}\right)$:

$$\varphi dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \{d^\nu\varphi\, d^{-\nu+1}x + d^{\nu+1}\varphi\, d^{-\nu}x\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu\, d(d^\nu\varphi\, d^{-\nu}x).$$

Dann stehen rechter Hand beim Integral von φdx

$$\int \varphi dx = \int d \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu d^\nu\varphi\, d^{-\nu}x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu d^\nu\varphi\, d^{-\nu}x$$

lauter Produkte aus gleichsam gleichzeitig auf- und absteigenden Charakteristiken, indem der eine Faktor des Integranden dx dauernd fortlaufend integriert und der andere Faktor $\varphi(x)$ fortlaufend differenziert wird. Die BERNOULLIsche Reihe schreibt sich also

$$\text{(B)}\qquad d^{-1}(\varphi dx) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu d^\nu\varphi\, d^{-\nu}x,$$

und das ist in der Tat ein Spezialfall der allgemeinen LEIBNIZschen Formel (1). Für $m=-1$; $g=dx$, $f=\varphi$ folgt nämlich aus (1):

$$d^{-1}(\varphi dx) = (d^2x + d\varphi)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-1}{\nu} d^{-1-\nu+1}x\, d^\nu\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu d^\nu\varphi\, d^{-\nu}x.$$

Auf diesem Wege hat LEIBNIZ die Reihe (B) gewonnen und sie BERNOULLI in einem Brief vom 28. Februar 1695 mitgeteilt[3]).

BERNOULLI jedoch bemerkt, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu d^\nu\varphi\, d^{-\nu}x$ gleichsam eine «symbolische» unendliche geometrische Reihe mit dem Quotienten $-d\varphi\, d^{-1}x$ darstellt. Man kann

---

[1]) Der Umweg über (J), statt direkt (B) durch partielle Integration von $\int \varphi dx$ zu gewinnen, erklärt sich aus dem noch unentwickelten Anfangsstadium des neuen Kalküls.

[2]) So wenig Skrupel die ersten Pioniere der neuen Analysis bis weit in das 18. Jahrhundert hinein bei Reihenentwicklungen hatten, so hemmungslos vertrauten sie auch einem bloß formalen Kalkül, ohne sich um dessen Gültigkeitsbedingungen zu kümmern. Die folgenden Ableitungen müssen unter diesem Gesichtspunkt betrachtet werden

[3]) Brief 8 der Korresp. = GERH. III, pp. 166—168.

BERNOULLI weist ihm dann in der Anwort vom 30. IV. 1695 (GERH. III, p. 171) einen Rechenfehler in dieser Ableitung nach und gibt den richtigen Wert nach LEIBNIZens Methode.

sie also aus der Summenformel der unendlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu d^\nu \varphi d^{-\nu} x = \frac{1}{1 + d\varphi\, a^{-1} x}$$

herleiten. Erweitert man diesen Quotienten mit $(\varphi dx)^2 = (d^0\varphi\, d^1 x)^2 = d^0\varphi\, d^2 x$, so folgt

$$\frac{(\varphi dx)^2}{d^0\varphi\, d^2 x + d^1\varphi\, d^1 x} = \frac{(\varphi dx)^2}{d(\varphi dx)}.$$

Es ist also

$$\int \varphi dx = \frac{(\varphi dx)^2}{d(\varphi\, ax)}, \tag{2}$$

d. h. das Integral ist gleich dem symbolischen Quotienten aus dem symbolischen Quadrat des Integranden und der Ableitung des Integranden. Dieser allgemeine Satz folgt aber, wie BERNOULLI entdeckt hat[1]), aus der charakteristischen Eigenschaft der Differentialoperatoren

$$d^m d^n = d^{m+n},$$

die sich zu $d^p \cdot d^{p+2} = d^{p+1+p+1}$ spezialisieren läßt, woraus $d^p : d^{p+1} = d^{p+1} : d^{p+2}$, also auch $d^{-1} : d^0 = d^0 : d^1$, d. h. $d^{-1} = \frac{(d^0)^2}{d^1}$, also, angewandt auf φdx, die Relation (2) folgt.

Aus diesem allgemeinen, rein formalen Satz hat über die Entwicklung in eine unendliche geometrische Reihe BERNOULLI wohl seine Reihe gefunden, die er in seiner Abhandlung mittels einer besonderen, keineswegs auf der Hand liegenden Identität (J) gewinnt, deren Hintergründe er dem Publikum vorenthalten und nur LEIBNIZ mitgeteilt hat[2]).

Diesen Briefwechsel mit LEIBNIZ hatte aber BERNOULLI schon recht früh dem Marquis de L'HÔPITAL in Kopien zur Einsichtnahme[3]) überlassen. Während sich aber L'HÔPITAL nur für die mehr geometrische Seite der neuen Analysis interessierte, hat der andere Pionier der LEIBNIZschen Infinitesimalrechnung in Frankreich, PIERRE VARIGNON, sogleich sich für diese Formalismen begeistert, in die ihm L'HÔPITAL seinerseits durch Ausleihen der BERNOULLIschen Kopien Einblick gewährte[4]). Erfreut schreibt VARIGNON an BERNOULLI[5]), daß es ihm gelungen sei, die noch viel allgemeinere Reihe

$$\int\left(\int^p f^k \int^q g^l\right) = d^{-1}\left(d^{-p} f^k d^{-q} g^l\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-1}{\nu} d^\nu \left(d^{-p} f^k\right) d^{-1-\nu}\left(d^{-q} g^l\right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-1}{\nu} d^{-(p-\nu)} f^k\, d^{-(q+\nu+1)} g^l;$$

$$\int\left(\int^p f^k \int^q g^l\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \int^{p-\nu} f^k \int^{q+\nu+1} g^l$$

---

[1]) Brief 11 der Korresp. (18. VI. 1695) = GERH. III, pp. 180—181.
Dort teilt BERNOULLI endlich LEIBNIZ seine Formel (2) mit.

[2]) Die vollständige Ableitung in Brief 14 der Korresp. (17. VII. 1695) = GERH. III, pp. 199/200.

[3]) Brief 54 der Korresp. mit L'HÔPITAL (10. I. 1696).

[4]) Brief 33 der Korresp. mit VARIGNON (18. II. 1698).

[5]) Brief 42 der Korresp. mit VARIGNON (4. IX. 1698).

herzuleiten, die für $p=0$, $q=-1$; $k=l=1$; $f=\varphi$, $g=x$ die BERNOULLIsche Reihe (B) als Spezialfall enthalte. Den Beweis führt VARIGNON nach BERNOULLIS Manier, indem er von der allgemeineren Identität

$$\int^p f^k \int^q g^l = \left(\int^p f^k \int^q g^l + \int^{p-1} f^k \int^{q+1} g^l\right) - \left(\int^{p-1} f^k \int^{q+1} g^l + \int^{p-2} f^k \int^{q+2} g^l\right) + \cdots$$

ausgeht. Merkwürdigerweise hat VARIGNON diese Formel nie publiziert, wie wir von ihm ja überhaupt keine Arbeiten über den Infinitesimal*kalkül* als solchen besitzen, so sehr ihn auch seine geometrischen und mechanischen Arbeiten als einen Meister in der praktischen Handhabung desselben ausweisen.

J. O. FLECKENSTEIN, Basel

Present Developments in the Teaching of Mathematics in the United States

Two outstanding publications of the year 1945 characterize both the present general tendencies and the individual contributions in the development of the teaching of mathematics in the United States. Both publications have been brought out by committees, and each lists over a hundred co-workers. One is the report of the Harvard Committee, published by the President and the Fellows of Harvard College under the title "General Education in a Free Society". It gives a nation-wide survey of both school and collegiate education and also includes a special chapter on the teaching of mathematics. The Harvard Committee is composed of twelve members, of college presidents, deans and professors, and has been appointed by J. B. CONANT, President of Harvard University in the Spring of 1943. The following quotations may convey the direction of its findings: "The ideal is a system which shall be as fair to the fast as to the slow, to the hand-minded as to the book-minded, but which while meeting the separate needs of each, shall yet foster the fellow-feeling between human being and human being which is the deepest root of democracy . . . Hence the task of the high-school is not merely to speed the bright boy to the top. It is at least as much so to widen the horizons of the ordinary student that they and, still more, their children will encounter fewer of the obstacles that cramp achievement . . . A truly democratic education must perforce try to equalize opportunity by counteracting impediments. But it cannot do so simply by offering the conventional academic subjects to all students indiscriminately. These, again as now taught at least are too alien to the backgrounds of most students to be anything like generally effective in breaking down the barriers of circumstance. Something closer to their experience is needed which, by meeting them halfway will lead them out and beyond themselves."

In regard to mathematics in particular, the report points out the increased demands called forth by the necessities of modern industrial life and then stresses the general